Γενική Φυσική

Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
Φυσικός – Ραδιοηλεκτρολόγος (MSc)
2ο Γενικό Λύκειο Καστοριάς

Καστοριά, Ιούλιος 14

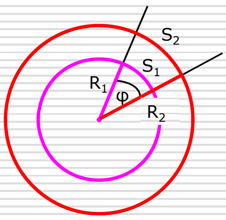
Γενική Φυσική

Α. Μαθηματική Εισαγωγή

- Πράξεις με αριθμούς σε εκθετική μορφή
- Επίλυση βασικών μορφών εξισώσεων
- Συναρτήσεις
- **Στοιχεία τριγωνομετρίας**
- Διανύσματα

Μέτρηση γωνιών

- Έστω η γωνία φ που φαίνεται στο σχήμα.
- Αν η φ γίνει επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας R_1, αποκόπτει τόξο μήκους S_1.
- Αν η φ γίνει επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας R_2, αποκόπτει τόξο μήκους S_2.

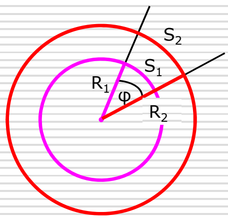


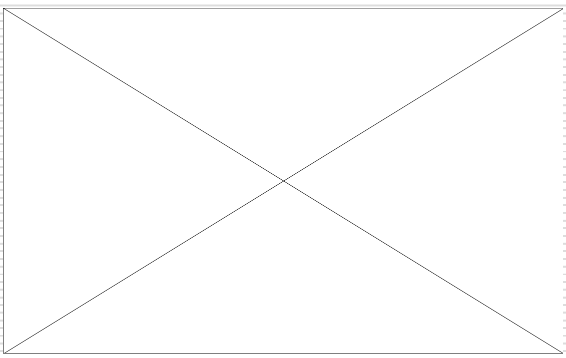
Μέτρηση γωνιών

- Η γωνία φ (μετρημένη σε ακτίνια) δίνεται από τη σχέση:

$$\phi = \frac{S}{R}$$

- Προσέξτε ότι ως λόγος δύο μηκών, η γωνία είναι αδιάστατο μέγεθος.
- Για πρακτικούς όμως λόγους τη μετράμε σε ακτίνια [rad].





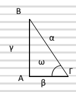
Ορισμοί τριγ/κων αριθμών

$$\eta\mu\acute{\iota}\tau o\nu o = \frac{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{Υποτείνουσα}} \qquad \sin\omega = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\eta\mu\acute{\iota}\tau o\nu o = \frac{\text{Προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{Υποτείνουσα}} \qquad \cos\omega = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta = \frac{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{Προσκείμενη κάθετη πλευρά}} \qquad \tan\omega = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta = \frac{\text{Προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{Απέναντι κάθετη πλευρά}} \qquad \cot\omega = \frac{\beta}{\gamma}$$



Τριγ/κοι αριθμοί μερικών γωνιών

x	0	15°	18°	30°	36°	45°	54°	60°	72°	75°	90°
	0	π/12	π/10	π/6	π/5	π/4	3π/10	π/3	2π/5	5π/12	π/2
sin x	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	0
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	1	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$	*
cot x	*	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	1	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$	0

Αναγωγή τριγ. αριθμών

α	ημα	συνα	εφα	σφα
$-x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$
$\pi-x$	$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$
$\frac{\pi}{2}-x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$\sigma\phi x$	$\varepsilon\phi x$
$\pi+x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$\varepsilon\phi x$	$\sigma\phi x$
$\frac{\pi}{2}+x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\phi x$	$-\varepsilon\phi x$
$\frac{3\pi}{2}+x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$-\sigma\phi x$	$-\varepsilon\phi x$
$\frac{3\pi}{2}-x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\phi x$	$\sigma\phi x$
$2\pi-x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$

- Όταν δυο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά 0, π, 2π έχουν ομώνυμους τριγωνομετρικούς αριθμούς, ενώ όταν έχουν άθροισμα ή διαφορά π/2 ή 3π/2 οι τριγωνομετρικοί τους αριθμοί εναλλάσσονται μεταξύ τους (ημ με συν και εφ με σφ) - (και εντιστρόφως).
- Το πρόσημο, για τη γωνία που έχει τη μορφή kπ ± x ή k(π/2) ± x με k = 0, ±1, ±2,... καθορίζεται από το τεταρτημόριο στο οποίο λήγει, αν υποτεθεί ότι 0<x<(π/2).

