Γενική Φυσική

Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
Φυσικός – Ραδιοηλεκτρολόγος (MSc)
2ο Γενικό Λύκειο Καστοριάς

Καστοριά, Ιούλιος 14

Γενική Φυσική

Α. Μαθηματική Εισαγωγή

- Πράξεις με αριθμούς σε εκθετική μορφή
- Επίλυση βασικών μορφών εξισώσεων
- **Συναρτήσεις**
- Στοιχεία τριγωνομετρίας
- Διανύσματα

Συναρτήσεις

- **Συνάρτηση**

  $$y = f(x): A \to B$$

  ονομάζουμε μία **μονότιμη απεικόνιση** του συνόλου Α στο σύνολο Β. Υποθέτουμε ότι τα δύο σύνολα είναι **υποσύνολα** πραγματικών αριθμών και δεν είναι κενά.
- Πολύ απλά μπορούμε να πούμε ότι ένα μέγεθος (y) είναι συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους (x), όταν οι τιμές του y εξαρτώνται από τις τιμές του x.
- Το x λέγεται **ανεξάρτητη** μεταβλητή και το y **εξαρτημένη**.
- Πολλές φορές, για οικονομία στην έκφραση αλλά και στο συμβολισμό, αντί να γράψουμε

  $$y = f(x)$$

  γράφουμε

  $$y = y(x)$$

  και εννοούμε ότι το μέγεθος y είναι συνάρτηση του μεγέθους x ή αλλιώς το y εξαρτάται από το x.

Συναρτήσεις

- Ας θεωρήσουμε την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.
- Η ταχύτητα του κινητού (υ) και το διάστημα (S) είναι συναρτήσεις του χρόνου (t):

  $$\upsilon(t) = \upsilon_0 + at$$

  $$S(t) = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

- Αν το μέτρο της αρχικής ταχύτητας είναι υ_0 και της επιτάχυνσης α, για να το δηλώσουμε αυτό γράφουμε

  $$\upsilon = f(t) \text{ ή } \upsilon = \upsilon(t)$$

  και

  $$S = g(t) \text{ ή } S = S(t)$$

Συναρτήσεις

- Στα παραδείγματα αυτά, τα μεγέθη ταχύτητα (υ) και διάστημα (S) αποτελούν τις εξαρτημένες μεταβλητές ενώ ο χρόνος (t) αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή. Η αρχική ταχύτητα (υ_0) και η επιτάχυνση (α) αποτελούν όπως λέμε τις παραμέτρους του προβλήματος.

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + at$$

$$S(t) = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Συναρτήσεις

- Τις τιμές της συνάρτησης για διάφορες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής τις συμβολίζουμε ως εξής:

$$\gamma\iota\alpha \;\; x = x_1 : \; y_1 \text{ ή } y(x_1) \text{ ή } y(x = x_1) \text{ ή...}$$

$$\gamma\iota\alpha \;\; x = x_2 : \; y_2 \text{ ή } y(x_2) \text{ ή } y(x = x_2) \text{ ή...}$$

Συναρτήσεις

- Για παράδειγμα, αν $υ_0$ = 2 m/s και α = 3 m/s^2, η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t = t_1 είναι:

$$υ_1 = υ(t_1) = υ(t = t_1) = υ_0 + at_1$$

- Δηλαδή

$$υ_1 = 2 + 3t_1,\ t/s\ και\ υ/(m/s)$$

- Αν πχ t_1 = 2 sec, θα είναι:

$$υ_1 = υ(2s) = υ(t = 2s) = 2m/s + (3m/s^2)\cdot(2s) = 8m/s$$

Γραφικές παραστάσεις

- **Γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης
  y = y(x)
  καλούμε τη σχηματική παράσταση που προκύπτει αν πάρουμε σ’ ένα (συνήθως ορθογώνιο) σύστημα συντεταγμένων τα σημεία που ορίζονται από τα ζεύγη των αριθμών x και y, δηλ τα (x, y) ή (x, y(x)).
- Στην πράξη, αυτό που κάνουμε είναι να υπολογίζουμε τις τιμές του εξαρτώμενου μεγέθους για διάφορες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Έτσι σχηματίζουμε ένα πίνακα τιμών με τη βοήθεια του οποίου κάνουμε τη γραφική παράσταση.
- Από μία γραφική παράσταση λαμβάνουμε περισσότερο ποιοτικές και λιγότερο ποσοτικές ή αριθμητικές πληροφορίες.

