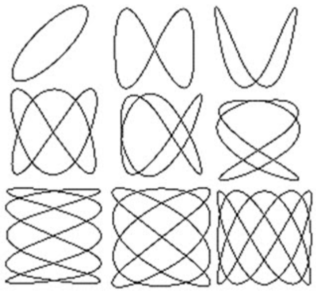
ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
Φυσικός – Ραδιοηλεκτρολόγος (MSc)
Καστοριά, Νοέμβριος 14



Σύνθεση ταλαντώσεων

Αρχή της επαλληλίας

Αν ένα σώμα εκτελεί περισσότερες από μια κινήσεις **ταυτόχρονα**, τότε:

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_1(t)+\vec{x}_2(t)+\vec{x}_3(t)\ldots \rightarrow \begin{cases}\vec{v}(t)=\vec{v}_1(t)+\vec{v}_2(t)+\vec{v}_3(t)+\ldots \\ \vec{a}(t)=\vec{a}_1(t)+\vec{a}_2(t)+\vec{a}_3(t)+\ldots\end{cases}$$

Αν εκτελεί δυο ταλαντώσεις (με την ίδια Θ.Ι. και στην ίδια διεύθυνση), θα έχουμε:

$$x_1(t)=A_1\eta\mu(\omega_1 t+\varphi_{01}) \qquad x_2(t)=A_2\eta\mu(\omega_2 t+\varphi_{02})$$

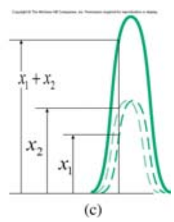
Θα μελετήσουμε δυο περιπτώσεις:

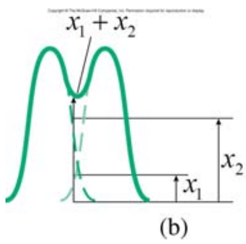
1. οι ταλαντώσεις έχουν την ίδια συχνότητα: $\omega_1=\omega_2$
2. οι ταλαντώσεις έχουν (ελαφρώς) διαφορετικές συχνότητες και ίδια πλάτη: $\begin{cases}A_1=A_2\\ \omega_1\neq\omega_2\end{cases}$

Αρχή της επαλληλίας

$x_1(t)=A_1\eta\mu(\omega_1 t+\varphi_{01})$

$x_2(t)=A_2\eta\mu(\omega_2 t+\varphi_{02})$





Διαφορά φάσης

Διαφορά φάσης ονομάζεται η… διαφορά φάσης (!)

Έστω οι δυο ταλαντώσεις: $x_1(t)=A_1\eta\mu(\omega_1 t+\varphi_{01})$ και $x_2(t)=A_2\eta\mu(\omega_2 t+\varphi_{02})$

Η διαφορά φάσης των δυο αυτών ταλαντώσεων είναι

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2 \xrightarrow[\varphi_2=\omega_2 t+\varphi_{02}]{\varphi_1=\omega_1 t+\varphi_{01}} \Delta\varphi=(\omega_2 t+\varphi_{02})-(\omega_1 t+\varphi_{01})$$

$$\rightarrow \Delta\varphi=(\omega_2-\omega_1)t-(\varphi_{02}-\varphi_{01})$$

$$\xrightarrow[\Delta\varphi_0=\varphi_{02}-\varphi_{01}]{\Delta\omega=\omega_2-\omega_1} \Delta\varphi=\Delta\omega\cdot t-\Delta\varphi_0$$

Συνήθως μας ενδιαφέρει η διαφορά φάσης κατ’ απόλυτη τιμή.