Αναγωγή τριγ. αριθμών (πχ)

$$\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}=?$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=?$$

$$=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

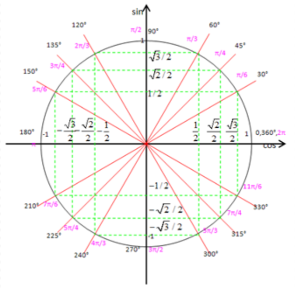
α	ημα	συνα	εφα	σφα
$-x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$
$\pi-x$	$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$
$\frac{\pi}{2}-x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$\sigma\phi x$	$\varepsilon\phi x$
$\pi+x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$\varepsilon\phi x$	$\sigma\phi x$
$\frac{\pi}{2}+x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$-\sigma\phi x$	$-\varepsilon\phi x$
$\frac{3\pi}{2}+x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$	$-\sigma\phi x$	$-\varepsilon\phi x$
$\frac{3\pi}{2}-x$	$-\sigma\upsilon\nu x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\phi x$	$\sigma\phi x$
$2\pi-x$	$-\eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu x$	$-\varepsilon\phi x$	$-\sigma\phi x$

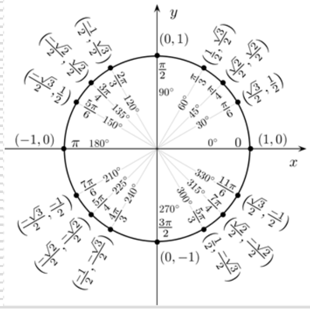
Αναγωγή τριγ/κών αριθμών

- **Για την απομνημόνευση των παραπάνω σχέσεων χρησιμοποιούμε τον εξής μνημονικό κανόνα:**
  - Όταν δυο τόξα έχουν άθροισμα ή διαφορά 0, π, 2π έχουν ομώνυμους τριγωνομετρικούς αριθμούς, ενώ όταν έχουν άθροισμα ή διαφορά π/2 ή 3π/2 οι τριγωνομετρικοί τους αριθμοί εναλλάσσονται μεταξύ τους sin ↔ cos και tan ↔ cot.
  - Το πρόσημο, για τη γωνία που έχει τη μορφή kπ ± x ή kπ/2 ± x, καθορίζεται από το τεταρτημόριο στο οποίο λήγει, αν υποτεθεί ότι 0 < x < π/2.

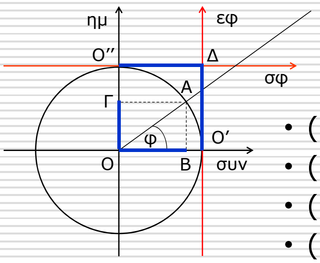
Ο τριγ/κος κύκλος

- Ο τριγωνομετρικός κύκλος με ορισμένες χαρακτηριστικές τιμές που συναντάμε πολύ συχνά στις διάφορες εφαρμογές.



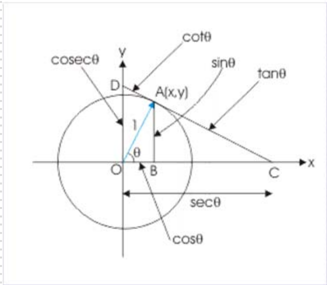


Άξονες τριγ/κων αριθμών



- (ΟΒ)=cos(φ)
- (ΟΓ)=sin(φ)
- (Ο'Δ)=tan(φ)
- (Ο''Δ)=cot(φ)

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 A - 13 Α . Μαθηματική εισαγωγή Κωνσταντίνος Χ. Παύλου



Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 1 - Εισαγωγή © Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 1-14

