Γενική Φυσική

Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
Φυσικός – Ραδιοηλεκτρολόγος (MSc)
Καστοριά, Οκτώβριος 14

Συστήματα σωμάτων

1. Σύστημα & περιβάλλον (κλειστά & μονωμένα συστήματα)
2. Εσωτερικές & εξωτερικές δυνάμεις
3. Η κίνηση ενός συστήματος

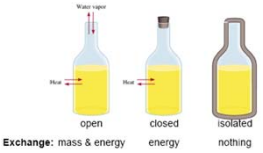
Σύστημα & περιβάλλον

- Σύστημα: Μέρος της ύλης (σύμπαντος) που το απομονώνουμε για να το μελετήσουμε.
- Περιβάλλον: Ό,τι περιβάλλει το σύστημα και επηρεάζει τη συμπεριφορά του (ή αλλιώς, ό,τι δεν ανήκει στο σύστημα…).

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Είδη συστημάτων

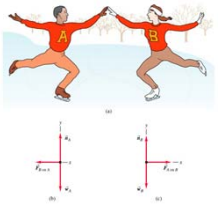
- Κλειστό: αυτό που δεν ανταλλάσσει ύλη με το περιβάλλον.
- Μονωμένο ή απομονωμένο: Αυτό που δεν αλληλεπιδρά με το περιβάλλον.



4 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Μονωμένα συστήματα

- Θυμηθείτε πως μέτρο της αλληλεπίδρασης αποτελεί η δύναμη. Άρα…
- σ' ένα μονωμένο σύστημα, δεν ασκούνται δυνάμεις από το περιβάλλον (στα σώματα του συστήματος) ή αν ασκούνται, αυτές έχουν συνισταμένη μηδέν.



Αν αγνοήσουμε τις τριβές, το σύστημα είναι μονωμένο.

- Άρα, μονωμένο σύστημα $\Rightarrow \left(\sum \vec{F}\right)_{εξωτερικές} = \vec{0}$

5 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Μονωμένα συστήματα

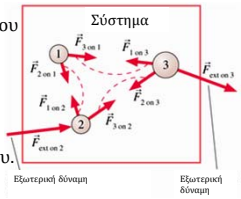
- Θα πρέπει να τονιστεί το γεγονός πως στη φύση, μονωμένα συστήματα δεν υπάρχουν.
- Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι κάποιες προσεγγίσεις στις οποίες θεωρούμε τις εξωτερικές δυνάμεις αμελητέες.

6 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

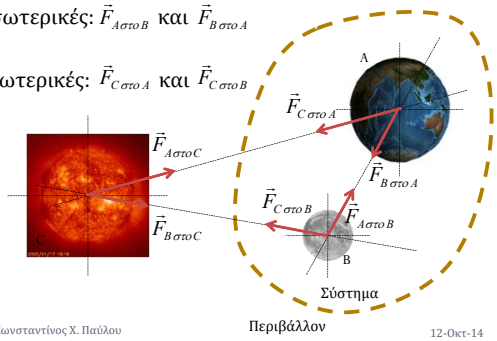
Εσωτερικές & εξωτερικές δυνάμεις

- **Εσωτερικές δυνάμεις** ενός συστήματος λέμε τις δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων του συστήματος.
- **Εξωτερικές δυνάμεις** σ' ένα σύστημα λέμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος από το περιβάλλον του.
- Οι εσωτερικές δυνάμεις "έχουν" τις αντιδράσεις τους εντός του συστήματος ενώ οι εξωτερικές εκτός.



Εσωτερικές & εξωτερικές δυνάμεις

- Εσωτερικές: $\vec{F}_{A\sigma\tau o\, B}$ και $\vec{F}_{B\sigma\tau o\, A}$
- Εξωτερικές: $\vec{F}_{C\sigma\tau o\, A}$ και $\vec{F}_{C\sigma\tau o\, B}$



Εσωτερικές & εξωτερικές δυνάμεις

- Λόγω του 3ου νόμου της κίνησης, το άθροισμα των εσωτερικών δυνάμεων ενός συστήματος είναι μηδέν:

$$\sum \vec{F}_{\varepsilon\sigma} = \underbrace{\left(\vec{F}_{A\sigma\tau o\, B} + \vec{F}_{B\sigma\tau o\, A}\right)}_{Ζεύγος\ δράσης-αντίδρασης} + \underbrace{(\ldots)}_{Ζεύγος\ \ldots} + \ldots = \vec{0}$$

- αφού **για κάθε** ζεύγος δράσης – αντίδρασης ισχύει:

$$\vec{F}_{A\sigma\tau o\, B} = -\vec{F}_{B\sigma\tau o\, A} \Rightarrow \vec{F}_{A\sigma\tau o\, B} + \vec{F}_{B\sigma\tau o\, A} = \vec{0}$$

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Συνισταμένη δύναμη

- Η συνολική δύναμη που ασκείται σ' ένα σύστημα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{συστήματος} = \left(\sum \vec{F}\right)_{εσωτερικές} + \left(\sum \vec{F}\right)_{εξωτερικές}$$

- Όπως είδαμε όμως:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{εσωτερικές} = \vec{0}$$

- και συνεπώς:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{συστήματος} = \left(\sum \vec{F}\right)_{εξωτερικές}$$

Η κίνηση ενός συστήματος

- Σύμφωνα με τον 2ο νόμο της κίνησης (θεμελιώδης νόμος της μηχανικής) η κίνηση ενός σώματος μάζας m, καθορίζεται από τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται αυτό:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Η κίνηση ενός συστήματος

- Συνεπώς, **για κάθε ένα** από τα σώματα που απαρτίζουν το σύστημα θα ισχύει:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{σώματος} = m_{σώματος}\vec{a}_{σώματος} \Rightarrow$$

$$\left(\sum \vec{F}\right)^{εσωτερικές}_{σώματος} + \left(\sum \vec{F}\right)^{εξωτερικές}_{σώματος} = m_{σώματος}\vec{a}_{σώματος}$$

- Συνεπώς, η κίνηση κάθε σώματος καθορίζεται:
  1. από τις δυνάμεις που δέχεται από τα υπόλοιπα σώματα του συστήματος, και
  2. από τις δυνάμεις που δέχεται από το περιβάλλον

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Η κίνηση ενός συστήματος

- Επίσης, **για το σύστημα ως ολότητα** θα ισχύει:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{\text{συστήματος}} = m_{\text{συστήματος}}\vec{a}_{\text{συστήματος}} \Rightarrow$$

$$\left(\sum \vec{F}\right)^{\text{εσωτερικές}}_{\text{συστήματος}} + \left(\sum \vec{F}\right)^{\text{εξωτερικές}}_{\text{συστήματος}} = m_{\text{συστήματος}}\vec{a}_{\text{συστήματος}} \xrightarrow{\left(\sum \vec{F}\right)^{\text{εσωτερικές}}_{\text{συστήματος}} = \vec{0}}$$

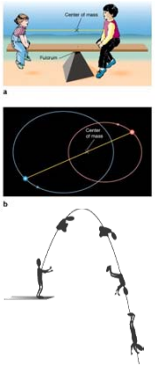
$$\left(\sum \vec{F}\right)^{\text{εξωτερικές}}_{\text{συστήματος}} = m_{\text{συστήματος}}\vec{a}_{\text{συστήματος}}$$

- Συνεπώς, η κίνηση του συστήματος ως ολότητα καθορίζεται μόνο:
  1. από τις δυνάμεις που δέχεται από το περιβάλλον

Η κίνηση ενός συστήματος

- Για την περιγραφή της κίνησης ενός συστήματος, θεωρούμε την έννοια του **κέντρου μάζας**:
- το κέντρο μάζας επιταχύνεται σα να ήταν σώμα με μάζα ίση με τη μάζα του συστήματος το οποίο υπόκειται στην επίδραση όλων των εξωτερικών δυνάμεων.
- Επίσης:

$$m_{\text{συστήματος}} = \sum_{j=1}^{N} m_j = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$$

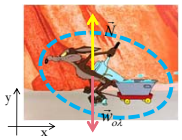


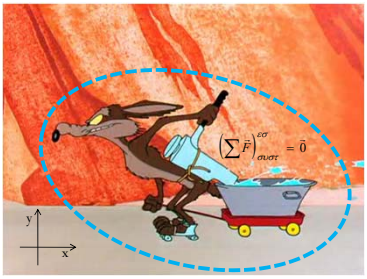
Με λίγα υλικά και πολύ φαντασία…

Τι λέτε? Θα δουλέψει ?

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Με λίγα υλικά και πολύ φαντασία…





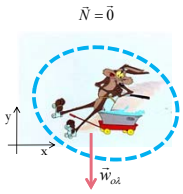
Το σύστημα δέχεται εξωτερικές δυνάμεις μόνο στον άξονα y.
Στον άξονα y το σύστημα ισορροπεί, άρα:

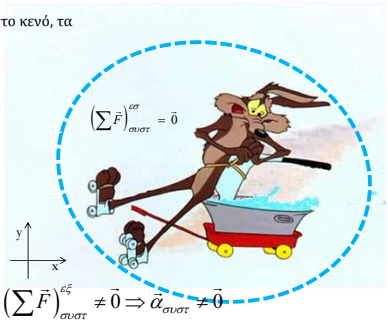
$$\left(\sum \vec{F}\right)_y = \vec{0} \Rightarrow \left(\sum \vec{F}\right)_{συστ}^{εξ} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha}_{συστ} = \vec{0}$$

16 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Με λίγα υλικά και πολύ φαντασία…

Αν όμως ο φίλος μας βρεθεί στο κενό, τα πράγματα αλλάζουν…





$$\left(\sum \vec{F}\right)_y = \vec{w}_{ολ} \neq \vec{0} \Rightarrow \left(\sum \vec{F}\right)_{συστ}^{εξ} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha}_{συστ} \neq \vec{0}$$