Αν $\omega_2=\omega_1 \rightarrow \Delta\omega=0 \rightarrow \Delta\varphi=-\Delta\varphi_0 \rightarrow |\Delta\varphi|=|\Delta\varphi_0|$

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Θα ξεκινήσουμε με την εξής περίπτωση: $\begin{cases}x_1(t)=A_1\eta\mu(\omega t)\\ x_2(t)=A_2\eta\mu(\omega t+\varphi_{02})\end{cases}$

Αποδεικνύεται πως στην περίπτωση αυτή το σώμα εκτελεί αατ με την ίδια συχνότητα:

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)\xrightarrow[\text{απόδειξη}]{\text{χωρίς}} x(t)=A\eta\mu(\omega t+\theta_0)$$

Το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}}$$

Η αρχική φάση της συνισταμένης ταλάντωσης υπολογίζεται από τη σχέση:

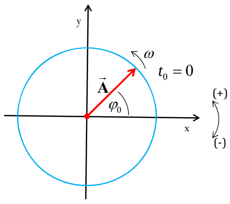
$$\varepsilon\varphi\theta_0=\frac{A_2\eta\mu\varphi_{02}}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}}$$

flash animation

Στρεφόμενο διάνυσμα

Η μελέτη της σύνθεσης των ταλαντώσεων διευκολύνεται με τη χρήση των **στρεφόμενων διανυσμάτων.**

$$x(t) = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$



Τι σημαίνει περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω = π/3 rad/sec;

Απάντηση: σε κάθε sec το διάνυσμα στρέφεται κατά π/3 rad ή αλλιώς κατά 60°.

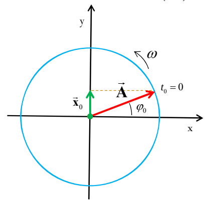
Τα διανύσματα τοποθετούνται με βάση την αρχική τους φάση. Τις γωνίες τις μετράμε από τον θετικό x ημιάξονα. Θετικές προς τον y. Αρνητικές προς τον y'.

7 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

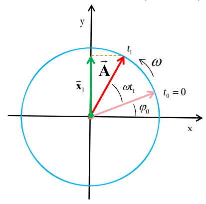
Στρεφόμενο διάνυσμα

Η προβολή του περιστρεφόμενου διανύσματος $\vec{A}$ στον άξονα y'y αποτελεί την αλγεβρική τιμή της απομάκρυνσης του σώματος που ταλαντώνεται.

Για $t_0 = 0$ είναι: $x_0 = A\eta\mu(\varphi_0)$



Για t_1 είναι: $x_1 = A\eta\mu(\omega t_1 + \varphi_0)$



8 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Αν η αρχική φάση και της δεύτερης ταλάντωσης είναι μηδέν, δλδ αν $\varphi_{02} = 0 \rightarrow \Delta\varphi = -\Delta\varphi_0 = 0$

Το πλάτος της νέας ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}} \xrightarrow[\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}=1]{\varphi_{02}=0} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2}$$

$$\rightarrow A = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} \xrightarrow{A>0} A = A_1 + A_2$$

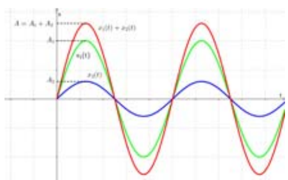
Επίσης, αρχική φάση της νέας ταλάντωσης θα είναι:

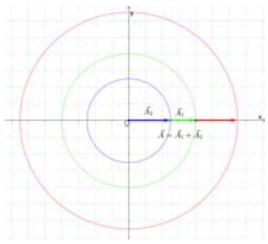
$$\varepsilon\varphi\theta_0 = \frac{A_2\eta\mu\varphi_{02}}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}} \xrightarrow[\eta\mu\varphi_{02}=0]{\varphi_{02}=0} \varepsilon\varphi\theta_0 = 0 \rightarrow \theta_0 = 0$$

9 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Αν η αρχική φάση και της δεύτερης ταλάντωσης είναι μηδέν, δλδ αν $\varphi_{02} = 0 \rightarrow \Delta\varphi = -\Delta\varphi_0 = 0$





$A = A_1 + A_2$ $\theta_0 = 0$

10 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Αν η αρχική φάση της δεύτερης ταλάντωσης είναι : $\varphi_{02} = \frac{\pi}{2} \rightarrow |\Delta\varphi| = \frac{\pi}{2}$

Το πλάτος της νέας ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}} \xrightarrow[\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}=0]{\varphi_{02}=\frac{\pi}{2}} A = +\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

