

ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
 Φυσικός - Ραδιοηλεκτρολόγος (MSc)
 Καστοριά, Οκτώβριος 14

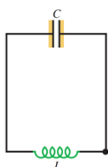
Ηλεκτρικές ταλαντώσεις
 Το κύκλωμα L-C

2 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Οκτ-14

Το κύκλωμα LC

• Το κύκλωμα LC αποτελείται από:

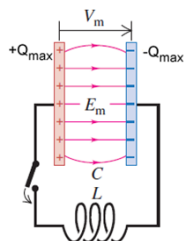
1. έναν πυκνωτή, χωρητικότητας C, και
2. ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L.



3 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Οκτ-14

Η ηλεκτρική ταλάντωση

- Ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με φορτίο Q_{\max} .
- Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ κλείνουμε τον διακόπτη.



4 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Οκτ-14

Η ηλεκτρική ταλάντωση

- Ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται μέσω του πηνίου.
- Λόγω της αυτεπαγωγής, το ρεύμα δεν μπορεί να αλλάξει στιγμιαία/ακαριαία
 - ξεκινάει με μηδενική τιμή και σιγά - σιγά φτάνει τη μέγιστη τιμή I_{\max} .
- Ταυτόχρονα, ο πυκνωτής εκφορτίζεται:
 - Ανά πάσα χρονική στιγμή η διαφορά δυναμικού στα άκρα του ισούται με την ΗΕΔ εξ επαγωγής κι έτσι ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος μειώνεται.
- Όταν ο πυκνωτής εκφορτίζεται πλήρως, το ρεύμα έχει πάρει τη μέγιστη τιμή του.

5 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Οκτ-14

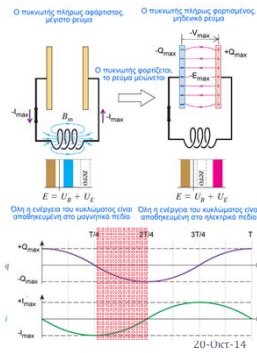
Η ηλεκτρική ταλάντωση

- Όταν ο πυκνωτής εκφορτίζεται πλήρως, το ρεύμα έχει πάρει τη μέγιστη τιμή του.
- Κατά τη διάρκεια της εκφόρτισης, το αυξανόμενο ρεύμα που διαρρέει το πηνίο έχει δημιουργήσει ένα μαγνητικό πεδίο.
 - Η ενέργεια που ήταν αρχικά αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή έχει πλέον "μεταφερθεί" στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου.

6 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Οκτ-14

Η ηλεκτρική ταλάντωση

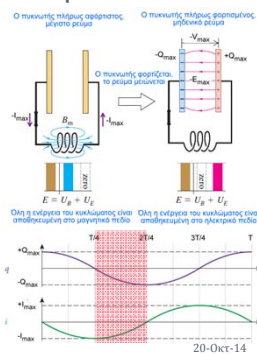
- Παρόλο που ο πυκνωτής έχει αποφορτιστεί πλήρως το ρεύμα συνεχίζει (δεν μπορεί να μηδενιστεί στιγμιαία)
- Ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται με αντίθετη από την αρχική του πολικότητα.
- Καθώς το ρεύμα μειώνεται, μειώνεται και το μαγνητικό πεδίο και λόγω επαγωγής δημιουργείται ένα επαγόμενο ρεύμα με την ίδια κατεύθυνση (κανόνας του Lenz)
- αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση του ρυθμού μείωσης του ρεύματος.



7 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Η ηλεκτρική ταλάντωση

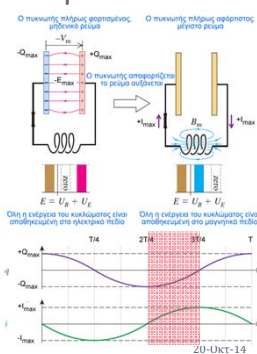
- Τελικά, το ρεύμα (και το μαγνητικό πεδίο) μηδενίζεται και ο πυκνωτής έχει αποκτήσει το ίδιο (κατ' απόλυτη τιμή) με το αρχικό του φορτίο
- με αντίθετη όμως πολικότητα.