17 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Με τα γνωστά αποτελέσματα…

$$\vec{\alpha}_{συστ} = \vec{g},$$

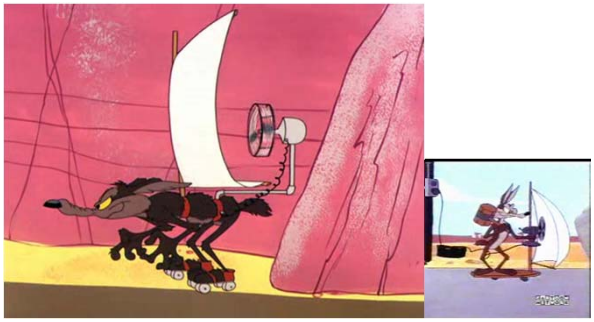
$$g \approx 10 m/s^2$$

18 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Με τα γνωστά αποτελέσματα…

19 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Εδώ, τι (θα) πάει “στραβά”;

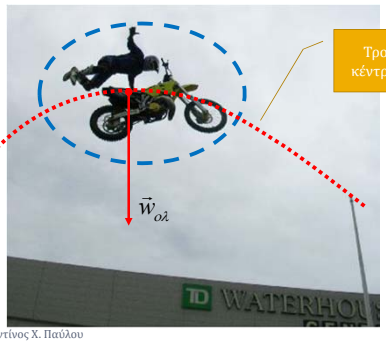


20 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

21 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

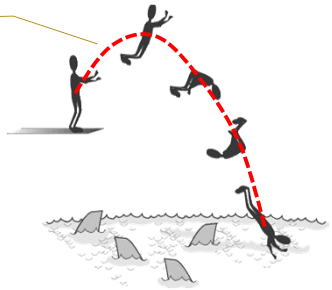
Η κίνηση ενός συστήματος



22 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Η κίνηση ενός συστήματος

Τροχιά του κέντρου μάζας



23 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Η κίνηση ενός συστήματος

24 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Η κίνηση ενός συστήματος

If a high jumper positions his body correctly when going over the bar, the center of gravity of the athlete may actually pass under the bar. Explain how this is possible.

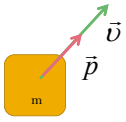
25 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Ορμή & αρχή διατήρησης της ορμής

1. Η έννοια της ορμής
2. Ορμή συστήματος
3. Η μεταβολή της ορμής
4. Η αρχή διατήρησης της ορμής

Η ορμή

- Η **ορμή** ενός σώματος ορίζεται ως εξής: $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$
- επειδή $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{p} \uparrow\uparrow \vec{\upsilon} \\ \kappa\alpha\iota \\ p = m\upsilon \end{cases}$



- μονάδα μέτρησης: $[\vec{p}] = [m][\vec{\upsilon}] = kg \cdot \frac{m}{\sec}$

27 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Η ορμή ενός συστήματος

- Ως **ορμή ενός συστήματος** ορίζουμε το (διανυσματικό) άθροισμα των ορμών των σωμάτων που το απαρτίζουν:

$$\vec{p}_{συστήματος} = \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N$$

- Προσέξτε πως λόγω του διανυσματικού χαρακτήρα μπορεί η συνολική ορμή να είναι μηδέν ακόμη κι αν όλα τα σώματα κινούνται…

Η μεταβολή της ορμής

- Από τον 2ο νόμο του Newton έχουμε πως:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \xrightarrow{\vec{a}=\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}}$$

$$\sum \vec{F} = m \cdot \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = m \cdot \frac{\vec{\upsilon}_{τελ} - \vec{\upsilon}_{αρχ}}{\Delta t} = \frac{m \cdot \vec{\upsilon}_{τελ} - m \cdot \vec{\upsilon}_{αρχ}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\sum \vec{F} = \frac{\vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ}}{\Delta t} \Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Η μεταβολή της ορμής

- Αυτή η δεύτερη μορφή του θεμελιώδους νόμου είναι πιο χρήσιμη (και πιο γενική αφού ισχύει και για **συστήματα με μεταβαλλόμενη μάζα**):

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

- Παρατηρούμε πως για να μεταβληθεί η ορμή ενός σώματος θα πρέπει να ασκηθεί πάνω του κάποια δύναμη:

$$\Delta\vec{p} = \left(\sum \vec{F}\right) \cdot \Delta t \xrightarrow{\Delta\vec{p}=\vec{p}_{τελ}-\vec{p}_{αρχ}} \vec{p}_{τελ} = \vec{p}_{αρχ} + \left(\sum \vec{F}\right) \cdot \Delta t$$

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Η διατήρηση της ορμής

- Παρατηρήστε ότι αν σ' ένα σώμα δεν ασκούνται δυνάμεις ή αν ασκούνται έχουν συνισταμένη μηδέν, τότε η ορμή του σώματος διατηρείται σταθερή:

$$\vec{p}_{τελ} = \vec{p}_{αρχ} + \left(\sum \vec{F}\right)\cdot \Delta t \xrightarrow{\sum \vec{F}=\vec{0}}$$

$$\vec{p}_{τελ} = \vec{p}_{αρχ} \Rightarrow \vec{p} = σταθ$$

- Προσοχή στο **διανυσματικό χαρακτήρα**:

$$\vec{p} = σταθ \Rightarrow \begin{cases} p = |\vec{p}| = σταθ \\ και \\ κατεύθυνση : σταθ \end{cases}$$

Η **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ο**ρμής (ΑΔΟ)

- Αν εφαρμόσουμε το 2ο νόμο για ένα σύστημα σωμάτων (ως ολότητα) θα έχουμε:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{συστήματος} = \frac{(\Delta \vec{p})_{συστήματος}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\left(\sum \vec{F}\right)^{εξωτερικές}_{συστήματος} + \left(\sum \vec{F}\right)^{εσωτερικές}_{συστήματος} = \frac{(\Delta \vec{p})_{συστήματος}}{\Delta t} \xrightarrow{\left(\sum \vec{F}\right)^{εσωτερικές}_{συστήματος}=\vec{0}}$$

$$\left(\sum \vec{F}\right)^{εξωτερικές}_{συστήματος} = \frac{(\Delta \vec{p})_{συστήματος}}{\Delta t}$$

...

Η **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ο**ρμής (ΑΔΟ)

- Άρα, για ένα **μονωμένο** σύστημα θα έχουμε...

$$\left(\sum \vec{F}\right)^{εξωτερικές}_{συστήματος} = \frac{(\Delta \vec{p})_{συστήματος}}{\Delta t} \xrightarrow[\left(\sum \vec{F}\right)^{εξωτερικές}_{συστήματος}=\vec{0}]{για\ μονωμένο\ σύστημα:}$$

$$\frac{(\Delta \vec{p})_{μονωμ.συστ.}}{\Delta t} = \vec{0} \Rightarrow (\Delta \vec{p})_{μονωμ.συστ.} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{p}^{\,αρχική}_{μονωμ.συστ.} = \vec{p}^{\,τελική}_{μονωμ.συστ.} \Rightarrow \vec{p}_{μονωμ.συστ.} = σταθ$$

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Η **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ο**ρμής (ΑΔΟ)

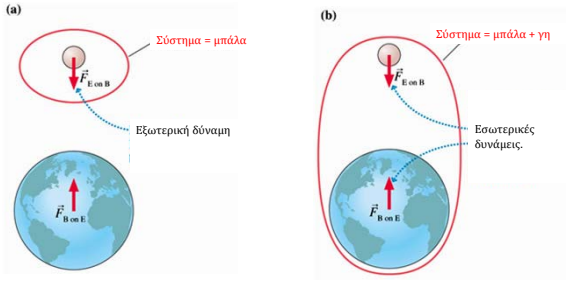
- Συνεπώς, η ΑΔΟ για ένα σύστημα σωμάτων διατυπώνεται ως εξής:
  - «Η (συνολική) ορμή ενός μονωμένου συστήματος διατηρείται σταθερή.»

$$\vec{p}_{μονωμ.συστ.} = σταθ \Rightarrow \vec{p}^{\,αρχική}_{μονωμ.συστ.} = \vec{p}^{\,τελική}_{μονωμ.συστ.}$$

- Άρα, η ορμή (σ' ένα μονωμένο σύστημα) ούτε δημιουργείται ούτε χάνεται, απλά μεταφέρεται...

Η **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ο**ρμής (ΑΔΟ)

Διατηρείται η ορμή του συστήματος;



Η **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ο**ρμής (ΑΔΟ)

- Η ΑΔΟ δεν απαγορεύει τη μεταβολή της ορμής καθενός σώματος του συστήματος χωριστά. Οι ορμές των σωμάτων (γενικώς) μεταβάλλονται, το άθροισμά τους όμως παραμένει σταθερό:

$$\vec{p}_{μονωμ.συστ.} = σταθ \Rightarrow \vec{p}^{\,αρχική}_{μονωμ.συστ.} = \vec{p}^{\,τελική}_{μονωμ.συστ.} \Rightarrow$$

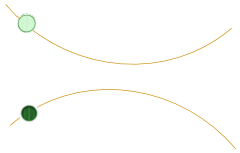
$$\left(\sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j\right)^{αρχική} = \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j\right)^{τελική} \Rightarrow$$

$$\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N\right)^{αρχική} = \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N\right)^{τελική}$$

$$\vec{p}_1^{\,αρχ} + \vec{p}_2^{\,αρχ} + \ldots + \vec{p}_N^{\,αρχ} = \vec{p}_1^{\,τελ} + \vec{p}_2^{\,τελ} + \ldots + \vec{p}_N^{\,τελ}$$

Η **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ο**ρμής (ΑΔΟ)

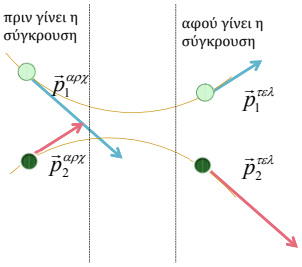
- Έστω τα δύο σώματα τα οποία συγκρούονται:



- υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι μονωμένο.