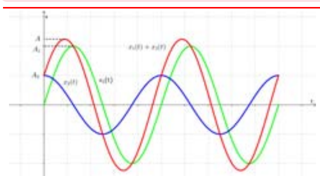
Επίσης, αρχική φάση της νέας ταλάντωσης θα είναι:

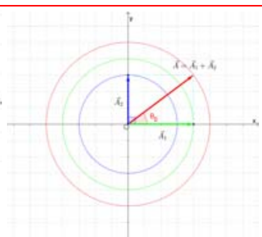
$$\varepsilon\varphi\theta_0 = \frac{A_2\eta\mu\varphi_{02}}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}} \xrightarrow[\eta\mu\varphi_{02}=1,\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}=0]{\varphi_{02}=\frac{\pi}{2}} \varepsilon\varphi\theta_0 = \frac{A_2}{A_1}$$

11 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Αν η αρχική φάση της δεύτερης ταλάντωσης είναι : $\varphi_{02} = \frac{\pi}{2} \rightarrow |\Delta\varphi| = \frac{\pi}{2}$





$A = +\sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ $\varepsilon\varphi\theta_0 = \frac{A_2}{A_1}$

12 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Αν η αρχική φάση της δεύτερης ταλάντωσης είναι : $\varphi_{02} = \pi \rightarrow |\Delta\varphi| = \pi$

Το πλάτος της νέας ταλάντωσης θα είναι:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}} \xrightarrow[\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}=-1]{\varphi_{02}=\pi} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2}$$

$$\rightarrow A = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} \xrightarrow{A>0} A = |A_1 - A_2| \rightarrow A = \begin{cases} A_1 - A_2 & A_1 > A_2 \\ 0 & A_1 = A_2 \\ A_2 - A_1 & A_1 < A_2 \end{cases}$$

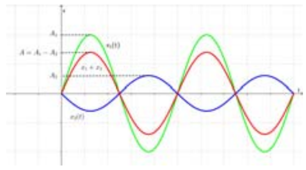
Επίσης, αρχική φάση της νέας ταλάντωσης θα είναι:

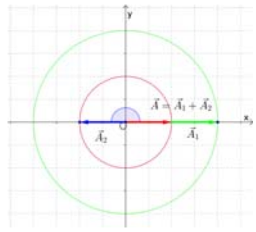
$$\varepsilon\varphi\theta_0 = \frac{A_2\eta\mu\varphi_{02}}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}} \xrightarrow[\eta\mu\varphi_{02}=0]{\varphi_{02}=\pi} \varepsilon\varphi\theta_0 = 0 \rightarrow \theta_0 = \begin{cases} 0 & A_1 > A_2 \\ \text{δεν ορίζεται} & A_1 = A_2 \\ \pi & A_1 < A_2 \end{cases}$$

13 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Αν η αρχική φάση της δεύτερης ταλάντωσης είναι : $\varphi_{02} = \pi \rightarrow |\Delta\varphi| = \pi$



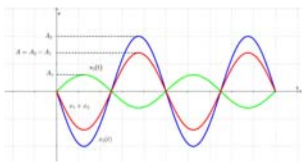


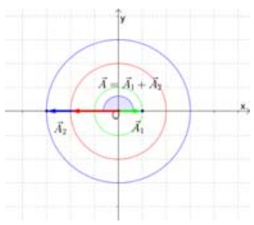
$$A = \begin{cases} A_1 - A_2 & A_1 > A_2 \\ 0 & A_1 = A_2 \\ A_2 - A_1 & A_1 < A_2 \end{cases} \qquad \theta_0 = \begin{cases} 0 & A_1 > A_2 \\ \text{δεν ορίζεται} & A_1 = A_2 \\ \pi & A_1 < A_2 \end{cases}$$

14 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Αν η αρχική φάση της δεύτερης ταλάντωσης είναι : $\varphi_{02} = \pi \rightarrow |\Delta\varphi| = \pi$



