ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
Φυσικός – Ραδιοηλεκτρολόγος (MSc)
Καστοριά, Νοέμβριος 14

Φθίνουσες ταλαντώσεις

Φθίνουσες ταλαντώσεις

Αν το σώμα συνεχίσει την ταλάντωσή του, χωρίς εξωτερική επέμβαση, το πλάτος της ταλάντωσης συνεχώς θα μειώνεται και μετά από ορισμένο χρόνο θα σταματήσει.

Μια τέτοια ταλάντωση ονομάζεται **φθίνουσα** ή **αποσβεννύμενη** ταλάντωση.

Φθίνουσα είναι η ταλάντωση που κάνει ένα σώμα όταν είναι κρεμασμένο από ελατήριο και κινείται μέσα στον αέρα, όπως και η ταλάντωση του εκκρεμούς.

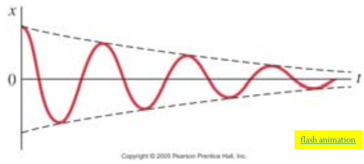
Όλες οι ταλαντώσεις στο μακρόκοσμο είναι φθίνουσες γιατί καμιά κίνηση δεν είναι απαλλαγμένη από τριβές και αντιστάσεις.

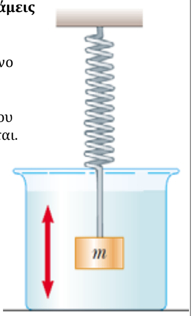
Φθίνουσες ταλαντώσεις

Η απόσβεση (ελάττωση του πλάτους) οφείλεται σε δυνάμεις που αντιτίθενται στην κίνηση.

Οι δυνάμεις αυτές μεταφέρουν ενέργεια από το ταλαντούμενο σύστημα στο περιβάλλον.

Έτσι, η μηχανική ενέργεια του συστήματος με την πάροδο του χρόνου ελαττώνεται και το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται.



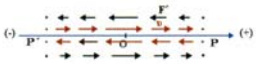


Φθίνουσες ταλαντώσεις

Ιδιαίτερη σημασία έχουν οι φθίνουσες ταλαντώσεις στις οποίες η αντιτιθέμενη δύναμη είναι ανάλογη της ταχύτητας.

$$\vec{F} = -b\vec{\upsilon}$$

Τέτοια δύναμη είναι η δύναμη αντίστασης που ασκείται σε μικρά αντικείμενα που κινούνται μέσα στον αέρα ή μέσα σε υγρό.



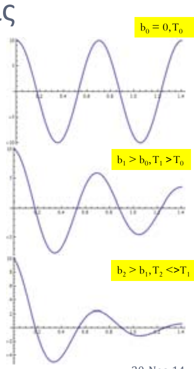
Το b είναι μια σταθερά που ονομάζεται **σταθερά απόσβεσης**
- εξαρτάται
  1. από τις ιδιότητες του μέσου
  2. από το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου που κινείται.

Μονάδες:
$[b] = kg / \sec$

Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το πλάτος μιας ταλάντωσης εξαρτάται από την τιμή της σταθεράς b.

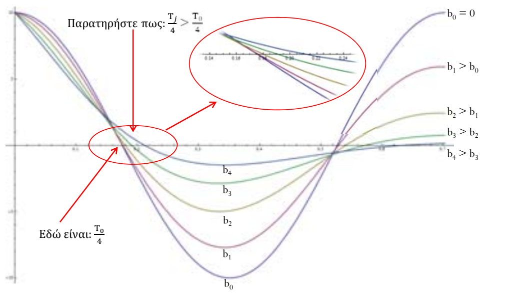
Φθίνουσες ταλαντώσεις

1. Η περίοδος, για ορισμένη τιμή της σταθεράς b, διατηρείται σταθερή και ανεξάρτητη από το πλάτος.
2. Όταν η σταθερά b μεγαλώνει:
   - το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται πιο γρήγορα και
   - η περίοδος παρουσιάζει μια μικρή αύξηση που στα πλαίσια αυτού του βιβλίου θεωρείται αμελητέα.



Φθίνουσες ταλαντώσεις

Όταν η σταθερά b μεγαλώνει: η περίοδος παρουσιάζει μια μικρή αύξηση που στα πλαίσια αυτού του βιβλίου θεωρείται αμελητέα.