Γραφικές παραστάσεις

- Ως παράδειγμα, θα δούμε πως μεταβάλλεται το διάστημα που διανύει ένα κινητό όταν εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με $υ_0$ = 20 m/s και α = 4 m/s^2 .
- Χρησιμοποιώντας τη σχέση

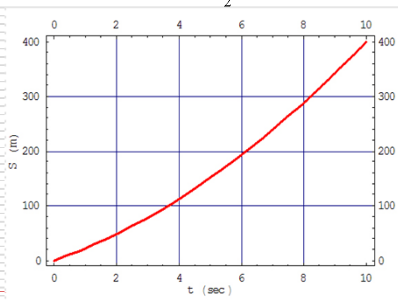
$$S(t) = υ_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

  υπολογίζουμε το διάστημα S για διάφορες χρονικές στιγμές.
- Έτσι συμπληρώνουμε έναν πίνακα τιμών και με τη βοήθειά του δημιουργούμε το διάγραμμα

Γραφικές παραστάσεις

Χρόνος (sec)	Διάστημα (m)
0	0
1	22
2	48
3	78
4	112
5	150
6	192
7	238
8	288
9	342
10	400

$$S(t) = υ_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



Στοιχειώδεις συναρτήσεις

- Είναι πολύ χρήσιμο να θυμόμαστε τη μορφή ορισμένων απλών, αλλά συχνά απαντώμενων συναρτήσεων.
- Τις συναρτήσεις αυτές τις ονομάζουμε **στοιχειώδεις συναρτήσεις** αφού μπορούμε να πούμε απλά ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να δημιουργηθεί απ’ αυτές με τις κατάλληλες διεργασίες.

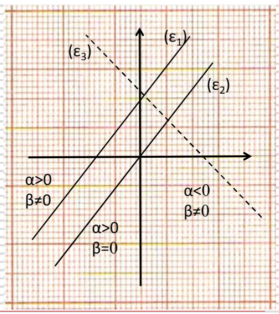
Η γραμμική συνάρτηση

- Όταν λέμε **γραμμική συνάρτηση** εννοούμε μία σχέση της μορφής

$$y = ax + b$$

- και η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία γραμμή.
- Αν b = 0 η παραπάνω εξίσωση γίνεται

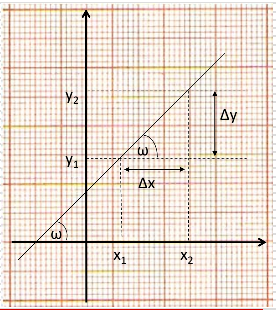
$$y = ax$$



Η γραμμική συνάρτηση

- Ο συντελεστής α ονομάζεται **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας και ισχύει

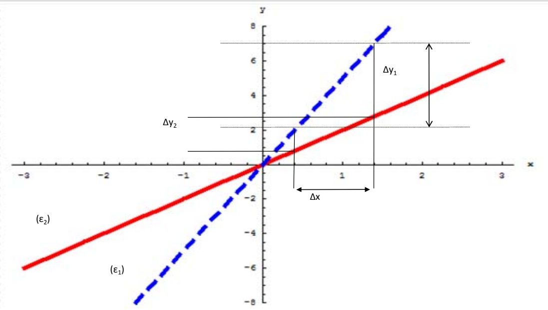
$$\alpha = \tan\omega = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Η γραμμική συνάρτηση

- Η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x ονομάζεται **γωνία κλίσης** της ευθείας και κατ' επέκταση ο συντελεστής διεύθυνσης αναφέρεται και ως **κλίση της ευθείας**.
- Από γεωμετρικής άποψης ο συντελεστής διεύθυνσης καθορίζει πλήρως τη διεύθυνση της ευθείας. Δηλαδή, κάπως πιο ελεύθερα μπορούμε να πούμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης 'τοποθετεί' την ευθεία στο χώρο.
- Στις γραφικές παραστάσεις των νόμων της Φυσικής η κλίση μιας ευθείας έχει μια συγκεκριμένη φυσική σημασία: παριστάνει το **ρυθμό μεταβολής** του μεγέθους y ως προς το x. Δηλαδή μας δείχνει πόσο γρήγορα μεταβάλλεται (αυξάνεται ή μειώνεται) αυτό το μέγεθος σε σχέση με τις μεταβολές της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Για τον ρυθμό μεταβολής



