Γενική Φυσική

Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
Φυσικός – Ραδιοηλεκτρολόγος (MSc)
2ο Γενικό Λύκειο Καστοριάς

Καστοριά, Ιούλιος 14

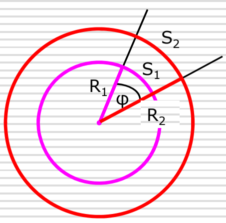
Γενική Φυσική

Α. Μαθηματική Εισαγωγή

- Πράξεις με αριθμούς σε εκθετική μορφή
- Επίλυση βασικών μορφών εξισώσεων
- Συναρτήσεις
- **Στοιχεία τριγωνομετρίας**
- Διανύσματα

Μέτρηση γωνιών

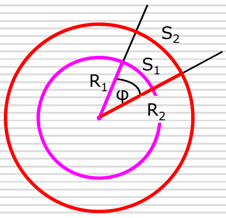
- Έστω η γωνία φ που φαίνεται στο σχήμα.
- Αν η φ γίνει επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας R_1, αποκόπτει τόξο μήκους S_1.
- Αν η φ γίνει επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας R_2, αποκόπτει τόξο μήκους S_2.



Μέτρηση γωνιών

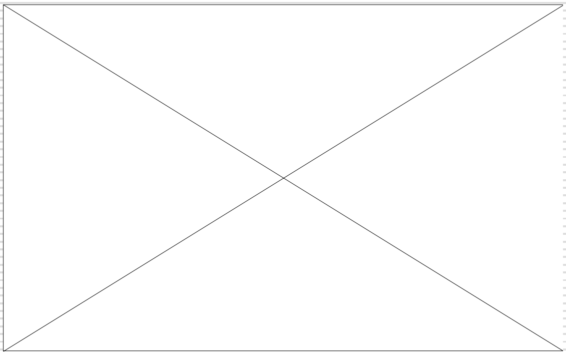
- Η γωνία φ (μετρημένη σε ακτίνια) δίνεται από τη σχέση:

$$\phi = \frac{S}{R}$$



- Προσέξτε ότι ως λόγος δύο μηκών, η γωνία είναι αδιάστατο μέγεθος.
- Για πρακτικούς όμως λόγους τη μετράμε σε ακτίνια [rad].

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 | 5 – Στοιχεία Τριγωνομετρίας © Κωνσταντίνος Χ. Παύλου | 5-4



25-Ιουλ-14 | (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου | 5

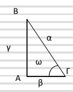
Ορισμοί τριγ/κων αριθμών

$$ημίτονο = \frac{Απέναντι\ κάθετη\ πλευρά}{Υποτείνουσα} \qquad \sin\omega = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$συνημίτονο = \frac{Προσκείμενη\ κάθετη\ πλευρά}{Υποτείνουσα} \qquad \cos\omega = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$εφαπτομένη = \frac{Απέναντι\ κάθετη\ πλευρά}{Προσκείμενη\ κάθετη\ πλευρά} \qquad \tan\omega = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$συνεφαπτομένη = \frac{Προσκείμενη\ κάθετη\ πλευρά}{Απέναντι\ κάθετη\ πλευρά} \qquad \cot\omega = \frac{\beta}{\gamma}$$



Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 | A - 6 | A . Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Τριγ/κοι αριθμοί μερικών γωνιών

x	0	15°	18°	30°	36°	45°	54°	60°	72°	75°	90°
	0	π/12	π/10	π/6	π/5	π/4	3π/10	π/3	2π/5	5π/12	π/2
$\sin x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	1	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$	*
$\cot x$	*	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	1	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	0

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 A - 7 Α . Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Αναγωγή τριγ. αριθμών

α	ημα	συνα	εφα	σφα
$-x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$
$\pi-x$	$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$
$\frac{\pi}{2}-x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$\sigma\phi x$	$\varepsilon\phi x$
$\pi+x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$\varepsilon\phi x$	$\sigma\phi x$
$\frac{\pi}{2}+x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\phi x$	$-\varepsilon\phi x$
$\frac{3\pi}{2}+x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$-\sigma\phi x$	$-\varepsilon\phi x$
$\frac{3\pi}{2}-x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\phi x$	$\sigma\phi x$
$2\pi-x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$

- Όταν δυο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά 0, π, 2π έχουν ομώνυμους τριγωνομετρικούς αριθμούς, ενώ όταν έχουν άθροισμα ή διαφορά π/2 ή 3π/2 οι τριγωνομετρικοί τους αριθμοί εναλλάσσονται μεταξύ τους (ημ με συν και εφ με σφ) - (και εντιστρόφως).
- Το πρόσημο, για τη γωνία που έχει τη μορφή kπ ± x ή k(π/2) ± x με k = 0, ±1, ±2,... καθορίζεται από το τεταρτημόριο στο οποίο λήγει, αν υποτεθεί ότι 0<x<(π/2).