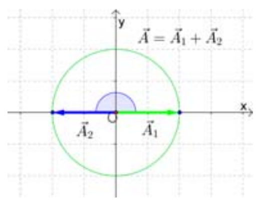


$$A = \begin{cases} A_1 - A_2 & A_1 > A_2 \\ 0 & A_1 = A_2 \\ A_2 - A_1 & A_1 < A_2 \end{cases} \qquad \theta_0 = \begin{cases} 0 & A_1 > A_2 \\ \text{δεν ορίζεται} & A_1 = A_2 \\ \pi & A_1 < A_2 \end{cases}$$

15 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Αν η αρχική φάση της δεύτερης ταλάντωσης είναι : $\varphi_{02} = \pi \rightarrow |\Delta\varphi| = \pi$

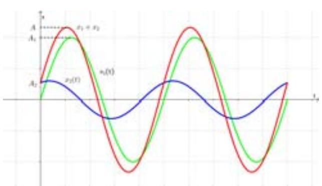


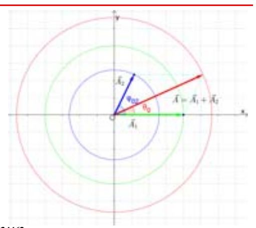
$$A = \begin{cases} A_1 - A_2 & A_1 > A_2 \\ 0 & A_1 = A_2 \\ A_2 - A_1 & A_1 < A_2 \end{cases} \qquad \theta_0 = \begin{cases} 0 & A_1 > A_2 \\ \text{δεν ορίζεται} & A_1 = A_2 \\ \pi & A_1 < A_2 \end{cases}$$

16 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Αν η αρχική φάση της δεύτερης ταλάντωσης είναι τυχαία : $\varphi_{02} \rightarrow |\Delta\varphi| = \varphi_{02}$





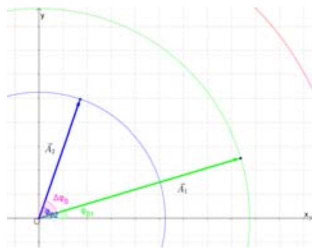
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}} \qquad \varepsilon\varphi\theta_0 = \frac{A_2\eta\mu\varphi_{02}}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\varphi_{02}}$$

17 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Αν η αρχική φάση της πρώτης ταλάντωσης είναι **και** αυτή διάφορη του μηδενός έχουμε:

$$\Delta\varphi = -(\varphi_{02} - \varphi_{01}) \rightarrow \Delta\varphi = -\Delta\varphi_0 \rightarrow |\Delta\varphi| = |\Delta\varphi_0|$$



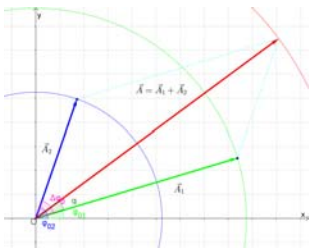
$$x_1(t) = A_1\eta\mu(\omega_1 t + \varphi_{01})$$
$$x_2(t) = A_2\eta\mu(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

18 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Ταλαντώσεις με ίδιες συχνότητες

Αν η αρχική φάση της πρώτης ταλάντωσης είναι **και** αυτή διάφορη του μηδενός έχουμε:

$$\Delta\varphi = -(\varphi_{02}-\varphi_{01}) \rightarrow \Delta\varphi = -\Delta\varphi_0 \rightarrow |\Delta\varphi| = |\Delta\varphi_0|$$



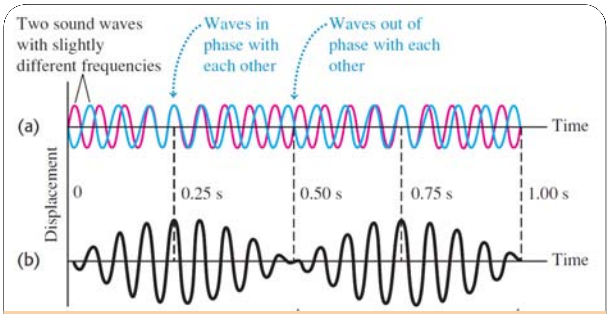
$$x_1(t) = A_1\eta\mu(\omega_1 t + \varphi_{01})$$
$$x_2(t) = A_2\eta\mu(\omega_2 t + \varphi_{02})$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi_0}$$