Η γραμμική συνάρτηση

- Αν θεωρήσουμε δύο ευθείες, τότε για τη σχετική θέση τους αποδεικνύεται ότι:

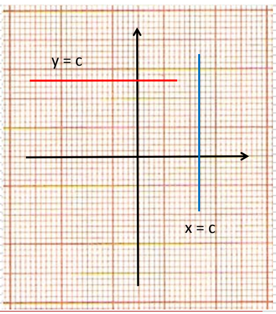
$$(\varepsilon_1):\ y = \alpha_1 x + \beta_1$$

$$(\varepsilon_2):\ y = \alpha_2 x + \beta_2$$

  - αν οι συντελεστές διεύθυνσης τους είναι ίσοι μεταξύ τους τότε οι ευθείες αυτές είναι **παράλληλες** μεταξύ τους, και $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
  - αν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης τους είναι ίσο με -1 τότε οι ευθείες είναι **κάθετες** μεταξύ τους. $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

Η γραμμική συνάρτηση

- Δυο ιδιαίτερες περιπτώσεις ευθειών είναι οι συναρτήσεις **x = c** και **y = c**.
- Η πρώτη παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη προς τον άξονα y και τέμνει τον άξονα x στο σημείο (c, 0). Όταν c = 0, η ευθεία προφανώς ταυτίζεται με τον άξονα y.
- Η συνάρτηση y = c παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη προς τον άξονα x και τέμνει τον άξονα y στο σημείο (0, c). Όταν c = 0, η ευθεία προφανώς ταυτίζεται με τον άξονα x.
- Η συνάρτηση y = c έχει ένα πολύ απλό νόημα. Το μέγεθος y έχει μια σταθερή τιμή (= c) ανεξάρτητα από την τιμή που έχει η ανεξάρτητη μεταβλητή x. Αυτό σημαίνει ότι πρακτικά το 'εξαρτώμενο' μέγεθος δεν εξαρτάται από το x.

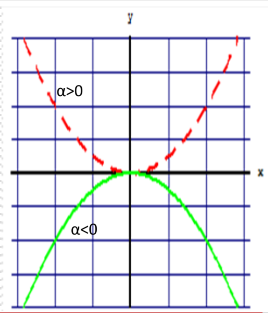


Η συνάρτηση y = αx²

- Η συνάρτηση

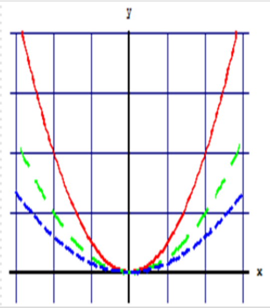
$$y = ax^2$$

είναι δευτέρου βαθμού και η γραφική της παράσταση είναι μια **παραβολή** που διέρχεται από την αρχή των αξόνων



Η συνάρτηση y = αx²

- Στην Εικόνα βλέπουμε την επίδραση που έχει η τιμή της παραμέτρου α στη γραφική παράσταση.
- Οι διάφορες γραφικές παραστάσεις αντιστοιχούν σε τρεις τιμές, για τις οποίες ισχύει: $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$
- (θεωρούμε μόνο την περίπτωση α > 0, για αρνητικές τιμές της παραμέτρου η κατάσταση είναι εντελώς συμμετρική).

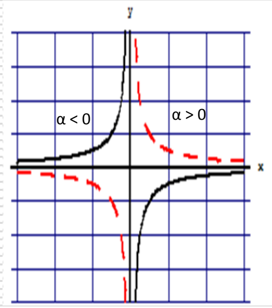


Η συνάρτηση y = α/x

- Η συνάρτηση που περιγράφεται από την εξίσωση

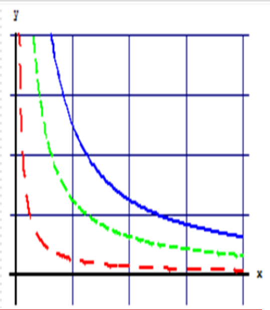
$$y = \frac{a}{x}$$

- παριστάνει μια **υπερβολή** και η γραφική της παράσταση φαίνεται στην Εικόνα. Όπως παρατηρούμε, η γραφική της παράσταση αποτελείται από δύο κλάδους οι οποίοι για α > 0 βρίσκονται ο ένας στο 1ο **τεταρτημόριο** και ο άλλος στο 3ο.