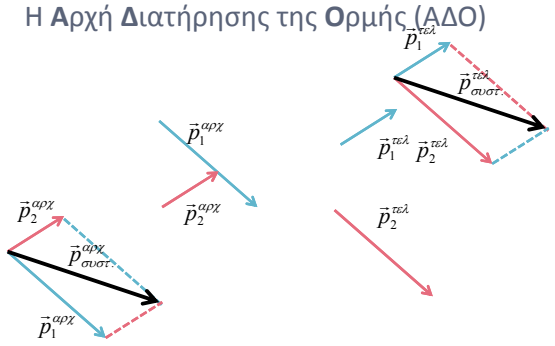
37 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Η **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ο**ρμής (ΑΔΟ)



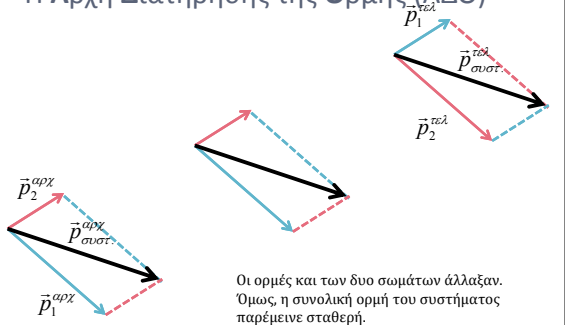
38 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Η **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ο**ρμής (ΑΔΟ)



39 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Η **Α**ρχή **Δ**ιατήρησης της **Ο**ρμής (ΑΔΟ)



Οι ορμές και των δυο σωμάτων άλλαξαν. Όμως, η συνολική ορμή του συστήματος παρέμεινε σταθερή.

Παράδειγμα…

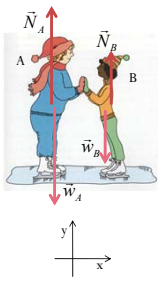
- Εσύ (100 kg) και η φίλη σου (50 kg) στέκεστε πρόσωπο με πρόσωπο σε λείο επίπεδο. Αν ο ένας σπρώξει τον άλλον εσύ κινείσαι με ταχύτητα 5 m/s προς τα πίσω.
  1. Πόση είναι η συνολική ορμή του συστήματός σας;
  2. Πόση είναι η ορμή σου μετά στο σπρώξιμο;
  3. Πόση είναι η ταχύτητα με την οποία θα κινηθεί η φίλη σου;

Παράδειγμα…

- Οι εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται το σύστημα είναι τα βάρη (w) και οι κάθετες αντιδράσεις στήριξης (N).
- Και οι δυο στον άξονα y ισορροπείτε.
- Άρα:

$$\left.\begin{array}{l}(\sum\vec{F})_{A,y}=\vec{0}\\(\sum\vec{F})_{B,y}=\vec{0}\end{array}\right\}\xrightarrow{\oplus}(\sum\vec{F})_{y}=\vec{0}\Rightarrow(\sum\vec{F})_{\varepsilon\xi}=\vec{0}$$

- Συνεπώς το σύστημα είναι μονωμένο.



© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Παράδειγμα…

- Εφόσον και οι δυο αρχικά είστε ακίνητοι, η συνολική ορμή του συστήματος είναι μηδέν:

$$\left.\begin{aligned} p_A^{\alpha\rho\chi} &= m_A \cdot \upsilon_A^{\alpha\rho\chi} = m_A \cdot 0 = 0 \\ p_B^{\alpha\rho\chi} &= m_B \cdot \upsilon_B^{\alpha\rho\chi} = m_B \cdot 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

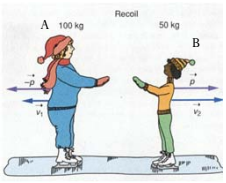
$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_A^{\,\alpha\rho\chi} + \vec{p}_B^{\,\alpha\rho\chi} = \vec{0}$$

43 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Παράδειγμα…

- μετά το σπρώξιμο η ορμή σου είναι: $\vec{p}_A^{\,\tau\varepsilon\lambda} = m_A \cdot \vec{\upsilon}_A^{\,\tau\varepsilon\lambda}$
- άρα έχει **μέτρο**:

$$p_A^{\tau\varepsilon\lambda} = m_A \cdot \upsilon_A^{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$
$$p_A^{\tau\varepsilon\lambda} = (100kg) \cdot (5m/s) \Rightarrow$$
$$p_A^{\tau\varepsilon\lambda} = 500kg \cdot m/s$$



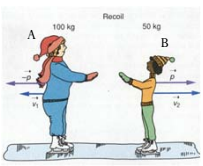
- και **κατεύθυνση** προς τ' αριστερά.

44 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Παράδειγμα…

- Το σύστημα είναι μονωμένο, άρα ισχύει η ΑΔΟ:

$$\vec{p}_{συστ}^{\,\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{συστ}^{\,\tau\varepsilon\lambda} \xrightarrow{\vec{p}_{συστ}^{\,\alpha\rho\chi}=\vec{0}} \vec{p}_{συστ}^{\,\tau\varepsilon\lambda} = \vec{0} \Rightarrow$$
$$\vec{p}_A^{\,\tau\varepsilon\lambda} + \vec{p}_B^{\,\tau\varepsilon\lambda} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_B^{\,\tau\varepsilon\lambda} = -\vec{p}_A^{\,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} p_B^{\tau\varepsilon\lambda} = p_A^{\tau\varepsilon\lambda} \\ \kappa\alpha\iota \\ \vec{p}_A^{\,\tau\varepsilon\lambda} \uparrow\downarrow \vec{p}_B^{\,\tau\varepsilon\lambda} \end{cases}$$



45 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

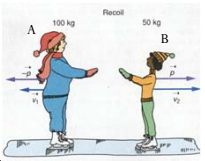
Παράδειγμα…

- Από την ισότητα των μέτρων των δυο ορμών έχουμε:

$$p_{\text{B}}^{\tau\varepsilon\lambda} = p_{A}^{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_B \upsilon_B^{\tau\varepsilon\lambda} = m_{\text{A}} \upsilon_{\text{A}}^{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$\upsilon_B^{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{m_{\text{A}} \upsilon_{\text{A}}^{\tau\varepsilon\lambda}}{m_B} = \frac{(100kg)\cdot(5m/s)}{50kg} \Rightarrow$$

$$\upsilon_B^{\tau\varepsilon\lambda} = 10m/s$$



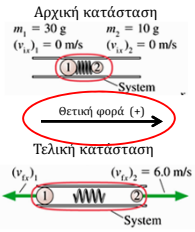
- ενώ η κατεύθυνση της ταχύτητας είναι προς τα δεξιά.

Επίλυση προβλημάτων

- Για την επίλυση (μονοδιάστατων) προβλημάτων που αναφέρονται στην ΑΔΟ ενεργούμε ως εξής:
  1. Σχεδιάζουμε τα σώματα ακριβώς πριν και αμέσως μετά (δλδ την αρχική και την τελική κατάσταση)
  2. Γράφουμε την εξίσωση που προκύπτει από την αρχή διατήρησης της ορμής (διανυσματικά).
  3. Επιλέγουμε μια θετική φορά για τα διανύσματα.
  4. Με βάση τη θετική φορά, μετατρέπουμε τη διανυσματική εξίσωση σε αλγεβρική.
  5. Επιλύουμε την εξίσωση.

Παράδειγμα…

- Αν το ελατήριο είναι ιδανικό να βρεθεί η ταχύτητα με την οποία εκτοξεύεται η μπάλα των 30 g.



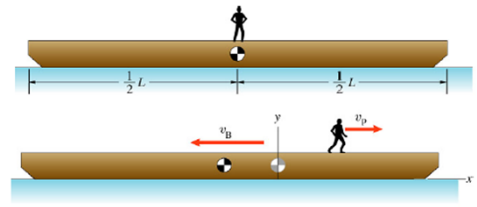
Αναλυτικά έχουμε:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{0} = \vec{p}_1^{(\tau\varepsilon\lambda)} + \vec{p}_2^{(\tau\varepsilon\lambda)} \xrightarrow{(+)} 0 = -p_1^{(\tau\varepsilon\lambda)} + p_2^{(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow$$

$$p_1^{(\tau\varepsilon\lambda)} = p_2^{(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow m_1 \upsilon_1^{(\tau\varepsilon\lambda)} = m_2 \upsilon_2^{(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow \upsilon_1^{(\tau\varepsilon\lambda)} = \frac{m_2}{m_1} \upsilon_2^{(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1^{(\tau\varepsilon\lambda)} = \frac{10gr}{30gr} 6m/s \Rightarrow \upsilon_1^{(\tau\varepsilon\lambda)} = 2m/s$$

Η κίνηση του κέντρου μάζας



Movements of people on the boat do not change the velocity of the center of mass

Κρούσεις

1. Η ώθηση
2. Δυνάμεις κατά την κρούση
3. Ελαστική & πλαστική κρούση
4. Πλάγια κρούση
5. Εκρήξεις

Το φαινόμενο της κρούσης

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Η ώθηση

- Όπως είδαμε, για να μεταβληθεί η ορμή ενός σώματος θα πρέπει να ασκηθεί πάνω του κάποια δύναμη:

$$\Delta\vec{p} = \left(\sum \vec{F}\right)\cdot \Delta t \xrightarrow{\Delta\vec{p}=\vec{p}_{τελ}-\vec{p}_{αρχ}} \vec{p}_{τελ} = \vec{p}_{αρχ} + \left(\sum \vec{F}\right)\cdot \Delta t$$

- Το γινόμενο $\left(\sum \vec{F}\right)\cdot \Delta t$ το ονομάζουμε **ώθηση (I)**, και όπως βλέπουμε είναι μέγεθος διανυσματικό, με μονάδα μέτρησης:

$$[I] = [\Delta ύναμη].[χρόνος] = N\cdot s$$

Η ώθηση

- Την ώθηση μπορούμε να την υπολογίσουμε είτε ως ώθηση της συνισταμένης δύναμης είτε ως συνισταμένη των επιμέρους ωθήσεων:

$$\begin{aligned}\vec{I} &= \left(\sum \vec{F}\right)\cdot \Delta t = \\ &= \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N\right)\cdot \Delta t \\ &= \vec{F}_1\cdot \Delta t + \vec{F}_2\cdot \Delta t + \ldots + \vec{F}_N\cdot \Delta t = \\ &= \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \ldots \vec{I}_N = \\ &= \sum \vec{I}\end{aligned}$$

Η ώθηση

- Έτσι, αν με **I** συμβολίσουμε την ώθηση, έχουμε:

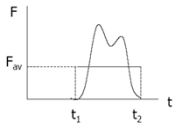
$$\vec{p}_{τελ} = \vec{p}_{αρχ} + \vec{I} \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} = \vec{I}$$

- Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή ως θεώρημα ώθησης – ορμής: «Η μεταβολή της ορμής ενός συστήματος ισούται με τη συνολική ώθηση που δέχτηκε το σώμα».
- Η ώθηση δεν αποτελεί ιδιότητα του σώματος (συστήματος). Απλά μας πληροφορεί το κατά πόσο μια εξωτερική δύναμη μεταφέρει ορμή στο σώμα.