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{A_2\eta\mu\Delta\varphi_0}{A_1 + A_2\sigma\upsilon\nu\Delta\varphi_0}$$

$$\theta_0 = \varphi_{01} + \alpha$$

19 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14



Διακρότημα

20 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Διακροτήματα

Θα θεωρήσουμε τώρα πως οι δυο ταλαντώσεις έχουν το ίδιο πλάτος, μηδενικές αρχικές φάσεις και διαφορετικές συχνότητες:

$$x_1(t) = A\eta\mu(\omega_1 t) \qquad x_2(t) = A\eta\mu(\omega_2 t)$$

Η συνισταμένη κίνηση θα είναι: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$\rightarrow x(t) = A\eta\mu(\omega_1 t) + A\eta\mu(\omega_2 t) = A[\eta\mu(\omega_1 t) + \eta\mu(\omega_2 t)]$$

$\eta\mu a + \eta\mu b = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{a-b}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$a \leftarrow \omega_1 t \quad b \leftarrow \omega_2 t$

$$\rightarrow x(t) = A\left[2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2}\right)\right]$$

$$\rightarrow x(t) = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Παρατήρηση

$\sigma\upsilon\nu(-\varphi) = \sigma\upsilon\nu(\varphi)$

$\delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$

21 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Διακροτήματα

Θα μελετήσουμε την περίπτωση που οι δυο συχνότητες διαφέρουν πολύ λίγο μεταξύ τους. Δλδ θα ισχύει: $\delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \rightarrow$ μικρή

Η συνισταμένη κίνηση γράφεται:

$$x(t) = \underbrace{2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)}_{A'(t)}\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \rightarrow x(t) = A'(t)\eta\mu\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Όπου: $A'(t) = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$

22 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Διακροτήματα

Αν $\bar{\omega}$ είναι η μέση τιμή των συχνοτήτων, θα έχουμε:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \xrightarrow{\delta\omega \rightarrow \mu\iota\kappa\rho\acute{\eta}} \bar{\omega} \approx \omega_1 \approx \omega_2$$

Και η εξίσωση της ταλάντωσης μπορεί να γραφεί ως: $x(t) = A'(t)\eta\mu(\bar{\omega}t)$

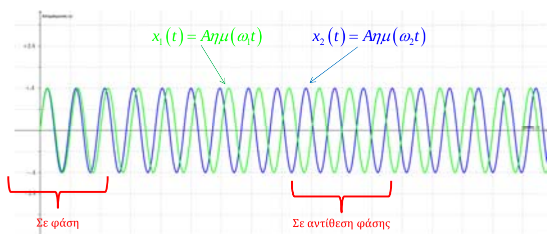
Ο παράγοντας A'(t) μεταβάλλεται **πολύ πιο αργά** από τον όρο με το ημίτονο (γιατί ?) και μπορούμε να τον θεωρήσουμε ως το αργά μεταβαλλόμενο πλάτος μιας "ιδιόμορφης" (**μη-αρμονικής**) ταλάντωσης.

$$A'(t) = 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

flash animation

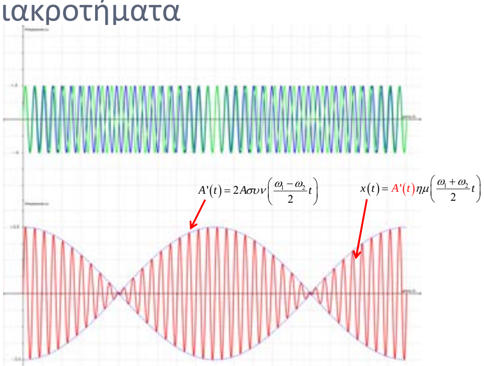
23 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Διακροτήματα