Η συνάρτηση y = α/x

- Στην Εικόνα βλέπουμε την επίδραση που έχει η τιμή της παραμέτρου α στη γραφική παράσταση.
- Οι διάφορες γραφικές παραστάσεις αντιστοιχούν σε τρεις τιμές, για τις οποίες ισχύει: $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$
- (θεωρούμε μόνο την περίπτωση α > 0 – επίσης φαίνεται μόνο ο ένας κλάδος της γραφικής παράστασης).



Η εκθετική συνάρτηση y = αˣ

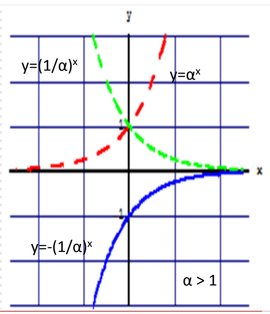
- Από τις πιο χρήσιμες και ευρέως χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις είναι η **εκθετική συνάρτηση** η οποία δίνεται από τη σχέση

$$y = a^x$$

με α>0 και α≠1.

Η εκθετική συνάρτηση y = αˣ

- Είναι αύξουσα για α > 1 και φθίνουσα για 0 < α < 1. Επίσης διέρχεται από το σημείο (0, 1).
- Έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Οx προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά αν 0 < α < 1 ή α > 1 αντίστοιχα.
- Στην Εικόνα βλέπουμε μια ενδεικτική γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης για α > 1.
- Η πιο συνηθισμένες περιπτώσεις αντιστοιχούν στις εκθετικές συναρτήσεις με βάσεις: 10 και e (= 2.71828182845904523…).
- Η εκθετική συνάρτηση είναι αντίστροφη της λογαριθμικής.



Ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης

- Η εκθετική συνάρτηση έχει τις εξής (βασικές) ιδιότητες:

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \qquad \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$

$$\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2} \qquad a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

Η λογαριθμική συνάρτηση y = log$_a$x

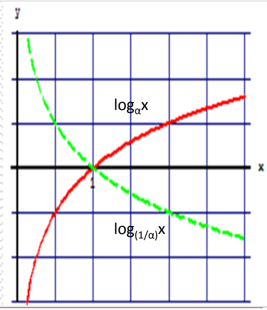
- Η λογαριθμική συνάρτηση με βάση α είναι η αντίστροφη της εκθετικής (με βάση α) και συμβολίζεται ως

$$y = \log_a x$$

με α > 0 και α ≠ 0.

Η λογαριθμική συνάρτηση y = log$_a$x

- Είναι αύξουσα για α > 1 και φθίνουσα για 0 < α < 1 και διέρχεται από το σημείο (1, 0).
- Έχει ασύμπτωτο τον άξονα Oy προς τα πάνω ή προς τα κάτω αν 0 < α < 1 ή α > 1 αντίστοιχα.
- Στην Εικόνα βλέπουμε μια ενδεικτική γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης για α > 1.



Η λογαριθμική συνάρτηση y = log$_a$x

- Αν α = e (=2.7182818284590452353…) που είναι η **φυσική βάση των λογαρίθμων**, τότε γράφουμε

$$\ln x = \log_e x$$

και μιλάμε για τον **φυσικό** ή **νεπέριο λογάριθμο** ενώ για α = 10 ορίζεται ο **δεκαδικός λογάριθμος**:

$$\log x = \log_{10} x$$

Ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης

$$\log_a a^x = x$$

$$b^{\log_b x} = x$$

$$\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_a x^d = d \cdot \log_a x$$

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

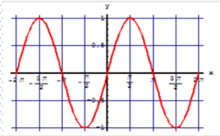
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Όταν λέμε τριγωνομετρικές συναρτήσεις εννοούμε τις γνωστές συναρτήσεις:
  - του ημιτόνου: $y = \sin x$
  - του συνημίτονου: $y = \cos x$
  - της εφαπτομένης: $y = \tan x$
  - της συνεφαπτομένης: $y = \cot x$

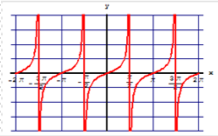
Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