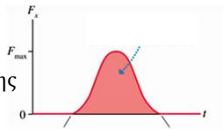
© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Η ώθηση

- Συνήθως η δύναμη δεν είναι σταθερή με αποτέλεσμα να μη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ορισμού της ώθησης για τον υπολογισμό της.



- Στην περίπτωση αυτή η ώθηση υπολογίζεται από το εμβαδό της γραφικής παράστασης της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο.



55 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

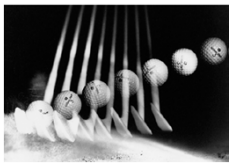
Η ώθηση

- Σε διάφορα προβλήματα της Φυσικής χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη **προσέγγιση της ώθησης**.
- Στην προσέγγιση αυτή υποθέτουμε ότι μία από τις δυνάμεις οι οποίες δρουν πάνω στο σώμα δρα επί **μικρό χρονικό διάστημα**, και είναι πολύ **μεγαλύτερη** από τις άλλες δυνάμεις που δρουν πάνω στο σώμα.
- Αυτή η προσέγγιση μας διευκολύνει κατ' εξοχήν στην μελέτη κρούσεων κατά τις οποίες η διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μικρή.

56 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Η ώθηση

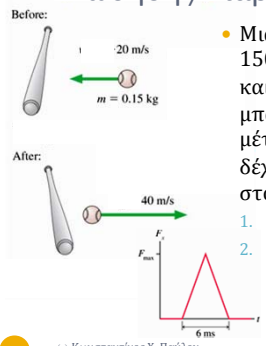
- Λόγου χάρη, όταν χτυπούμε με το μπαστούνι μια μπάλα του γκολφ, η κρούση διαρκεί μόνον 0.01 s περίπου και η μέση δύναμη την οποία ασκεί το μπαστούνι πάνω στη μπάλα είναι μερικές χιλιάδες Newton.
- Η δύναμη αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη από τη δύναμη της βαρύτητας και επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση της ώθησης.



57 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

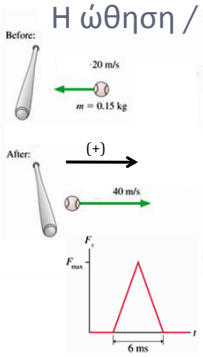
© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Η ώθηση / παράδειγμα



- Μια μπάλα του μπέιζμπολ μάζας 150 g κινείται με ταχύτητα 20 m/s και μετά το χτύπημα από το μπαστούνι επιστρέφει με ταχύτητα μέτρου 40 m/s. Η δύναμη που δέχεται από το μπαστούνι φαίνεται στο σχήμα. Να βρεθούν:
  1. Η μέγιστη δύναμη, F_{max}.
  2. Η μέση δύναμη, F_{avg}.

Η ώθηση / παράδειγμα



Μεταβολή της ορμής της μπάλας:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} - \vec{p}_{\alpha\rho\chi} \xrightarrow{(+)} \Delta p = p_{\tau\epsilon\lambda} + p_{\alpha\rho\chi} = m\left(\upsilon_{\tau\epsilon\lambda} + \upsilon_{\alpha\rho\chi}\right) \Rightarrow$$
$$\Delta p = (0{,}15kg)\cdot(40+20)\,m/s \Rightarrow \Delta p = 9kg\cdot m/s$$

Υπολογισμός της ώθησης (εμβαδό):

$$I = \frac{1}{2}(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta)(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma) = \frac{1}{2}(0{,}006\sec)F_{\max} = 0.003\cdot F_{\max}$$

Όμως: $\Delta p = I \Rightarrow 9kg\cdot m/\sec = (0{,}003\sec)\cdot F_{\max} \Rightarrow$
$$F_{\max} = 3.000N$$

Υπολογισμός μέσης δύναμης:

$$I = \left(\sum F\right)\Delta t \xrightarrow[I=\Delta p]{\sum F = F_{avg}} F_{avg} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 1.500N$$

Κάναμε καλά που χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση της ώθησης?

Η ώθηση

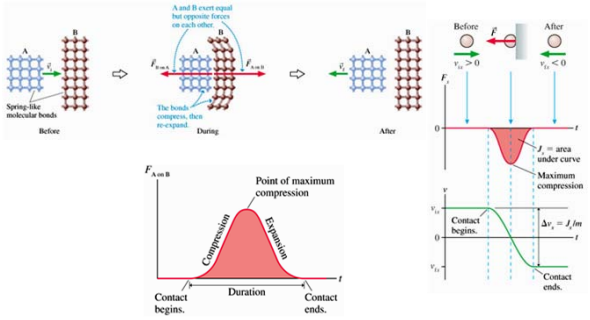
- "Πως" λειτουργεί ο αερόσακος;

1. Αύξηση της διάρκειας της κρούσης σημαίνει μείωση της δύναμης:

$$\Delta\vec{p} = \left(\sum\vec{F}\right)\cdot\Delta t \Rightarrow \left(\sum\vec{F}\right) = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

2. Επίσης, απορροφά και μέρος της ενέργειας της κρούσης.

Δυνάμεις κατά την κρούση



Δυνάμεις κατά την κρούση

- Θα πρέπει να γίνει κατανοητό πως:

1. Η δύναμη που δέχεται ένα σώμα έχει την κατεύθυνση της μεταβολής της ορμής του σώματος:

$$\left(\sum \vec{F}\right) = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t>0} \left(\sum \vec{F}\right) \uparrow\uparrow \Delta \vec{p}$$

2. Λόγω του 3ου νόμου της κίνησης (δράση – αντίδραση) μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που δέχεται και το άλλο σώμα.

Κρούσεις

- Κρούση ονομάζουμε την ανταλλαγή ενέργειας και ορμής μεταξύ των σωμάτων όταν αυτά έρχονται σε επαφή (μακροσκοπικά).
- Η έννοια της “επαφής” στο μικρόκοσμο όμως είναι λίγο… παράξενη.

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Μελέτη των κρούσεων

1. Λόγω των ισχυρών εσωτερικών δυνάμεων που αναπτύσσονται κατά την κρούση μπορούμε τις περισσότερες φορές να θεωρήσουμε πως η ορμή σε μια κρούση διατηρείται.
2. Πάντα θεωρούμε πως η χρονική διάρκεια μιας κρούσης είναι αμελητέα.
3. Άρα οι θέσεις των σωμάτων ακριβώς πριν και αμέσως μετά την κρούση είναι οι ίδιες. Τα σώματα δεν πρόλαβαν να μετακινηθούν

Είδη κρούσεων

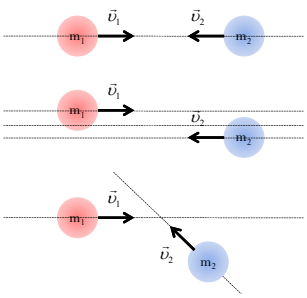
- Τις κρούσεις τις διαχωρίζουμε με βάση το αν διατηρείται η κινητική ενέργεια των σωμάτων ή όχι:
  - Αν διατηρείται η κινητική ενέργεια η κρούση ονομάζεται **ελαστική**.
  - Αν **δεν** διατηρείται η κινητική ενέργεια η κρούση ονομάζεται **ανελαστική**.
    - Μια ιδιαίτερη περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι η **πλαστική** κρούση στην οποία δημιουργείται συσσωμάτωμα.

Είδη κρούσεων

Κεντρική (ή μετωπική)

Έκκεντρη

Πλάγια



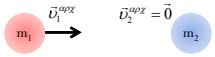
© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Κεντρική κρούση

- Σε μια κεντρική κρούση, και τα δυο σώματα μετά την κρούση κινούνται **αναγκαστικά** πάνω στην ίδια διεύθυνση.
- Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί?