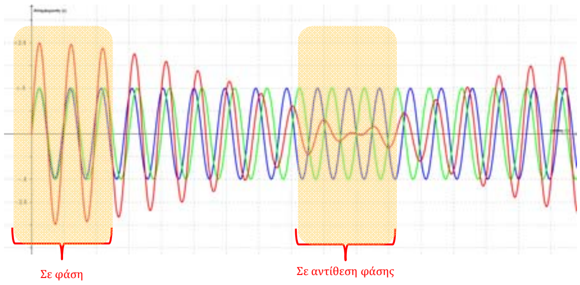
24 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Διακροτήματα



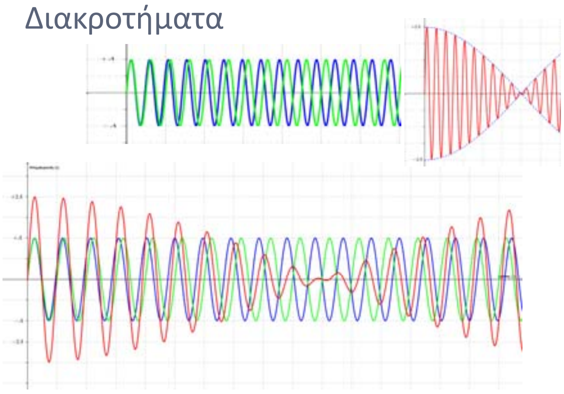
(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 25 20-Νοε-14

Διακροτήματα



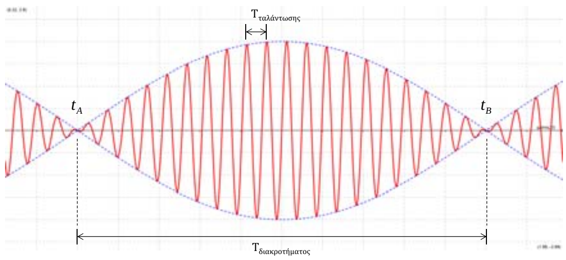
(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 26 20-Νοε-14

Διακροτήματα



(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 27 20-Νοε-14

Διακροτήματα



(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 28 20-Νοε-14

Διακροτήματα

Ο χρόνος ανάμεσα σε δυο **διαδοχικούς μηδενισμούς** (ή ανάμεσα σε δυο **διαδοχικές μεγιστοποιήσεις**) του πλάτους ονομάζεται **περίοδος του διακροτήματος**.

Το πλάτος μηδενίζεται όταν:

$$A'(t) = 0 \rightarrow 2A\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) = 0 \xrightarrow{A\neq 0} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) = 0 \rightarrow \frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

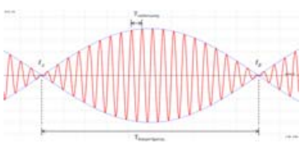
$$k = 0,1,2,3,\ldots$$

Βρίσκουμε δυο **διαδοχικές** λύσεις (για k = 0, και για k = 1):

$$\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{k=0} \frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t_A = \frac{\pi}{2} \\ \xrightarrow{k=1} \frac{|\omega_1-\omega_2|}{2}t_B = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_A = \frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|} \\ t_B = \frac{3\pi}{|\omega_1-\omega_2|} \end{cases}$$

(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 29 20-Νοε-14

Διακροτήματα



Άρα, η περίοδος του διακροτήματος είναι:

$$T_\delta = t_B - t_A \rightarrow T_\delta = \frac{3\pi}{|\omega_1-\omega_2|} - \frac{\pi}{|\omega_1-\omega_2|} \rightarrow \boxed{T_\delta = \frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}}$$

$$T_\delta = \frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|} \xrightarrow[\omega_2=2\pi f_2]{\omega_1=2\pi f_1} T_\delta = \frac{2\pi}{2\pi|f_1-f_2|} \rightarrow \boxed{T_\delta = \frac{1}{|f_1-f_2|}}$$

Όμως: $T_\delta = \frac{1}{f_\delta} = \frac{1}{|f_1-f_2|} \rightarrow \boxed{f_\delta = |f_1-f_2|}$