- Στις σημειώσεις αυτές ο συμβολισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και αριθμών είναι ο παραπάνω αναγραφόμενος ο οποίος συμπίπτει με τον **διεθνή** συμβολισμό.
- Στα περισσότερα ελληνικά έντυπα χρησιμοποιείται ένας "ιδιότυπος" συμβολισμός για τον οποίο υπάρχει η εξής αντιστοίχιση:
  - για το ημίτονο: $\sin \leftrightarrow \eta\mu$
  - για το συνημίτονο: $\cos \leftrightarrow \sigma\upsilon\nu$
  - για την εφαπτομένη: $\tan \leftrightarrow \varepsilon\varphi$
  - για την συνεφαπτομένη: $\cot \leftrightarrow \sigma\varphi$

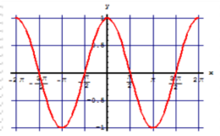
Γραφικές παραστάσεις



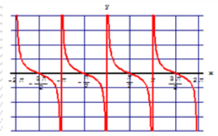
y = sin x



y = tan x

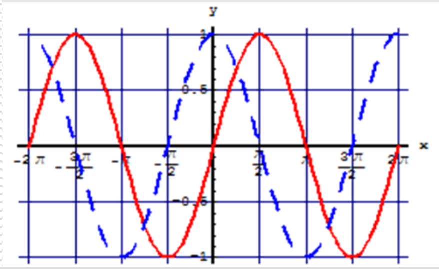


y = cos x



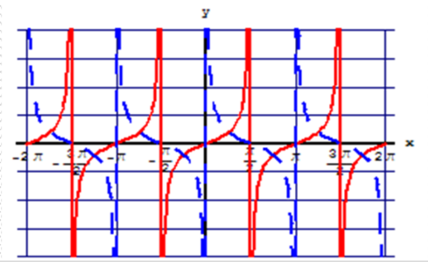
y = cotx

Γραφικές παραστάσεις



Σύγκριση γραφικών παραστάσεων ημιτόνου & συνημίτονου

Γραφικές παραστάσεις



Σύγκριση γραφικών παραστάσεων εφαπτομένης & συνεφαπτομένης

Ιδιότητες

- Όπως μπορούμε να δούμε από τις γραφικές παραστάσεις, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι **περιοδικές** με τις εξής περιοδικότητες:

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \qquad \tan(x+k\pi)=\tan x$$

$$\cos(x+2k\pi)=\cos x \qquad \cot(x+k\pi)=\cot x$$

$$\mu\varepsilon\ \ k\in\mathbb{Z},\ \delta\eta\lambda.\ \ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$$

Ιδιότητες

- Επιπλέον ισχύουν

$$-1\le\sin x\le+1 \qquad -1\le\cos x\le+1$$

Δηλαδή το ημίτονο και το συνημίτονο είναι περιορισμένα απ' αυτές τις τιμές.

- Αντίθετα, οι άλλες συναρτήσεις δεν έχουν κάποιον περιορισμό:

$$-\infty\le\tan x\le+\infty \qquad -\infty\le\cot x\le+\infty$$

Ιδιότητες

- Επίσης, το συνημίτονο είναι **άρτια** συνάρτηση ενώ οι υπόλοιπες **περιττές**:

$$\cos(-x)=\cos x \qquad \sin(-x)=-\sin x$$

$$\tan(-x)=-\tan x \qquad \cot(-x)=-\cot x$$

Βασικές σχέσεις

- Ανάμεσα στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ισχύουν οι παρακάτω βασικές σχέσεις:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cot x} \qquad \frac{1}{\sin^2 x} - \cot^2 x = 1$$

Αθροίσματα & διαφορές τόξων

- Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων αθροίσματος και διαφοράς τόξων χρησιμοποιούμε τις εξής σχέσεις:

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y} \qquad \cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cdot \cot y \mp 1}{\cot x \pm \cot y}$$

Αποτετραγωνισμός

- Οι βασικές σχέσεις αποτετραγωνισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Αθροίσματα τριγ/κων συν/σεων

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$$

Διαφορές τριγ/κων συν/σεων

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{y-x}{2}$$

Γινόμενα τριγ/κων συν/σεων

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) - \cos(x+y)\}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x-y) + \cos(x+y)\}$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\{\sin(x-y) + \sin(x+y)\}$$