Ελαστική κρούση

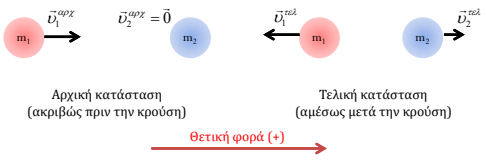
- Έστω ότι τα δύο σώματα κινούνται όπως φαίνεται και συγκρούονται ελαστικά (και κεντρικά):



- Αν $m_1 = 1000\ \text{kg}$, $m_2 = 1500\ \text{kg}$, $\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} = 50\ \text{m/s}$, $\upsilon_{2,\alpha\rho\chi} = 0$, να βρεθούν οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

Ελαστική κρούση

- Το m_2 θα κινηθεί σίγουρα προς τα δεξιά. Το m_1 δεν ξέρουμε, απλώς υποθέτουμε.
- Επιλέγουμε τη θετική φορά όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ελαστική κρούση

Αρχική κατάσταση (ακριβώς πριν την κρούση) — Τελική κατάσταση (αμέσως μετά την κρούση)

Θετική φορά (+)

Αφού η κρούση είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια διατηρείται:

$$K_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda}^2 \xrightarrow{\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}=0}$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda}^2 \Rightarrow m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}^2 = m_1\upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda}^2 + m_2\upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda}^2$$

70 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Ελαστική κρούση

Αρχική κατάσταση (ακριβώς πριν την κρούση) — Τελική κατάσταση (αμέσως μετά την κρούση)

Θετική φορά (+)

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_1^{\,\alpha\rho\chi} + \cancel{\vec{p}_2^{\,\alpha\rho\chi}} = \vec{p}_1^{\,\tau\varepsilon\lambda} + \vec{p}_2^{\,\tau\varepsilon\lambda} \xrightarrow{(+)}$$

$$m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} = -m_1\upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda} + m_2\upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda}$$

71 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Ελαστική κρούση

Αρχική κατάσταση (ακριβώς πριν την κρούση) — Τελική κατάσταση (αμέσως μετά την κρούση)

Θετική φορά (+)

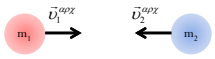
Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}^2 &= m_1\upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda}^2 + m_2\upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda}^2 \\ m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} &= -m_1\upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda} + m_2\upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda} = 10m/s \\ \upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda} = 40m/s \end{cases}$$

72 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Πλαστική κρούση

- Έστω ότι τα δύο σώματα κινούνται όπως φαίνεται και συγκρούονται πλαστικά (και κεντρικά):



- Αν $m_1 = 1000\ kg$, $m_2 = 1500\ kg$, $\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} = 50\ m/s$, $\upsilon_{2,\alpha\rho\chi} = 20\ m/s$, να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση καθώς επίσης και η απώλεια ενέργειας.

Πλαστική κρούση

Αρχική κατάσταση (ακριβώς πριν την κρούση) — Τελική κατάσταση (αμέσως μετά την κρούση)

Θετική φορά (+)

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \vec{p}_1^{\,\alpha\rho\chi} + \vec{p}_2^{\,\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\epsilon\lambda} \xrightarrow{(+)}$$

$$m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} - m_2\upsilon_{2,\alpha\rho\chi} = -(m_1+m_2)\upsilon_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \upsilon_{\tau\epsilon\lambda} = -\frac{m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} - m_2\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}}{m_1+m_2}$$

Πλαστική κρούση

Αρχική κατάσταση (ακριβώς πριν την κρούση) — Τελική κατάσταση (αμέσως μετά την κρούση)

Θετική φορά (+)

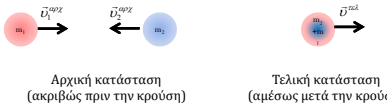
Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\upsilon_{\tau\epsilon\lambda} = -\frac{m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} - m_2\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}}{m_1+m_2} =$$

$$= -\frac{(1000kg)\cdot(50m/s) - (1500kg)\cdot(20m/s)}{1000kg+1500kg} \Rightarrow \upsilon_{\tau\epsilon\lambda} = -8m/s$$

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Πλαστική κρούση

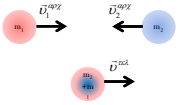


Αρχική κατάσταση
(ακριβώς πριν την κρούση)

Τελική κατάσταση
(αμέσως μετά την κρούση)

Το ότι το πρόσημο της ταχύτητας προέκυψε αρνητικό, σημαίνει πως η επιλογή της φοράς της ταχύτητας του συσσωματώματος ήταν λανθασμένη. Μετά την κρούση το σώμα κινείται προς τα δεξιά όπως βλέπουμε με ταχύτητα +8 m/s.

Πλαστική κρούση



Η αρχική κινητική ενέργεια είναι:

$$K_{αρχ} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1,αρχ}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2,αρχ}^2 = \frac{1}{2}(1000kg)(50m/s)^2 + \frac{1}{2}(1500kg)(20m/s)^2 = 1.550.000J$$

Η τελική κινητική ενέργεια είναι:

$$K_{τελ} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\upsilon_{τελ}^2 = \frac{1}{2}(1000kg+1500kg)(8m/s)^2 = 80.000J$$

Η απώλεια κινητικής ενέργειας είναι:

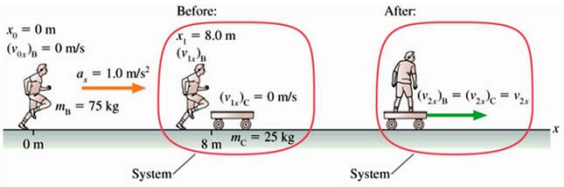
$$\Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} = 80.000J - 1.550.000J = -1.470.000J$$

Απώλειες:
- θερμότητα,
- ήχος,
- παραμόρφωση,...

Η ποσοστιαία απώλεια κινητικής ενέργειας είναι:

$$\Delta K(\%) = \frac{K_{τελ}-K_{αρχ}}{K_{αρχ}}100\% = \frac{80.000J - 1.550.000J}{1.550.000J}100\% \approx -94,83\%$$

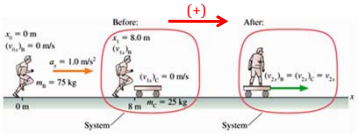
Άσκηση



Ο ακίνητος Μπόμπος βλέπει μπροστά του και σε απόσταση 8m, ένα επίσης ακίνητο καροτσάκι. Ξεκινώντας με σταθερή επιτάχυνση φτάνει και πηδάει πάνω στο καροτσάκι. Να βρεθεί η ταχύτητα του καροτσιού αμέσως μόλις πηδήξει πάνω του ο Μπόμπος. (Στοιχεία να ληφθούν από το σχήμα)

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Άσκηση



Ο Μπόμπος φτάνει στο καροτσάκι τη στιγμή: $x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8m}{1m/s^2}} = 4s$

Η ταχύτητά του είναι: $\upsilon = at = \left(1m/s^2\right) \cdot \left(4s\right) = 4m/s$

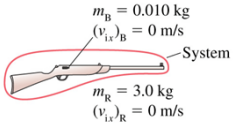
Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ, έχουμε:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_1^{αρχ} + \cancel{\vec{p}_2^{αρχ}} = \vec{p}_{τελ} \xrightarrow{(+)}$$

$$m_1\upsilon_{1,αρχ} + 0 = \left(m_1 + m_2\right)\upsilon_{τελ} \Rightarrow \upsilon_{τελ} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_{1,αρχ} \Rightarrow \upsilon_{τελ} = \frac{75kg}{75kg + 25kg}4m/s = 3m/s$$

Άσκηση - Εκρήξεις

Να βρεθεί η ταχύτητα ανάκρουσης του όπλου.



Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow$$

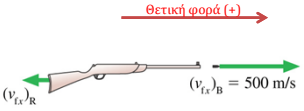
$$\vec{0} = \vec{p}_{βλήμα}^{τελ} + \vec{p}_{όπλου}^{τελ} \xrightarrow{(+)}$$

$$0 = m_{βλ}\upsilon_{βλ} - m_{οπ}\upsilon_{οπ} \Rightarrow$$

$$m_{οπ}\upsilon_{οπ} = m_{βλ}\upsilon_{βλ} \Rightarrow$$

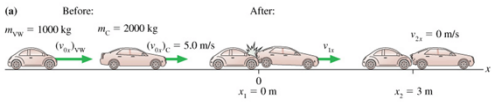
$$\upsilon_{οπ} = \frac{m_{βλ}}{m_{οπ}}\upsilon_{βλ} \Rightarrow$$

$$\upsilon_{οπ} = \frac{0,010kg}{3kg}500m/s \approx 1,67m/s$$



$K_{αρχ} = 0$ ενώ $K_{τελ} \neq 0$.
Παραβιάζεται η Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας?

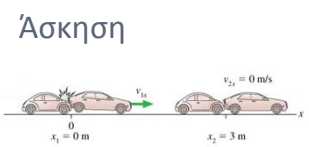
Άσκηση

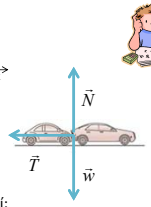


Μια Cadillac (2000 kg) μόλις έχει ξεκινήσει και κινείται με ταχύτητα 5 m/s. Ένα Volkswagen (1000 kg) "καρφώνεται" πίσω της και τα δυο αυτοκίνητα ενωμένα σέρνονται μέχρι να σταματήσουν. Ο αστυνόμος Σαΐνης για να βρει αν ο οδηγός του Volkswagen είχε ξεπεράσει το όριο (50 km/h) μέτρησε τα σημάδια στην άσφαλτο και τα βρήκε 3 m. Μπορείτε να τον βοηθήσετε? (δίνεται $\mu_σ = 0,8$)

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Άσκηση





Όσο κινούνται, στον άξονα y το συσσωμάτωμα ισορροπεί:

$$\sum \vec{F}_y = \vec{0} \Rightarrow N = w \Rightarrow N = (m_c + m_v)g = 30.000N$$

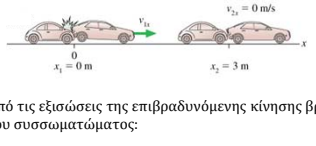
Άρα, η τριβή είναι:

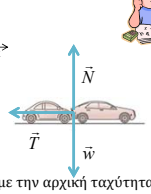
$$T = \mu N = 0,8 \cdot 30.000 = 24.000N$$

Στον άξονα x έχουμε επιβράδυνση:

$$\sum \vec{F}_x = (m_c + m_v)\vec{a} \Rightarrow T = (m_c + m_v)a \Rightarrow a = \frac{T}{m_c + m_v} = 8m/s^2$$

Άσκηση



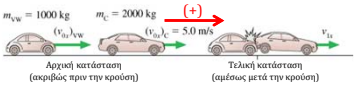


Από τις εξισώσεις της επιβραδυνόμενης κίνησης βρίσκουμε την αρχική ταχύτητα του συσσωματώματος:

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = \upsilon_0 - at \\ x = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}at^2 \end{array}\right\} \xrightarrow[\upsilon_1 = 0, x_1]{x_1 = 3m} \left.\begin{array}{l} t_1 = \frac{\upsilon_0}{a} \\ x_1 = \upsilon_0\left(\frac{\upsilon_0}{a}\right) - \frac{1}{2}a\left(\frac{\upsilon_0}{a}\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{\upsilon_0^2}{2a} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{2ax_1} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 3} = 4\sqrt{3}m/s$$

Προσέξτε όμως πως η ταχύτητα αυτή είναι η ταχύτητα που έχει το συσσωμάτωμα αμέσως μετά την κρούση.