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 5 – Στοιχεία Τριγωνομετρίας © Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 5-8

Αναγωγή τριγ. αριθμών (πχ)

$$\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}=?$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=?$$

$$=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

α	ημα	συνα	εφα	σφα
$-x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$
$\pi-x$	$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$
$\frac{\pi}{2}-x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$\sigma\phi x$	$\varepsilon\phi x$
$\pi+x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$\varepsilon\phi x$	$\sigma\phi x$
$\frac{\pi}{2}+x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\phi x$	$-\varepsilon\phi x$
$\frac{3\pi}{2}+x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$-\sigma\phi x$	$-\varepsilon\phi x$
$\frac{3\pi}{2}-x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\phi x$	$\sigma\phi x$
$2\pi-x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 5 – Στοιχεία Τριγωνομετρίας © Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 5-9

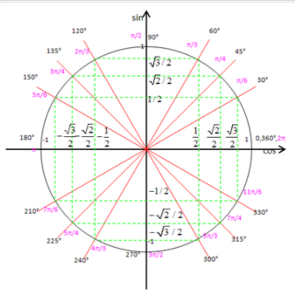
Αναγωγή τριγ/κών αριθμών

- **Για την απομνημόνευση των παραπάνω σχέσεων χρησιμοποιούμε τον εξής μνημονικό κανόνα:**
  - Όταν δυο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά 0, π, 2π έχουν ομώνυμους τριγωνομετρικούς αριθμούς, ενώ όταν έχουν άθροισμα ή διαφορά π/2 ή 3π/2 οι τριγωνομετρικοί τους αριθμοί εναλλάσσονται μεταξύ τους sin ↔ cos και tan ↔ cot.
  - Το πρόσημο, για τη γωνία που έχει τη μορφή kπ ± x ή kπ/2 ± x, καθορίζεται από το τεταρτημόριο στο οποίο λήγει, αν υποτεθεί ότι 0 < x < π/2.

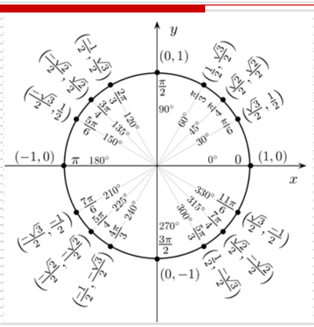
Γενική Φυσική Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 | A - 10 | Α . Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Ο τριγ/κος κύκλος

- Ο τριγωνομετρικός κύκλος με ορισμένες χαρακτηριστικές τιμές που συναντάμε πολύ συχνά στις διάφορες εφαρμογές.

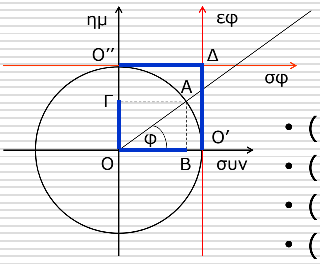


Γενική Φυσική Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 | A - 11 | Α . Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

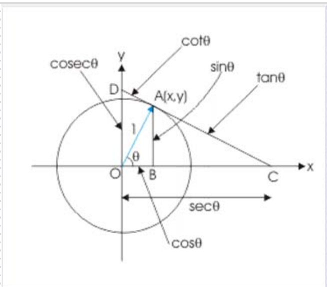


Γενική Φυσική Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 | 1 - Εισαγωγή © Κωνσταντίνος Χ. Παύλου | 1-12

Άξονες τριγ/κων αριθμών



- (ΟΒ)=cos(φ)
- (ΟΓ)=sin(φ)
- (Ο'Δ)=tan(φ)
- (Ο''Δ)=cot(φ)



Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

- Πολλές φορές είμαστε αναγκασμένοι να λύσουμε μια εξίσωση στην οποία ο άγνωστος βρίσκεται μέσα σε κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό.
- Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **τριγωνομετρικές εξισώσεις**.
- Παράδειγμα: Για ποια τιμή του χρόνου t είναι x=2,5;

$$x = 5\eta\mu\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$$

Βασικές εξισώσεις

Εξισώσεις με το ημίτονο	Εξισώσεις με το συνημίτονο
$\eta\mu\alpha=\eta\mu\theta \Rightarrow \begin{cases}\alpha=2k\pi+\theta \\ \alpha=(2k+1)\pi-\theta\end{cases}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \begin{cases}\alpha=2k\pi+\theta \\ \alpha=2k\pi-\theta\end{cases}$
$\eta\mu\alpha=0 \Rightarrow \alpha=k\pi$	$\sigma\upsilon\nu\alpha=0 \Rightarrow \alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$
$\eta\mu\alpha=1 \Rightarrow \alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha=1 \Rightarrow \alpha=2k\pi$
$\eta\mu\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=2k\pi-\frac{\pi}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=(2k+1)\pi$

Σ' όλες τις περιπτώσεις: $k\in\mathbb{Z},\ \delta\eta\lambda\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

Βασικές εξισώσεις

Εξισώσεις με την εφαπτομένη	Εξισώσεις με την συνεφαπτομένη
$\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi\theta \Rightarrow \alpha=k\pi+\theta$	$\sigma\varphi\alpha=\sigma\varphi\theta \Rightarrow \alpha=k\pi+\theta$
$\varepsilon\varphi\alpha=0 \Rightarrow \alpha=k\pi$	$\sigma\varphi\alpha=0 \Rightarrow \alpha=k\pi+\frac{\pi}{2}$

Σ' όλες τις περιπτώσεις: $k\in\mathbb{Z},\ \delta\eta\lambda\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$

Παράδειγμα

- Αν $x=5\eta\mu\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$ για ποια τιμή του χρόνου t είναι x=2,5;

$$2,5=5\eta\mu\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\frac{2,5}{5}=\eta\mu\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\frac{1}{2}=\eta\mu\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow$$

$$\eta\mu\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow=\eta\mu\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2t+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ 2t+\frac{\pi}{4}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=k\pi-\frac{\pi}{24}\\ t=k\pi+\frac{7}{24}\end{cases},\ \mu\varepsilon\ k\in\mathbb{Z},\ \delta\eta\lambda\ k\ =\ 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Παράδειγμα

- Αν $x=5\eta\mu\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$ για ποια τιμή του χρόνου t είναι x=2,5;

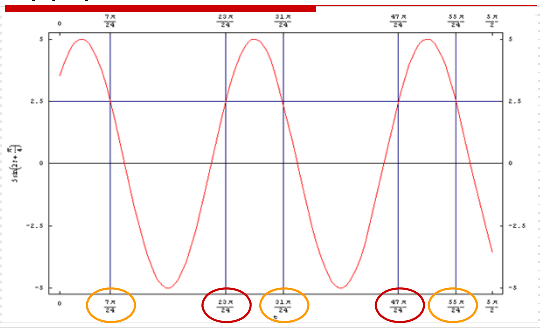
$$2,5=5\eta\mu\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}t=k\pi-\frac{\pi}{24}\\ t=k\pi+\frac{7}{24}\end{cases}\text{με } k\in\mathbb{Z},\ \text{δηλ } k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=k\pi-\frac{\pi}{24}\\ t=k\pi+\frac{7}{24}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ldots,\cancel{t=-\frac{49\pi}{24}},\cancel{t=-\frac{25\pi}{24}},\cancel{t=-\frac{\pi}{24}},t=\frac{23\pi}{24},t=\frac{47\pi}{24},\ldots\\ \ldots,\cancel{t=-\frac{41\pi}{24}},\cancel{t=-\frac{17\pi}{24}},t=\frac{7\pi}{24},t=\frac{31\pi}{24},t=\frac{55\pi}{24},\ldots\end{cases}$$

(για $k=\ldots,-2,-1,0,+1,+2,\ldots$ $\alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha$)

Γενική Φυσική 5 – Στοιχεία Τριγωνομετρίας 5-19
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 © Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Ερμηνεία των λύσεων...



Γενική Φυσική 5 – Στοιχεία Τριγωνομετρίας 5-20
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 © Κωνσταντίνος Χ. Παύλου