Διπλή & τριπλή γωνία

- Διπλή γωνία

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = $$
$$= 1 - 2\sin^2 x =$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

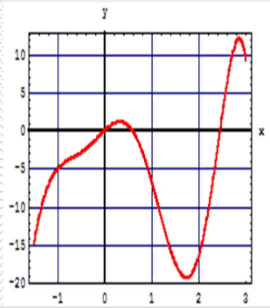
- Τριπλή γωνία

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Μελέτη γραφικών παραστάσεων

- Από μια γραφική παράσταση παίρνουμε περισσότερο **ποιοτικές** παρά **ποσοτικές** πληροφορίες.
- Θα δούμε πως μπορούμε να "διαβάσουμε" μια γραφική παράσταση, δηλ. πως μπορούμε να πάρουμε αυτές τις πληροφορίες.

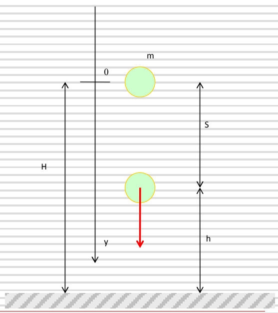


Δημιουργία γραφικών παραστάσεων

- Σώμα μάζας m = 2 kg αφήνεται από ύψος H = 80 m από την επιφάνεια της γης.
- Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις
  - του **διαστήματος** που έχει διανύσει το σώμα,
  - του **ύψους** στο οποίο βρίσκεται και
  - της **κινητικής του ενέργειας**

σε συνάρτηση με το **χρόνο**.

- Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$.



Δημιουργία γραφικών παραστάσεων

- Για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε τις ζητούμενες γραφικές παραστάσεις θα πρέπει να βρούμε τις σχέσεις που συνδέουν τα διάφορα μεγέθη με την ανεξάρτητη μεταβλητή (t).
- Όπως θα μάθουμε παρακάτω, η κίνηση του σώματος σ᾽ αυτή την περίπτωση είναι ελεύθερη πτώση από ύψος H.
- Άρα μιλάμε για μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση μέτρου $g = 10\ m/s^2$ και αρχική ταχύτητα μέτρου $u_0 = 0$.

Δημιουργία γραφικών παραστάσεων

- Συνεπώς, το διάστημα που διανύει το σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση

$$S(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

- Στη σχέση αυτή το g είναι σταθερά (άρα αποκλείεται να εξαρτάται από τον χρόνο) και συνεπώς δεν χρειάζεται να κάνουμε τίποτε άλλο. Έχουμε βρει τη ζητούμενη σχέση.

Δημιουργία γραφικών παραστάσεων

- Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τα όρια των μεταβλητών για τα οποία θα κάνουμε τη γραφική παράσταση.
- Συνήθως στη φυσική επιλέγουμε ως αρχή μέτρησης του χρόνου τη χρονική στιγμή 0 οπότε σίγουρα θα είναι t ≥ 0.
- Επίσης, το φαινόμενο εξελίσσεται μέχρι το σώμα να φτάσει στο έδαφος.
- Τη χρονική αυτή στιγμή μπορούμε να την υπολογίσουμε αν στην προηγούμενη εξίσωση θέσουμε S = H (γιατί;) και λύσουμε ως προς $t_{ολ}$:

$$S(t_{ολ}) = H \Rightarrow$$

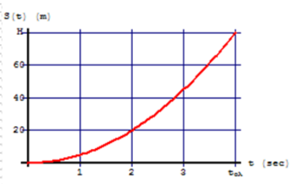
$$\frac{1}{2}gt_{ολ}^2 = \mathrm{H} \Rightarrow$$

$$t_{ολ} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow$$

$$t_{ολ} = \sqrt{\frac{2\cdot(80m)}{10m/s^2}} = 4s$$

Δημιουργία γραφικών παραστάσεων

- Άρα τελικά θα πρέπει $0 \le t \le 4$ s. Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορες τιμές του διαστήματος S(t) για διάφορες τιμές του χρόνου t και να κάνουμε τη γραφική παράσταση που φαίνεται δίπλα.