Άσκηση



Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ:

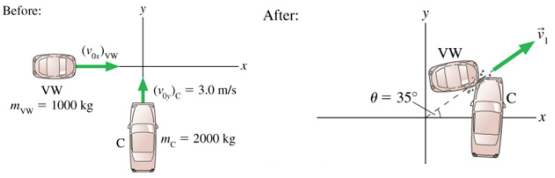
$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_v^{αρχ} + \vec{p}_c^{αρχ} = \vec{p}_{vc} \xrightarrow{(+)} m_v\upsilon_{v,αρχ} + m_c\upsilon_{c,αρχ} = (m_v + m_c)\upsilon_0 \Rightarrow$$

$$\upsilon_{v,αρχ} = \frac{(m_v + m_c)\upsilon_0 - m_c\upsilon_{c,αρχ}}{m_v} = \frac{(1000kg + 2000kg)\cdot(4\sqrt{3}m/s) - (2000kg)(5m/s)}{1000kg} \approx 10,78m/s$$

Παρατηρούμε πως η ταχύτητα αυτή είναι μικρότερη από το όριο: 50 km/h ≈ 13,88 m/s

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

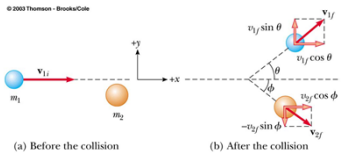
Άσκηση – Πλάγια κρούση



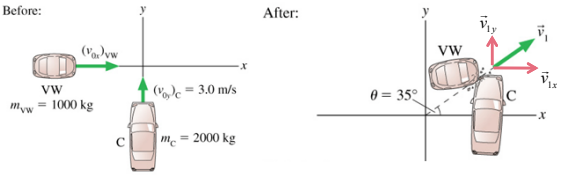
Τα δύο προηγούμενα αυτοκίνητα ξανασυναντιούνται σε μια διασταύρωση, όπως φαίνεται στο σχήμα(!). Αν η Cadillac είχε ταχύτητα 3 m/s να βρείτε την ταχύτητα του Volkswagen (η σύγκρουση είναι πλαστική) για να βοηθήσετε τον αστυνόμο Σαΐνη.

Άσκηση – Πλάγια κρούση – οδηγίες

- Αν η κίνηση γίνεται σε περισσότερες από μια διαστάσεις:
  1. Επιλέγουμε ένα σύστημα αξόνων (βολεύει, ο ένας άξονας να συμπίπτει με μια από τις αρχικές ταχύτητες).
  2. Αναλύουμε τις ταχύτητες (άρα και τις ορμές) στους άξονες.
  3. Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ σε κάθε έναν άξονα χωριστά.



Άσκηση – Πλάγια κρούση

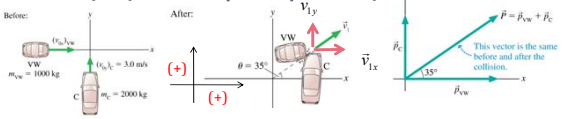


Οι αρχικές ταχύτητες βρίσκονται πάνω στους άξονες. Αντίθετα η τελική ταχύτητα του συσσωματώματος χρειάζεται ανάλυση:

$$v_{1x} = v_1 συν35°$$
$$v_{1y} = v_1 ημ35°$$

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Άσκηση – Πλάγια κρούση



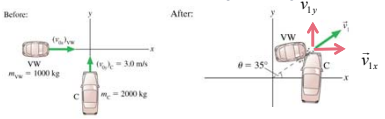
Άξονας x:

$$\vec{p}_x^{\,αρχ} = \vec{p}_x^{\,τελ} \Rightarrow \vec{p}_x^{\,V,αρχ} + \vec{p}_x^{\,C,αρχ} = \vec{p}_x^{\,VC,τελ} \xrightarrow{(+)} m_v\upsilon_v = (m_v + m_c)v_1 συν35°$$

Άξονας y:

$$\vec{p}_y^{\,αρχ} = \vec{p}_y^{\,τελ} \Rightarrow \vec{p}_y^{\,V,αρχ} + \vec{p}_y^{\,C,αρχ} = \vec{p}_y^{\,VC,τελ} \xrightarrow{(+)} m_c\upsilon_c = (m_v + m_c)v_1 ημ35°$$

Άσκηση – Πλάγια κρούση



Διαιρώντας κατά μέλη τις δυο εξισώσεις, έχουμε:

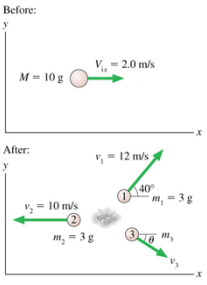
$$\left.\begin{aligned} m_c\upsilon_c &= (m_v + m_c)v_1 ημ35° \\ m_v\upsilon_v &= (m_v + m_c)v_1 συν35° \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{m_c\upsilon_c}{m_v\upsilon_v} = \frac{(m_v + m_c)v_1 ημ35°}{(m_v + m_c)v_1 συν35°} \xrightarrow{εφ35° = \frac{ημ35°}{συν35°}}$$

$$\frac{m_c\upsilon_c}{m_v\upsilon_v} = εφ35° \Rightarrow m_c\upsilon_c = m_v\upsilon_v εφ35° \Rightarrow \upsilon_v = \frac{m_c\upsilon_c}{m_v εφ35°} \approx \frac{(2000kg)\cdot(3m/s)}{(1000kg)\cdot 0,7} \approx 8,56m/s$$

Παρατηρούμε πως η ταχύτητα αυτή είναι μικρότερη από το όριο: 50 km/h ≈ 13,88 m/s.
Τελικά, μάλλον ο οδηγός του VW είναι άσχετος με την οδήγηση...

Άσκηση – Έκρηξη βλήματος

Το βλήμα εκρήγνυται σε τρία μέρη.
Να βρεθεί η ταχύτητα του τρίτου κομματιού (μέτρο & κατεύθυνση).
Στοιχεία να ληφθούν από το σχήμα.



© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Άσκηση – Έκρηξη βλήματος

Προφανώς: $m_3 = M - m_1 - m_2 = 4.0\ \text{g}$

Άξονας x:

$$\vec{p}_x^{\,αρχ} = \vec{p}_x^{\,τελ} \Rightarrow \vec{p}_x^{\,αρχ} = \vec{p}_x^{\,1,τελ} + \vec{p}_x^{\,2,τελ} + \vec{p}_x^{\,3,τελ} \xrightarrow{(+)}$$

$$MV_{αx} = m_1 υ_1 συν 40° - m_2 υ_2 + m_3 υ_3 συνθ$$

Άξονας y:

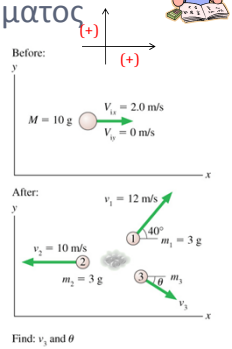
$$\vec{p}_y^{\,αρχ} = \vec{p}_y^{\,τελ} \Rightarrow \vec{p}_y^{\,αρχ} = \vec{p}_y^{\,1,τελ} + \vec{p}_y^{\,2,τελ} + \vec{p}_y^{\,3,τελ} \xrightarrow{(+)}$$

$$0 = m_1 υ_1 ημ 40° + 0 - m_3 υ_3 ημθ$$

Άρα:

$$MV_{αx} = m_1 υ_1 συν 40° - m_2 υ_2 + m_3 υ_3 συνθ$$

$$0 = m_1 υ_1 ημ 40° + 0 - m_3 υ_3 ημθ$$



Άσκηση – Έκρηξη βλήματος

Επιλύοντας το σύστημα των δυο εξισώσεων έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} MV_{αx} = m_1 υ_1 συν 40° - m_2 υ_2 + m_3 υ_3 συνθ \\ 0 = m_1 υ_1 ημ 40° + 0 - m_3 υ_3 ημθ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\substack{M=[gr] \\ υ=[m/s]}} \left.\begin{matrix} 10 \cdot 2 = 3 \cdot 12 \cdot 0,766 - 3 \cdot 10 + 4 \cdot υ_3 \cdot συνθ \\ 0 = 3 \cdot 12 \cdot 0,642 - 4 \cdot υ_3 \cdot ημθ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} υ_3 \cdot συνθ \approx 5,606 \\ υ_3 \cdot ημθ \approx 5,778 \end{matrix}\right.$$

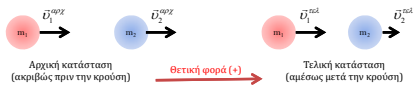
Διαιρώντας κατά μέλη

$$\left.\begin{matrix} υ_3 \cdot συνθ = 5,606 \\ υ_3 \cdot ημθ = 5,778 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{:} \frac{\cancel{υ_3} \cdot ημθ}{\cancel{υ_3} \cdot συνθ} = \frac{5,778}{5,606} \Rightarrow εφθ = 1,03068 \Rightarrow θ = εφ^{-1}(1,03068) = 45,86°$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και μετά προσθέτοντας κατά μέλη

$$\left.\begin{matrix} υ_3^2 \cdot συν^2θ = 31,727 \\ υ_3^2 \cdot ημ^2θ = 33,385 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\oplus} υ_3^2 \cdot \underbrace{(ημ^2θ + συν^2θ)}_{=1} = 64,812 \Rightarrow υ_3 = \sqrt{64,812} \approx 8,05 m/s$$

Ελαστική κρούση



Αφού η κρούση είναι ελαστική, η κινητική ενέργεια διατηρείται:

$$K_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 υ_{1,αρχ}^2 + \frac{1}{2} m_2 υ_{2,αρχ}^2 = \frac{1}{2} m_1 υ_{1,τελ}^2 + \frac{1}{2} m_2 υ_{2,τελ}^2$$

Εφαρμόζουμε την ΑΔΟ:

$$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow \vec{p}_1^{\,αρχ} + \vec{p}_2^{\,αρχ} = \vec{p}_1^{\,τελ} + \vec{p}_2^{\,τελ} \xrightarrow{(+)} m_1 υ_{1,αρχ} + m_2 υ_{2,αρχ} = m_1 υ_{1,τελ} + m_2 υ_{2,τελ}$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε δύο σχέσεις που να μας δίνουν τις ταχύτητες των δυο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση...