7 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

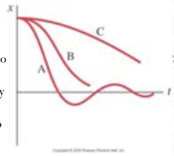
Φθίνουσες ταλαντώσεις

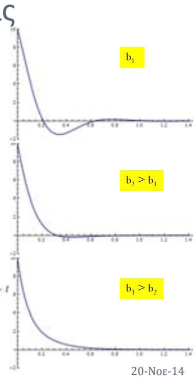
Σε ακραίες περιπτώσεις στις οποίες η σταθερά απόσβεσης παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η κίνηση γίνεται **απεριοδική**, δηλαδή, ο ταλαντωτής, επιστρέφει στη θέση ισορροπίας χωρίς ποτέ να την υπερβεί.

Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβεί αν το σύστημα ελατήριο σώμα βρισκόταν μέσα σ' ένα παχύρρευστο υγρό.

If the damping is large, it no longer resembles SHM at all.

A: underdamping: there are a few small oscillations before the oscillator comes to rest.($b^2 << 4mk$)
B: critical damping: this is the fastest way to get to equilibrium. ($b^2 <= 4mk$)
C: overdamping: the system is slowed so much that it takes a long time to get to equilibrium. ($b^2 > 4mk$)





8 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

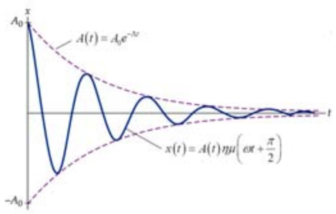
Φθίνουσες ταλαντώσεις

Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. Ισχύει δηλαδή η σχέση

$$A(t) = A_0 e^{-\Lambda t}$$

Το Λ είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τη σταθερά απόσβεσης και τη μάζα του ταλαντούμενου σώματος:

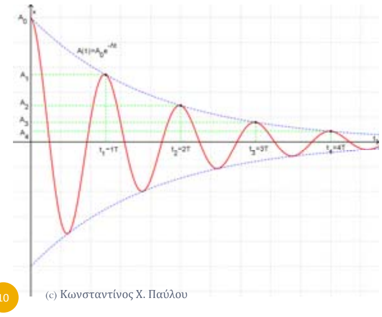
$$\Lambda = \frac{b}{2m} \qquad [\Lambda] = \sec^{-1}$$



9 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Φθίνουσες ταλαντώσεις

Από τη διπλανή σχέση προκύπτει ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων **προς την ίδια κατεύθυνση** διατηρείται σταθερός.



$$A_n(t) = A_0 e^{-\Lambda t_n}$$
$$t_n = n \cdot T$$

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3} = \ldots = σταθ$$

10 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Φθίνουσες ταλαντώσεις

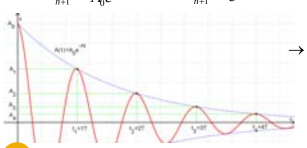
Απόδειξη (είναι η άσκηση 1.24, σελίδα 34)

Για τη χρονική στιγμή t_n έχουμε: $A_n = A_0 e^{-\Lambda t_n} \xrightarrow{t_n = nT} A_n = A_0 e^{-\Lambda nT}$

Για τη χρονική στιγμή t_{n+1} έχουμε: $A_{n+1} = A_0 e^{-\Lambda t_{n+1}} \xrightarrow{t_n = (n+1)T} A_{n+1} = A_0 e^{-\Lambda(n+1)T}$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda nT}}{A_0 e^{-\Lambda(n+1)T}} \rightarrow \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{e^{-\Lambda nT}}{e^{-\Lambda(n+1)T}} \rightarrow \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{e^{-\Lambda nT}}{e^{-\Lambda nT - \Lambda T}} \rightarrow \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{e^{-\Lambda nT}}{e^{-\Lambda nT} \cdot e^{-\Lambda T}}$$



$$\rightarrow \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{1}{e^{-\Lambda T}} \rightarrow \boxed{\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\Lambda T} = σταθ}$$

11 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Φθίνουσες ταλαντώσεις – ενέργεια

Απόδειξη (είναι η άσκηση 1.24, σελίδα 34)

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ είναι: $E_0 = \frac{1}{2} D A_0^2$

Για τη χρονική στιγμή t_n έχουμε: $E_n = \frac{1}{2} D A_n^2 \xrightarrow{A_n = A_0 e^{-\Lambda t_n}} E_n = \frac{1}{2} D \left(A_0 e^{-\Lambda t_n}\right)^2$

$$\rightarrow E_n = \frac{1}{2} D A_0^2 e^{-2\Lambda t_n}$$

$$\rightarrow \boxed{E_n = E_0 e^{-2\Lambda t_n}}$$

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι $\boxed{\frac{E_n}{E_{n+1}} = e^{2\Lambda T} = σταθ}$