Επίσης είναι προφανές πως: $\omega_\delta = 2\pi f_\delta \rightarrow \omega_\delta = 2\pi|f_1-f_2| \rightarrow \boxed{\omega_\delta = |\omega_1-\omega_2|}$

(c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 30 20-Νοε-14

πρόχειρα

$$t_n = \frac{(2n+1)\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

$$t_{n+1} = \frac{(2n+3)\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

31 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

ΓΕΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

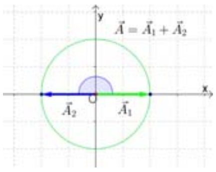
Κωνσταντίνος Χ. Παύλου
Φυσικός – Ραδιοηλεκτρολόγος (MSc)
Καστοριά, Νοέμβριος 14

Άσκηση 1.33/σελ. 37

1.33 Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις, με εξισώσεις $x_1 = 4\ \eta\mu 50t$ και $x_2 = 4\ \eta\mu(50t - \pi)$ (S.I.), που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο. Ποιο είναι το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος;
[Απ: 0]

Είναι φανερό πως |Δφ| = π και $A_1 = A_2 = 4$ m.

$$A = \begin{cases} A_1 - A_2 & A_1 > A_2 \\ 0 & A_1 = A_2 \\ A_2 - A_1 & A_1 < A_2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \theta_0 = \begin{cases} 0 & A_1 > A_2 \\ \text{δεν ορίζεται} & A_1 = A_2 \\ \pi & A_1 < A_2 \end{cases}$$



33 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Άσκηση 1.34/σελ. 37

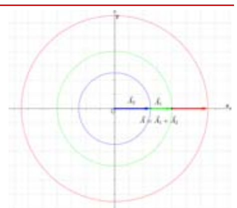
1.34 Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις, $x_1 = 10\ \eta\mu 50t$ και $x_2 = 4\ \eta\mu 50t$, που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο. Τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων είναι μετρημένα σε cm. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης, που εκτελεί το σώμα.
[Απ: $x = 0{,}14\ \eta\mu 50t$ (S.I.)]

Είναι φανερό πως |Δφ| = 0 και $A_1 = A_2 = 4$ m.

$$A = A_1 + A_2 \rightarrow A = 14cm \ \Big| \ \theta_0 = 0$$

$$x(t) = A\eta\mu(\omega t + \theta_0) \rightarrow x(t) = 14\eta\mu(50t)$$

$$x / cm, t / \sec$$



34 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Άσκηση 1.35/σελ. 37

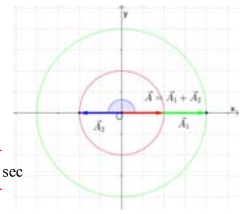
1.35 Ένα σώμα εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις με εξισώσεις $x_1 = 8\ \eta\mu 50\pi t$ και $x_2 = 6\ \eta\mu(50\pi t - \pi)$, που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από το ίδιο σημείο. Τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων είναι μετρημένα σε cm. Να γράψετε τις σχέσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσής του.
[Απ: $\upsilon = 3{,}14\ \sigma\upsilon\nu 50\pi t$ (m/s), $\alpha = -493\ \eta\mu 50\pi t$ (m/s²), $T = 0{,}04 s$]

35 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Άσκηση 1.35/σελ. 37

Είναι φανερό πως |Δφ| = π.

$$A = \begin{cases} A_1 - A_2 & A_1 > A_2 \\ 0 & A_1 = A_2 \\ A_2 - A_1 & A_1 < A_2 \end{cases} \quad \theta_0 = \begin{cases} 0 & A_1 > A_2 \\ \text{δεν ορίζεται} & A_1 = A_2 \\ \pi & A_1 < A_2 \end{cases}$$



$$A = A_1 - A_2 \rightarrow A = 2cm \ \Big| \ \theta_0 = 0$$

$$x(t) = A\eta\mu(\omega t + \theta_0) \rightarrow x(t) = 2\eta\mu(50\pi t), \ x / cm, t / \sec$$