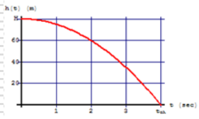


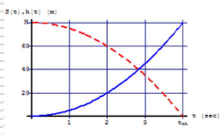
Δημιουργία γραφικών παραστάσεων

- Το επόμενο ζητούμενο είναι να κατασκευάσουμε την γραφική παράσταση του ύψους h στο οποίο βρίσκεται το σώμα καθώς κινείται. Βλέπουμε ότι το ύψος μπορούμε να το υπολογίσουμε από τη σχέση
  h = H – S
- Το αρχικό ύψος H είναι σταθερό ενώ το διάστημα S εξαρτάται από το χρόνο. Αντικαθιστώντας λοιπόν τη συνάρτηση που μας δίνει το διάστημα βρίσκουμε την εξάρτηση του ύψους από τον χρόνο:

$$h(t) = H - S(t) \Rightarrow$$

$$h(t) = H - \frac{1}{2}gt^2$$





Δημιουργία γραφικών παραστάσεων

- Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της κινητικής ενέργειας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.
- Η κινητική ενέργεια δίνεται από τη σχέση

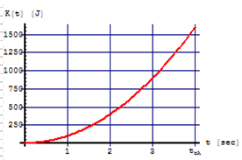
$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$$

- όπου υ το μέτρο της ταχύτητας του σώματος.
- Εκ πρώτης όψεως θα μπορούσε να πει κανείς ότι η κινητική ενέργεια δεν εξαρτάται από το χρόνο. Όμως αυτή η εξάρτηση εισάγεται μέσω της ταχύτητας αφού στην προκειμένη περίπτωση η ταχύτητα υπολογίζεται από τη σχέση

$$\upsilon = gt$$

$$K(t) = \frac{1}{2}m[\upsilon(t)]^2 \Rightarrow$$

$$K(t) = \frac{1}{2}mg^2t^2$$

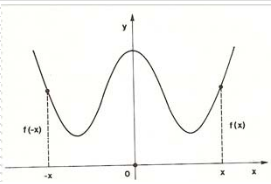


Δημιουργία γραφικών παραστάσεων

- Μπορείτε να "αποδείξετε" ότι η γραφική παράσταση της **κινητικής ενέργειας** του σώματος σε συνάρτηση με το **ύψος** (h) στο οποίο βρίσκεται το σώμα είναι αυτή που φαίνεται δίπλα;

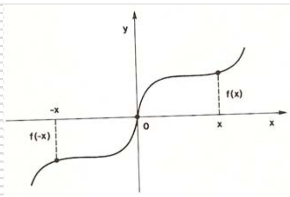
Πράξεις με γραφικές παραστάσεις

- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy.



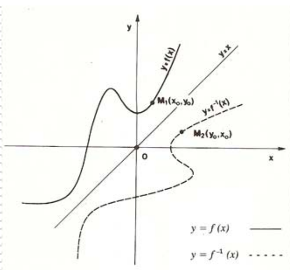
Πράξεις με γραφικές παραστάσεις

- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.



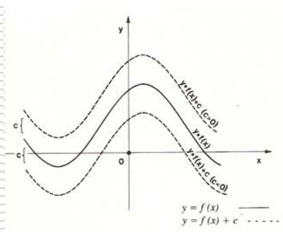
Πράξεις με γραφικές παραστάσεις

- Η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης είναι μια καμπύλη συμμετρική της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ως προς την πρώτη διχοτόμο των αξόνων.



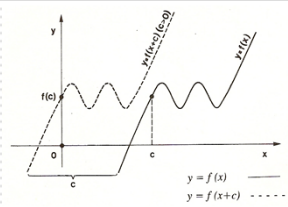
Πράξεις με γραφικές παραστάσεις

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = f(x) + c προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f(x) με παράλληλη μεταφορά κατά c ως προς τη διεύθυνση του άξονα y.



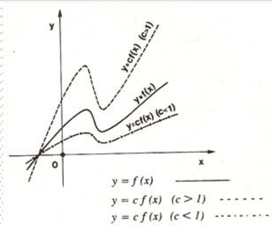
Πράξεις με γραφικές παραστάσεις

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης y = f(x + c) προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f(x) με παράλληλη μεταφορά κατά -c ως προς τη διεύθυνση του άξονα x.