12 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

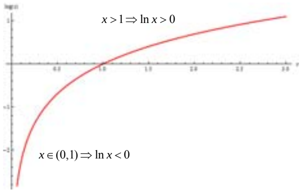
Ιδιότητες του λογάριθμου

$\ln e^x = x$ $\qquad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$e^{\ln x} = x$ $\qquad \ln a^b = b \ln a$

$\left(e^a\right)^b = e^{a \cdot b}$ $\qquad \ln 1 = 0$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ $\qquad \ln e = 1$



13 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Χρόνος υποδιπλασιασμού

Χρόνος υποδιπλασιασμού ενός μεγέθους που ελαττώνεται εκθετικά με το χρόνο ονομάζεται ο χρόνος που απαιτείται ώστε η αρχική τιμή του μεγέθους να μειωθεί στο μισό.

Υπολογισμός του χρόνου υποδιπλασιασμού

Αν (τ) ο χρόνος υποδιπλασιασμού, εξ' ορισμού θα είναι: $A(\tau) = \dfrac{A_0}{2}$

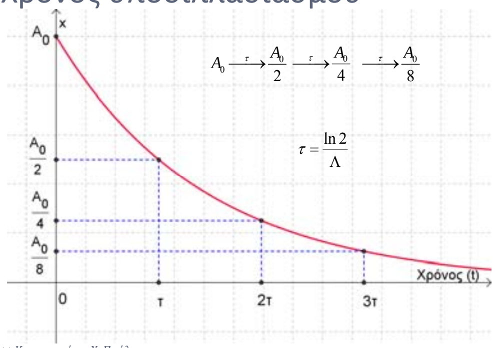
Άρα, θα έχουμε: $A_n = A_0 e^{-\Lambda t_n} \xrightarrow[A=\frac{A_0}{2}]{t=\tau} \dfrac{A_0}{2} = A_0 e^{-\Lambda\tau} \rightarrow \dfrac{1}{2} = e^{-\Lambda\tau} \rightarrow \ln\dfrac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda\tau}$

$\rightarrow \ln 1 - \ln 2 = -\Lambda\tau \rightarrow -\ln 2 = -\Lambda\tau \rightarrow \boxed{\tau = \dfrac{\ln 2}{\Lambda}}$

Ο χρόνος υποδιπλασιασμού, είναι ανεξάρτητος της αρχικής τιμής του πλάτους, εξαρτάται μόνο από το Λ.

14 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Χρόνος υποδιπλασιασμού



15 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Επιθυμητές φθίνουσες ταλαντώσεις

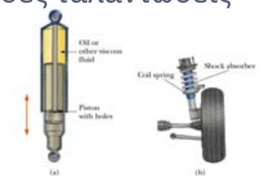
Το σύστημα ανάρτησης του αυτοκινήτου είναι ένα σύστημα αποσβεννύμενων ταλαντώσεων.

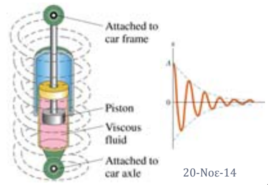
Τα αμορτισέρ εξασφαλίζουν δύναμη απόσβεσης – που εξαρτάται από την ταχύτητα- τέτοια, ώστε όταν το αυτοκίνητο περνά από ένα εξόγκωμα του δρόμου, να μη συνεχίζει να ταλαντώνεται για πολύ χρόνο.

Καθώς τα αμορτισέρ παλιώνουν και φθείρονται, η τιμή του b ελαττώνεται και η ταλάντωση διαρκεί περισσότερο.

Η φθορά αυτή μειώνει την ασφάλεια, επειδή οι ρόδες έχουν λιγότερη επαφή με το έδαφος.

Ενώ όμως στην περίπτωση του αυτοκινήτου είναι επιθυμητή η μεγάλη απόσβεση, σε άλλα συστήματα, όπως σε ένα εκκρεμές ρολόι, επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση της απόσβεσης.