8 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Η ηλεκτρική ταλάντωση

- Η διαδικασία επαναλαμβάνεται...
 - ...προς την αντίθετη κατεύθυνση.
- Ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται... κ.ο.κ.
- Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **ηλεκτρική ταλάντωση**.



9 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

Η περίοδος του κυκλώματος LC

Η περίοδος ταλάντωσης ενός κυκλώματος LC εξαρτάται από το πώς είναι φτιαγμένο το κύκλωμα:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Συνεπώς, η γωνιακή συχνότητα είναι: $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε πως: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \rightarrow LC = \frac{1}{\omega^2}$

13

(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

20-Οκτ-14

Οι εξισώσεις...

Γενικά, οι σχέσεις που ισχύουν είναι:

Το φορτίο του πυκνωτή: $q(t) = Q\sin(\omega t + \phi_0)$

Περίοδος: $T = 2\pi\sqrt{LC}$

Το ρεύμα του πηνίου: $i(t) = -I\eta\mu(\omega t + \phi_0)$

Γωνιακή συχνότητα: $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$I = \omega Q$$

Δεν πρέπει να ξεχνάμε πως το ρεύμα είναι ο ρυθμός μεταβολής του φορτίου: $i(t) = \frac{dq}{dt}$

Η τάση στα άκρα του πυκνωτή, δίνεται ανά πάσα χρονική στιγμή: $V_c(t) = \frac{q(t)}{C}$

Άρα: $V_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q\sin(\omega t + \phi_0)}{C} \rightarrow V_c(t) = \frac{Q}{C}\sin(\omega t + \phi_0) \xrightarrow{V_c = \frac{Q}{C}} V_c(t) = V_c\sin(\omega t + \phi_0)$

Μέγιστη τιμή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή: $V_c = \frac{Q}{C}$

14

(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

20-Οκτ-14

Οι εξισώσεις της ενέργειας...

Γενικά, οι σχέσεις που ισχύουν για την ενέργεια είναι:

Ενέργεια του πυκνωτή - ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου: $U_E(q) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

$U_E(q) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \xrightarrow{q(t) = Q\sin(\omega t + \phi_0)} U_E(t) = \frac{1}{2} \frac{Q^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)}{C} \rightarrow U_E(t) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \sin^2(\omega t + \phi_0)$

$$\xrightarrow{\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}} U_E(t) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \frac{2\cos(2\omega t + 2\phi_0) - 1}{2}$$

Μέγιστη ενέργεια του πυκνωτή: $U_E^{\max} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \rightarrow U_E^{\max} = \text{σταθ.}$

15

(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

20-Οκτ-14

Οι εξισώσεις της ενέργειας...

Γενικά, οι σχέσεις που ισχύουν για την ενέργεια είναι:

Ενέργεια του πηνίου - ενέργεια μαγνητικού πεδίου: $U_B(t) = \frac{1}{2}LI^2$

$$U_B(t) = \frac{1}{2}LI^2 \xrightarrow{I(t) = I_m \sin(\omega t + \phi_0)} U_B(t) = \frac{1}{2}LI^2 \eta \mu^2(\omega t + \phi_0)$$

$$\xrightarrow{\eta = 2\theta + 1 - 2\theta \mu^2 \theta} U_B(t) = \frac{1}{2}LI^2 \frac{1 - \sigma \nu \nu (2\omega t + 2\phi_0)}{2}$$

Μέγιστη ενέργεια του πηνίου: $U_B^{\max} = \frac{1}{2}LI^2 \rightarrow U_B^{\max} = \text{σταθ.}$

16

(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

20-Οκτ-14

Οι εξισώσεις της ενέργειας...