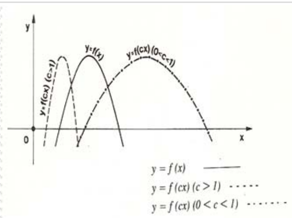
Πράξεις με γραφικές παραστάσεις

- Η γραφική παράσταση της y = c·f(x) προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f(x) με μια απομάκρυνση από τον άξονα x με συντελεστή c όταν c > 1 ή μ' ένα πλησίασμα στον άξονα x με συντελεστή c όταν 0 < c < 1.



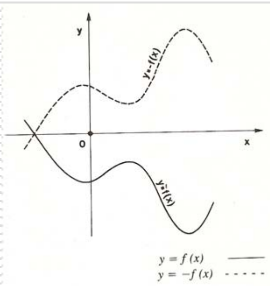
Πράξεις με γραφικές παραστάσεις

- Η γραφική παράσταση της y = f(c·x) προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f(x) με μια απομάκρυνση από τον άξονα y με συντελεστή c όταν 0 < c < 1 ή μ' ένα πλησίασμα στον άξονα y με συντελεστή c όταν c > 1.



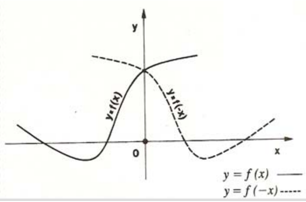
Πράξεις με γραφικές παραστάσεις

- Η γραφική παράσταση της y = -f(x) είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της y = f(x) ως προς τον άξονα x.



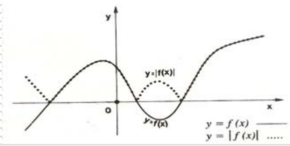
Πράξεις με γραφικές παραστάσεις

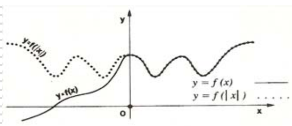
- Η γραφική παράσταση της y = f(-x) είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της y = f(x) ως προς τον άξονα y.



Πράξεις με γραφικές παραστάσεις

- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων y = |f(x)| και y = f(|x|) προκύπτουν από τη γραφική παράσταση της y = f(x) βασισμένοι στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις.





Προσδιορισμός & γραφική παράσταση της σχέσης δύο φυσικών μεγεθών

- **Για να προσδιορίσουμε τη σχέση y = f(x) που συνδέει τα φυσικά μεγέθη x, y σ' ένα πρόβλημα Φυσικής, εργαζόμαστε ως εξής:**

1. Θεωρούμε το σώμα σε μια τυχαία θέση. Κατασκευάζουμε ένα απλό σχέδιο και σημειώνουμε πάνω σ' αυτό τα δοσμένα και τα ζητούμενα μεγέθη.
2. Για την τυχαία θέση του σώματος, γράφουμε τη σχέση ορισμού του μεγέθους y ή τον κατάλληλο νόμο της Φυσικής που περιέχει το μέγεθος y.
3. Όταν χρειάζεται, μετασχηματίζουμε την αρχική σχέση ώστε τελικά να περιέχει σαν μόνα μεταβλητά μεγέθη τα x και y (τα υπόλοιπα μεγέθη πρέπει να είναι σταθερά). Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε σχέσεις που προκύπτουν από το σχήμα ή άλλες γνωστές σχέσεις της Φυσικής.
4. Καθορίζουμε τις τιμές που μπορεί να πάρει το μέγεθος x (ανεξάρτητη μεταβλητή).

Προσδιορισμός & γραφική παράσταση της σχέσης δύο φυσικών μεγεθών

- **Για να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της σχέσης y = f(x), εργαζόμαστε ως εξής:**

1. Δίνουμε τιμές στην ανεξάρτητη μεταβλητή x και βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y. Γράφουμε σ' ένα πίνακα τιμών τα ζεύγη (x, y).
2. Εκλέγουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αναφοράς xy και βαθμολογούμε τους άξονες.
3. Επειδή τα x, y είναι διαφορετικά φυσικά μεγέθη με διαφορετική μονάδα μέτρησης, μπορούμε να καθορίσουμε διαφορετικό μοναδιαίο διάστημα σε κάθε άξονα (δηλ. το xy δεν είναι ορθοκανονικό).
4. Μεταφέρουμε στο επίπεδο των αξόνων τα ζεύγη (x, y) του πίνακα τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή. Η γραμμή αυτή είναι η γραφική παράσταση της σχέσης y = f(x).