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Ελαστική κρούση

Ομαδοποιούμε τους όρους που αναφέρονται στα δυο σώματα:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}^2\Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}^2-\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}^2=\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}^2-\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}^2\Rightarrow$$

$$m_1\left(\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}^2-\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}^2\right)=m_2\left(\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}^2-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}^2\right)\xrightarrow{\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}$$

$$m_1\left(\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}\right)\left(\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}-\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}\right)=m_2\left(\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}+\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}\right)\left(\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}\right)$$

$$m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+m_2\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}=m_1\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}+m_2\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}\Rightarrow m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}-m_1\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}=m_2\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}-m_2\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}\Rightarrow$$

$$m_1\left(\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}-\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}\right)=m_2\left(\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}\right)$$

Διαιρούμε κατά μέλη τις εξισώσεις:

$$\frac{\cancel{m_1}\left(\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}\right)\cancel{\left(\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}-\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}\right)}}{\cancel{m_1}\cancel{\left(\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}-\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}\right)}}=\frac{\cancel{m_2}\left(\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}+\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}\right)\cancel{\left(\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}\right)}}{\cancel{m_2}\left(\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}\right)}\Rightarrow$$

$$\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}=\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}+\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}\Rightarrow\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}=\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}$$

Ελαστική κρούση

Αντικαθιστούμε την τελευταία, στην εξίσωση των ορμών και έχουμε:

$$m_1\left(\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}-\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}\right)=m_2\left(\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}\right)\xrightarrow{\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}=\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}}$$

$$m_1\left(\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}-\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}\right)=m_2\left(\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}\right)\Rightarrow m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}-m_1\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}=m_2\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+m_2\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}-2m_2\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}\Rightarrow$$

$$m_1\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}-m_2\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+2m_2\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}=m_2\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}+m_1\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}\Rightarrow\left(m_1-m_2\right)\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+2m_2\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}=\left(m_1+m_2\right)\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}\Rightarrow$$

$$\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}$$

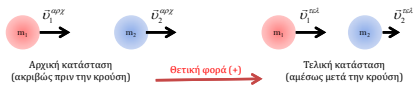
Τέλος, κάνουμε και την αντικατάσταση:

$$\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}=\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}\xrightarrow{\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}}$$

$$\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}=\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}-\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}=\left(1+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\left(\frac{2m_2}{m_1+m_2}-1\right)\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}\Rightarrow$$

$$\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}=\left(\frac{m_1+\cancel{m_2}+m_1-\cancel{m_2}}{m_1+m_2}\right)\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\left(\frac{2m_2-m_1-m_2}{m_1+m_2}\right)\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}$$

Ελαστική κρούση



Καταλήγουμε λοιπόν στις δυο σχέσεις:

$$\upsilon_{1,\pi\epsilon\lambda}=\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}+\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}\quad\text{και}\quad\upsilon_{2,\pi\epsilon\lambda}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}$$

Παρατηρήσεις:

1. Προσέξτε τη συμμετρία των σχέσεων.
2. Προσοχή στα πρόσημα των ταχυτήτων. Για την απόδειξη, όλες οι ταχύτητες είχαν τη θετική φορά.

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Ελαστική κρούση

Ένα ενδιάμεσο αποτέλεσμα που χρησιμοποιήσαμε ήταν και η σχέση:

$$\upsilon_{1,αρχ} + \upsilon_{1,τελ} = \upsilon_{2,αρχ} + \upsilon_{2,τελ}$$

Η οποία γράφεται διαφορετικά:

$$\upsilon_{1,αρχ} - \upsilon_{2,αρχ} = \upsilon_{2,τελ} - \upsilon_{1,τελ} \Rightarrow \upsilon_{1,αρχ} - \upsilon_{2,αρχ} = -\left(\upsilon_{1,τελ} - \upsilon_{2,τελ}\right)$$

Παρατηρούμε πως οι διαφορές των ταχυτήτων των δυο σωμάτων, πριν και μετά την κρούση, είναι μεταξύ τους αντίθετες.

Η διαφορά των ταχυτήτων δεν είναι τίποτα άλλο παρά η **σχετική ταχύτητα** του ενός σώματος ως προς το άλλο…

Ελαστική κρούση – ειδικές περιπτώσεις

Ίσες μάζες $m_1 = m_2$:

$$\upsilon_{1,τελ} = \upsilon_{2,αρχ} \quad και \quad \upsilon_{2,τελ} = \upsilon_{1,αρχ}$$

Δηλαδή τα σώματα ανταλλάσουν ταχύτητες

Το δεύτερο σώμα ακίνητο ($\upsilon_{2,αρχ} = 0$):

$$\upsilon_{1,τελ} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_{1,αρχ} \quad και \quad \upsilon_{2,τελ} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_{1,αρχ}$$

$$\upsilon_{1,τελ} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_{2,αρχ} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_{1,αρχ}$$

$$\upsilon_{2,τελ} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_{1,αρχ} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_{2,αρχ}$$

Ελαστική κρούση – ειδικές περιπτώσεις

Το δεύτερο σώμα πολύ μεγαλύτερο $\left(m_2 >> m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \to 0\right)$:

$$\upsilon_{1,τελ} = \frac{2\frac{m_2}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_2}}\upsilon_{2,αρχ} + \frac{\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_2}}\upsilon_{1,αρχ} \Rightarrow \upsilon_{1,τελ} \approx \frac{2 \cdot 1}{0+1}\upsilon_{2,αρχ} + \frac{0-1}{0+1}\upsilon_{1,αρχ} \Rightarrow \upsilon_{1,τελ} \approx 2\upsilon_{2,αρχ} - \upsilon_{1,αρχ}$$

$$\upsilon_{2,τελ} = \frac{2\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_2}}\upsilon_{1,αρχ} + \frac{\frac{m_2}{m_2} - \frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_2}}\upsilon_{2,αρχ} \Rightarrow \upsilon_{2,τελ} \approx \frac{2 \cdot 0}{0+1}\upsilon_{1,αρχ} + \frac{1-0}{0+1}\upsilon_{2,αρχ} \Rightarrow \upsilon_{2,τελ} \approx \upsilon_{2,αρχ}$$

Το δεύτερο σώμα πολύ μεγαλύτερο ($m_2 >> m_1$) και αρχικά ακίνητο ($\upsilon_{2,αρχ} = 0$):

$$\left.\begin{aligned}\upsilon_{1,τελ} &\approx 2\upsilon_{2,αρχ} - \upsilon_{1,αρχ} \\ \upsilon_{2,τελ} &\approx \upsilon_{2,αρχ}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\upsilon_{2,αρχ}=0} \begin{cases}\upsilon_{1,τελ} \approx -\upsilon_{1,αρχ} \\ \upsilon_{2,τελ} \approx 0\end{cases}$$

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Ελαστική κρούση – ειδικές περιπτώσεις

Το πρώτο σώμα πολύ μεγαλύτερο $\left(m_1 >> m_2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} \to 0\right)$:

$$\upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda} = \frac{2\frac{m_2}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1}+\frac{m_2}{m_1}}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi} + \frac{\frac{m_1}{m_1}-\frac{m_2}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1}+\frac{m_2}{m_1}}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} \Rightarrow \upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda} \approx \frac{2\cdot 0}{1+0}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi} + \frac{1-0}{1+0}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} \Rightarrow \upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda} \approx \upsilon_{1,\alpha\rho\chi}$$

$$\upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda} = \frac{2\frac{m_1}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1}+\frac{m_2}{m_1}}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} + \frac{\frac{m_2}{m_1}-\frac{m_1}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1}+\frac{m_2}{m_1}}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi} \Rightarrow \upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda} \approx \frac{2\cdot 1}{1+0}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} + \frac{0-1}{1+0}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi} \Rightarrow \upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda} \approx 2\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} - \upsilon_{2,\alpha\rho\chi}$$

Το πρώτο σώμα πολύ μεγαλύτερο ($m_1 >> m_2$) και το δεύτερο αρχικά ακίνητο ($\upsilon_{2,\alpha\rho\chi} = 0$):

$$\left.\begin{matrix}\upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda} \approx \upsilon_{1,\alpha\rho\chi} \\ \upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda} \approx 2\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} - \upsilon_{2,\alpha\rho\chi}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}=0} \left\{\begin{matrix}\upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda} \approx \upsilon_{1,\alpha\rho\chi} \\ \upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda} \approx 2\upsilon_{1,\alpha\rho\chi}\end{matrix}\right.$$

Συντελεστής κρούσης

Ένα μέγεθος που μας βοηθάει στη μελέτη των κρούσεων είναι ο **συντελεστής κρούσης**:

$$e = -\frac{\upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda} - \upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda}}{\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} - \upsilon_{2,\alpha\rho\chi}}$$

Η τιμή του e υπολογίζεται πειραματικά και είναι: $0 \le e \le 1$

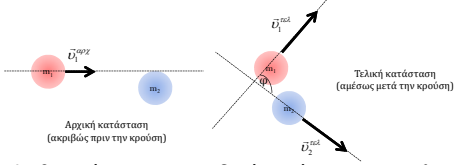
- $e = 1$: Η κρούση είναι ελαστική
- $e = 0$: Η κρούση είναι πλαστική

Με τη χρήση του συντελεστή κρούσης οι σχέσεις της ελαστικής κρούσης γίνονται (μπορείτε να το αποδείξετε?):

$$\upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda} = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi} + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} \qquad \upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}$$

$$\Rightarrow \quad \upsilon_{1,\tau\varepsilon\lambda} = \frac{(1+e)m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi} + \frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} \qquad \upsilon_{2,\tau\varepsilon\lambda} = \frac{(1+e)m_1}{m_1+m_2}\upsilon_{1,\alpha\rho\chi} + \frac{m_2-em_1}{m_1+m_2}\upsilon_{2,\alpha\rho\chi}$$

Πλάγια ελαστική κρούση ίσων μαζών



- Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση της ελαστικής πλάγιας (έκκεντρης) κρούσης δύο ίσων μαζών εκ των οποίων η μια αρχικά είναι ακίνητη, δλδ θα έχουμε:
  - $m_1 = m_2 = m$, και
  - $\upsilon_{2,\alpha\rho\chi} = 0$.