Η ολική ενέργεια του κυκλώματος θα είναι το άθροισμα της ηλεκτρικής και της μαγνητικής:

$$E = U_B + U_E \rightarrow E = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \rightarrow E = \begin{cases} U_B^{\max} = \frac{1}{2}LI^2 \\ U_E^{\max} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \end{cases} \rightarrow E = \text{σταθ.}$$

Απόδειξη της σχέσης: $I = \omega Q$

$$U_B^{\max} = U_E^{\max} \rightarrow \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \rightarrow LC \cdot I^2 = Q^2 \xrightarrow{I = \omega Q} \frac{LC}{\omega^2} \cdot I^2 = Q^2 \rightarrow I^2 = \omega^2 Q^2$$

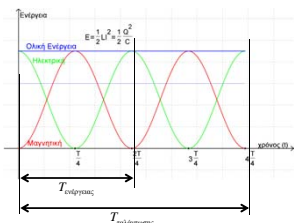
$$\xrightarrow{\frac{I-\omega Q}{Q-\omega} \rightarrow I = \omega Q}$$

17

(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

20-Οκτ-14

Ενέργεια & χρόνος...



$$E(t) = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \text{σταθ.}$$

$$U_B(t) = \frac{1}{2}LI^2 \eta \mu^2(\omega t + \phi_0)$$

$$= \frac{1}{2}LI^2 \frac{1 - \sigma \nu \nu (2\omega t + 2\phi_0)}{2}$$

$$U_E(t) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \sigma \nu \nu^2(\omega t + \phi_0)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \frac{\sigma \nu \nu (2\omega t + 2\phi_0) - 1}{2}$$

$$T_{\text{ενέργειας}} = \frac{1}{2} T_{\text{ολόκληρης}} \rightarrow \frac{f}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{f}{\omega} \rightarrow \begin{cases} f_{\text{ολόκληρης}} = \frac{1}{2} f_{\text{ενέργειας}} \\ \omega_{\text{ολόκληρης}} = \frac{1}{2} \omega_{\text{ενέργειας}} \end{cases}$$

18

(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου

20-Οκτ-14

Ενέργεια και φορτίο...

Ενέργεια $E = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

Ολική Ηλεκτρική $U_E(q) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

Μαγνητική $U_B(q) = E - U_E(q) = E - \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

Φορτίο (q)

Άσκηση: Να γίνουν τα αντίστοιχα, συναρτήσει του I.

19 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Οκτ-14

Σχέση ρεύματος – φορτίου

Να αποδειχθεί πως ισχύει η (χρήσιμη) σχέση: $i(q) = \pm \omega\sqrt{Q^2 - q^2}$

$E = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \xrightarrow{\text{επειδή } \frac{dE}{dt} = 0} \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \rightarrow \frac{Q^2}{C} = LI^2 + \frac{q^2}{C} \xrightarrow{\cdot C} Q^2 = LCi^2 + q^2$

$\rightarrow LCi^2 = Q^2 - q^2 \rightarrow i^2 = \frac{1}{LC}(Q^2 - q^2)$

$\rightarrow i = \pm \sqrt{\frac{1}{LC}(Q^2 - q^2)} \rightarrow i = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{Q^2 - q^2}$

$\xrightarrow{\cdot \frac{1}{\omega C}} i(q) = \pm \omega\sqrt{Q^2 - q^2}$

Άσκηση: Να βρείτε την αντίστοιχη σχέση $q = q(i)$

20 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Οκτ-14

Αντιστοιχία (D - m) & (L - C)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \xrightarrow{\frac{m \rightarrow L}{D \rightarrow \frac{1}{C}}} T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\frac{1}{C}}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$

$i = \pm \omega\sqrt{Q^2 - q^2} \xrightarrow{\frac{i \rightarrow v}{q \rightarrow x}} v = \pm \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

Σύστημα D - m	Σύστημα L - C
Απομάκρυνση - x	Φορτίο - q
Ταχύτητα - v	Ένταση ηλ. ρεύματος - i
Σταθερά επαναφοράς - D	Ποσότητα $\frac{1}{C}$
Μάζα - m	Συντελεστής αυτεπαγωγής - L
Κινητική ενέργεια - $K = \frac{1}{2}mv^2$	Μαγνητική ενέργεια - $U_B = \frac{1}{2}Li^2$
Δυναμική ενέργεια - $U = \frac{1}{2}Dx^2$	Ηλεκτρική ενέργεια - $U_E = \frac{1}{2C}q^2$

11 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Οκτ-14