$$\upsilon_{\max} = \omega A \rightarrow \upsilon_{\max} = 100\pi \ cm / sec$$

$$\upsilon(t) = \upsilon_{\max}\sigma\upsilon\nu(\omega t) \rightarrow \upsilon(t) = 100\pi\sigma\upsilon\nu(50\pi t), \ \upsilon / (cm / \sec), t / \sec$$

$$a_{\max} = \omega^2 A \rightarrow a_{\max} = 5000\pi^2 \ cm / sec^2$$

$$a(t) = -a_{\max}\eta\mu(\omega t) \rightarrow a(t) = -5000\pi^2\eta\mu(50\pi t), \ \alpha / (cm / \sec^2), t / \sec$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{1}{25}\sec$$

36 (c) Κωνσταντίνος Χ. Παύλου 20-Νοε-14

Άσκηση 1.36/σελ. 37

1.36 Το διαπασών παράγει αρμονικό ήχο που εξαναγκάζει το τύμπανο του αφτιού να κάνει ταλάντωση. Ένας παρατηρητής ακούει τον ήχο από δύο διαπασών, που λειτουργούν ταυτόχρονα και παράγουν ήχους με συχνότητες $f_1 = 2500$ Hz και $f_2 = 2500{,}5$ Hz. Ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται έναν ήχο που άλλοτε «σβήνει» (το πλάτος της ταλάντωσης μηδενίζεται) και άλλοτε αποκτά μέγιστη ένταση (το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο). Ποιος είναι ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς μηδενισμούς της έντασης του ήχου;
[Απ: 2 s]

$$T_\delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \rightarrow T_\delta = \frac{1}{|2.500 - 2.500,5|} \rightarrow T_\delta = \frac{1}{0,5} \rightarrow T_\delta = 2\sec$$

Άσκηση 1.45/σελ. 40

1.45 Σώμα μάζας m= 2kg εκτελεί ταυτόχρονα δύο αρμονικές ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης γύρω από το ίδιο σημείο. Οι εξισώσεις των ταλαντώσεων είναι $x_1 = 10\ \eta\mu 50\pi t$ και $x_2 = 5\ \eta\mu(50\pi t - \pi)$. Τα πλάτη των δύο ταλαντώσεων είναι μετρημένα σε cm.

α) Ποια είναι η σταθερά D της αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σώμα;

β) Ποια είναι η ενέργεια της ταλάντωσης;

γ) Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος όταν η απομάκρυνσή του είναι x=4 cm;

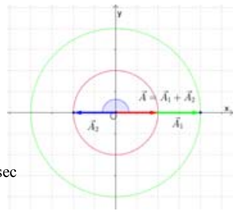
Δίνεται $\pi^2 \approx 10$.

[Απ : D=5×10^4 N/m, E=62,5 J, υ=$3\sqrt{2,5}$ m/s]

Άσκηση 1.45/σελ. 37

Είναι φανερό πως |Δφ| = π.

$$A = \begin{cases} A_1 - A_2 & A_1 > A_2 \\ 0 & A_1 = A_2 \\ A_2 - A_1 & A_1 < A_2 \end{cases} \qquad \theta_0 = \begin{cases} 0 & A_1 > A_2 \\ \text{δεν ορίζεται} & A_1 = A_2 \\ \pi & A_1 < A_2 \end{cases}$$



$$A = A_1 - A_2 \rightarrow A = 5cm \quad \Big| \quad \theta_0 = 0$$

$$x(t) = A\eta\mu(\omega t + \theta_0) \rightarrow x(t) = 5\eta\mu(50\pi t),\ x/cm, t/\sec$$

$$D = m\omega^2 \rightarrow D = 5\cdot10^3\pi^2 N/m$$

$$E = \frac{1}{2}DA^2 \rightarrow E = \frac{25\pi^2}{4} J$$

$$\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \rightarrow \upsilon = \pm150\pi\, cm/\sec \rightarrow |\upsilon| = 150\pi\, cm/\sec$$