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Πλάγια ελαστική κρούση ίσων μαζών

$\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{1,αρχ}$

$\vec{p}_{1,τελ}$, $\vec{p}_{2,τελ}$, φ, $\vec{p}_{τελ} = \vec{p}_{1,τελ} + \vec{p}_{2,τελ}$

Ελαστική κρούση: $K_{αρχ} = K_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1,αρχ}^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1,τελ}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2,τελ}^2 \xrightarrow{m_1=m_2} \upsilon_{1,αρχ}^2 = \upsilon_{1,τελ}^2 + \upsilon_{2,τελ}^2$

ΑΔΟ: $\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} \Rightarrow p_{αρχ} = p_{τελ} \Rightarrow p_{αρχ} = \sqrt{p_{1,τελ}^2 + p_{2,τελ}^2 + 2p_{1,τελ}p_{2,τελ}συνφ} \xrightarrow{p=mυ}$

$m_1\upsilon_{1,αρχ} = \sqrt{m_1^2\upsilon_{1,τελ}^2 + m_2^2\upsilon_{2,τελ}^2 + 2m_1\upsilon_{1,τελ}m_2\upsilon_{2,τελ}συνφ} \xrightarrow{m_1=m_2=m} \cancel{m}\upsilon_{1,αρχ} = \cancel{m}\sqrt{\upsilon_{1,τελ}^2 + \upsilon_{2,τελ}^2 + 2\upsilon_{1,τελ}\upsilon_{2,τελ}συνφ} \Rightarrow$

$\upsilon_{1,αρχ}^2 = \upsilon_{1,τελ}^2 + \upsilon_{2,τελ}^2 + 2\upsilon_{1,τελ}\upsilon_{2,τελ}συνφ$

Για να ισχύουν οι δυο σχέσεις ταυτόχρονα θα πρέπει να ισχύει:

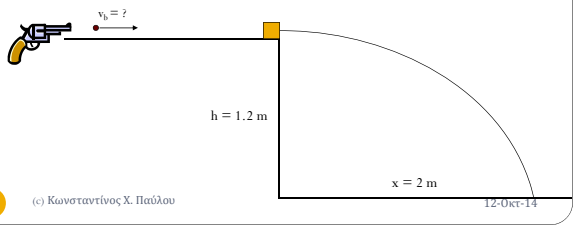
$$2\upsilon_{1,τελ}\upsilon_{2,τελ}συνφ = 0 \xrightarrow{\upsilon_{1,τελ}\neq 0,\ \upsilon_{2,τελ}\neq 0} συνφ = 0 \Rightarrow φ = 90°$$

Άρα, τα δυο σώματα αμέσως μετά την κρούση τους κινούνται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους.

A bullet (m = 0.01kg) is fired into a block (0.1 kg) sitting at the edge of a table. The block (with the embedded bullet) flies off the table (h = 1.2 m) and lands on the floor 2 m away from the edge of the table.

a.) What was the speed of the bullet?

b.) What was the energy loss in the bullet-block collision?



Η μελέτη του μικρόκοσμου

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Η μελέτη του μικρόκοσμου

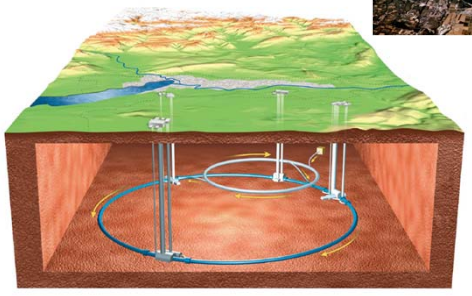
106 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

Aerial view of CERN

May 1991. Aerial view of CERN and the surrounding region. 3 rings are visible, the smaller shows the underground position of the PS, the middle ring is the SPS with a circumference of 7 km and the largest ring (27 km) that of the LEP with part of the Lake Geneva in the background.

107 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

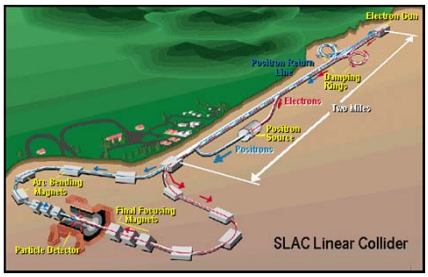
CERN underground



108 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

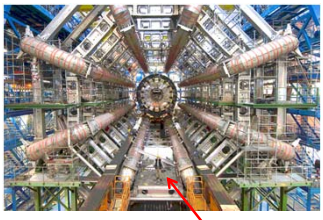
Fermi National Accelerator Laboratory

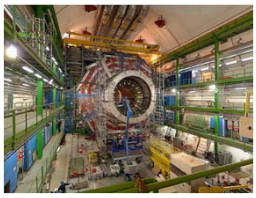
Stanford Linear Collider (SLC)



The Stanford Linear Collider (SLC) began construction in 1983 and was completed in 1989. This device was a novel kind of machine that serves both as a test bed for a new accelerator technique and as a facility to reach the energy region where the massive Z0 particle can be produced in quantity and in a simple environment.

collider detector

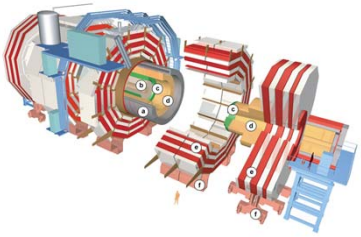




Συγκρίνετε με τις διαστάσεις του ανθρώπου...

© Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

collider detector

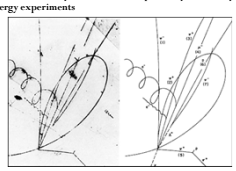


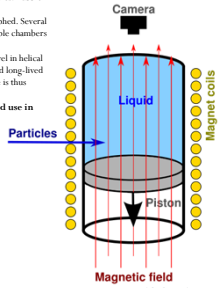
3D schematic view of a LHC pp collision

112 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

bubble chamber

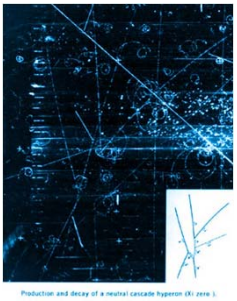
The bubble chamber is similar to a cloud chamber in application and basic principle. It is normally made by filling a large cylinder with a liquid heated to just below its boiling point. As particles enter the chamber, a piston suddenly decreases its pressure, and the liquid enters into a superheated, metastable phase. Charged particles create an ionization track, around which the liquid vaporizes, forming microscopic bubbles. Bubble density around a track is proportional to a particle's energy loss.
Bubbles grow in size as the chamber expands, until they are large enough to be seen or photographed. Several cameras are mounted around it, allowing a tridimensional image of an event to be captured. Bubble chambers with resolutions down to a few μm have been operated.
The whole chamber is subject to a constant magnetic field, which causes charged particles to travel in helical paths whose radius is determined by their charge-to-mass ratios. Given that for all known charged long-lived subatomic particles, the magnitude of their charge is that of an electron, their radius of curvature is thus proportional to their momentum.
Although bubble chambers were very successful in the past, they are of only limited use in current very-high-energy experiments



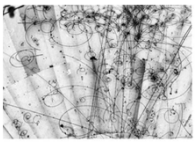


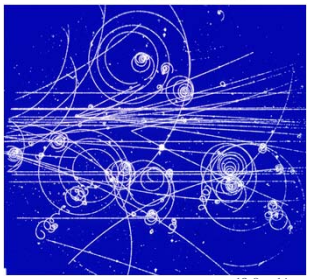
113 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

particle collisions



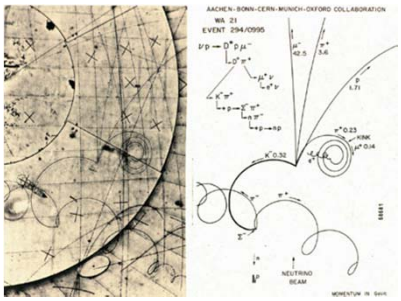
Production and decay of a neutral cascade hyperon (Xi zero).





114 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

particle collisions

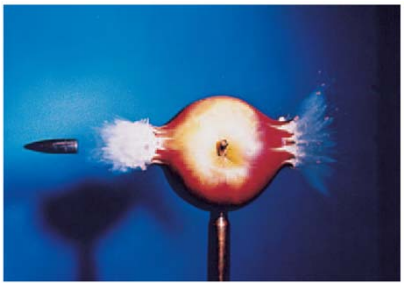


115 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14

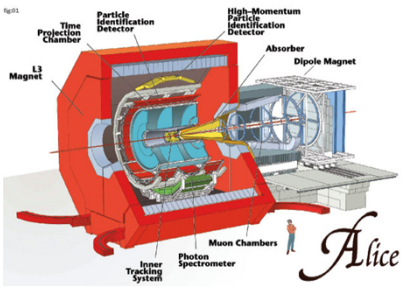
Ένας απλός επιταχυντής...

Many people think of particle accelerators as being large "atom smashers", but the most common particle accelerators are the ubiquitous television tubes and computer monitors found in many homes. In a TV or computer monitor (seen here, removed from its normal casing), the particles accelerated are electrons, which are released from a hot metal cathode (at the far left). Between the source of electrons and the screen on the right, the particles are accelerated by electric fields, and deflected by electromagnetic fields - just as in large-scale particle accelerators. The screen is like the particle detectors used in experiments at particle physics laboratories.

116 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14



117 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14



118 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 12-Οκτ-14