16 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Επιθυμητές φθίνουσες ταλαντώσεις

Συστήματα προστασίας κτηρίων από σεισμούς

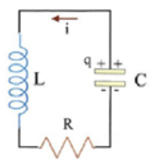
17 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Υπάρχουν δυο λόγοι για τους οποίους η ενέργεια ενός συστήματος LC μειώνεται:

1. Πρώτον (και κυριότερο), οι αγωγοί του συστήματος έχουν αντίσταση κι επομένως ένα μέρος της ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότητα.
2. Δεύτερον, τα κυκλώματα ηλεκτρικών ταλαντώσεων εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, δηλαδή χάνουν ενέργεια.

Το ρόλο της σταθεράς b παίζει η αντίσταση R.



Σχ. 1.22 Κύκλωμα φθινουσών ηλεκτρικών ταλαντώσεων.

18 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

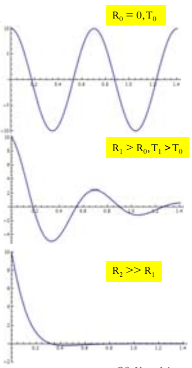
Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Το ρόλο της σταθεράς b παίζει η αντίσταση R αύξηση της οποίας συνεπάγεται πιο γρήγορη απόσβεση της ταλάντωσης και μικρή αύξηση της περιόδου της.

Τα κυκλώματα LC που χρησιμοποιούνται στην πράξη παρουσιάζουν μικρή αντίσταση και η αύξηση της περιόδου μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα.

Για ορισμένη τιμή της αντίστασης, η περίοδος είναι σταθερή.

Αν η τιμή της αντίστασης υπερβεί κάποιο όριο η ταλάντωση γίνεται απεριοδική.



Άσκηση 1.32/σελ 37

1.32 Σώμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση το πλάτος της οποίας μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση $A = A_o e^{-\Lambda t}$. Τη στιγμή $t = 0$ η ταλάντωση είχε πλάτος $A_o = 32cm$ ενώ τη στιγμή $t_1 = 10s$ το πλάτος γίνεται $A_1 = 16cm$. Ποια χρονική στιγμή το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A = 1cm$.
[Απ: $50s$]

Άσκηση 1.32/σελ 37

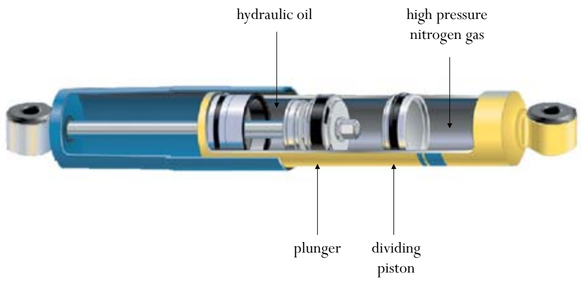
$$A_1 = A_0 e^{-\Lambda t_1} \to 16 = 32 e^{-\Lambda t_1} \to \frac{1}{2} = e^{-\Lambda t_1} \to \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\Lambda t_1} \to \ln 1 - \ln 2 = -\Lambda t_1$$

$$\to -\ln 2 = -\Lambda t_1 \to \Lambda = \frac{\ln 2}{t_1} \to \Lambda = \frac{\ln 2}{10}\,\text{sec}^{-1}$$

$$A_2 = A_0 e^{-\Lambda t_2} \to 1 = 32 e^{-\Lambda t_2} \to \frac{1}{32} = e^{-\Lambda t_2} \to \ln\frac{1}{32} = \ln e^{-\Lambda t_2} \to \ln 1 - \ln 32 = -\Lambda t_2$$

$$\to -\ln 32 = -\Lambda t_2 \to t_2 = \frac{\ln 32}{\Lambda} \to t_2 = \frac{10 \ln 32}{\ln 2} \to t_2 = \frac{10 \ln 2^5}{\ln 2}$$

$$\to t_2 = \frac{10 \cdot 5 \cdot \ln 2}{\ln 2} \to t_2 = 50\,\text{sec}$$



Πρόχειρα

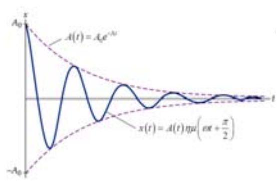
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Lambda = \frac{b}{2m}$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + b^2\omega^2}}$$

$$x(t) = A_0 e^{-\Lambda t} \eta\mu\left(\tilde{\omega} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\upsilon(t) = -A_0 e^{-\Lambda t}\left(\Lambda \sigma\upsilon\nu\tilde{\omega}t + \tilde{\omega} \cdot \eta\mu\tilde{\omega}t\right)$$



Mathematica files:
c:\mathematica\resonance-1.nb
c:\mathematica\resonance-2.nb