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

- Πολλές φορές είμαστε αναγκασμένοι να λύσουμε μια εξίσωση στην οποία ο άγνωστος βρίσκεται μέσα σε κάποιον τριγωνομετρικό αριθμό.
- Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **τριγωνομετρικές εξισώσεις**.
- Παράδειγμα: Για ποια τιμή του χρόνου t είναι x=2,5;

$$x = 5\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 5 – Στοιχεία Τριγωνομετρίας © Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 5-15

Βασικές εξισώσεις

Εξισώσεις με το ημίτονο	Εξισώσεις με το συνημίτονο
$\eta\mu\alpha = \eta\mu\theta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \theta \\ \alpha = (2k+1)\pi - \theta \end{cases}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi + \theta \\ \alpha = 2k\pi - \theta \end{cases}$
$\eta\mu\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\eta\mu\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi$
$\eta\mu\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = (2k+1)\pi$

Σ' όλες τις περιπτώσεις: $k \in \mathbb{Z},\ \delta\eta\lambda\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 5 – Στοιχεία Τριγωνομετρίας © Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 5-16

Βασικές εξισώσεις

Εξισώσεις με την εφαπτομένη	Εξισώσεις με την συνεφαπτομένη
$\varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\theta \Rightarrow \alpha = k\pi + \theta$	$\sigma\varphi\alpha = \sigma\varphi\theta \Rightarrow \alpha = k\pi + \theta$
$\varepsilon\varphi\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi$	$\sigma\varphi\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$

Σ' όλες τις περιπτώσεις: $k \in \mathbb{Z},\ \delta\eta\lambda\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 5 – Στοιχεία Τριγωνομετρίας © Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 5-17

Παράδειγμα

- Αν $x = 5\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ για ποια τιμή του χρόνου t είναι x=2,5;

$$2,5 = 5\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{2,5}{5} = \eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = \eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow = \eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2t + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = k\pi - \frac{\pi}{24} \\ t = k\pi + \frac{7}{24} \end{cases},\ \text{με } k \in \mathbb{Z},\ \text{δηλ } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014 5 – Στοιχεία Τριγωνομετρίας © Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 5-18

Παράδειγμα

- Αν $x = 5\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ για ποια τιμή του χρόνου t είναι x=2,5;

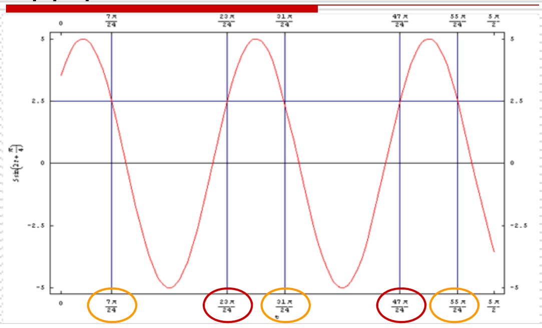
$$2,5 = 5\eta\mu\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} t = k\pi - \frac{\pi}{24} \\ t = k\pi + \frac{7}{24} \end{cases} \text{με } k \in \mathbb{Z},\ \text{δηλ } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = k\pi - \frac{\pi}{24} \\ t = k\pi + \frac{7}{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ldots, \cancel{t = -\frac{49\pi}{24}}, \cancel{t = -\frac{25\pi}{24}}, \cancel{t = -\frac{\pi}{24}}, t = \frac{23\pi}{24}, t = \frac{47\pi}{24}, \ldots \\ \ldots, \cancel{t = -\frac{41\pi}{24}}, \cancel{t = -\frac{17\pi}{24}}, t = \frac{7\pi}{24}, t = \frac{31\pi}{24}, t = \frac{55\pi}{24}, \ldots \end{cases}$$

$(\text{για } k = \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi\alpha)$

Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014
5 – Στοιχεία Τριγωνομετρίας
© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
5-19

Ερμηνεία των λύσεων…



Γενική Φυσική
Παρασκευή, 25 Ιουλίου 2014
5 – Στοιχεία Τριγωνομετρίας
© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
5-20