Αναστάσιος Χ. Μπάρλας

Άλγεβρα

Α΄ Λυκείου

Τράπεζα Θεμάτων 2020

Μπάρλας ΕΚΔΟΣΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

6. Παραγοντοποίηση

1 Θέμα 2 – 1251

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$

β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$

2 Θέμα 2 – 1254

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α. Να αποδείξετε ότι: $y=2x$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$$

3 Θέμα 2 – 1318

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$, για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}$$

α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=\frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$.

7. Διάταξη πραγματικών αριθμών

4 Θέμα 2 – 1287

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

β. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5 Θέμα 2 – 1353

α. Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$$

β. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$.

6 Θέμα 2 – 1317

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2\alpha^2+\beta^2+9$ και $\Lambda=2\alpha(3-\beta)$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι: $K-\Lambda=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-6\alpha+9)$.

β. Να δείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

γ. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7 Θέμα 2 – 1368

Αν $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $x + y$ **β.** $2x - 3y$ **γ.** $\frac{x}{y}$

8 Θέμα 2 – 1324

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν: $3 \le x \le 5$ και $-2 \le y \le -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α. $y - x$ **β.** $x^2 + y^2$

9 Θέμα 2 – 1314

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν:

$$2 \le \alpha \le 4 \quad \text{και} \quad -4 \le \beta \le -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α. $\alpha - 2\beta$ **β.** $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

10 Θέμα 2 – 1352

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α. να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$

β. να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}$$

11 Θέμα 2 – 1373

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha + \frac{4}{\alpha} \ge 4$ **β.** $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \ge 16$

12 Θέμα 2 – 1298

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \le x \le 7$ και $2 \le y \le 3$ τότε:

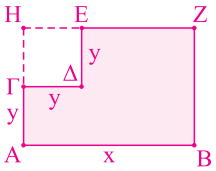
α. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β. Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

13 Θέμα 2 – 1261

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.



β. Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

8. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

14 Θέμα 2 – 1300

α. Να αποδείξετε ότι $x^2+4x+5>0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

β. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B=|x^2+4x+5|-|x^2+4x+4|$$

15 Θέμα 2 – 1258

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5<x<10$,

α. να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

β. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}$$

16 Θέμα 2 – 1239

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι

i. για κάθε $x\geq 2$, $A=3x-4$

ii. για κάθε $x<2$, $A=8-3x$.

β. Αν για τον x ισχύει ότι $x\geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$$

17 Θέμα 2 – 1260

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$.

α. Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$.

β. Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

18 Θέμα 2 – 1384

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|+|y-3|$, με x , y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$. Να αποδείξετε ότι:

α. $A=x-y+2$

β. $0<A<4$

19 Θέμα 2 – 1303

Δίνονται οι παραστάσεις:
$A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Για κάθε $2\leq x<3$ να αποδείξετε ότι $A+B=x-1$.

β. Υπάρχει $x\in[2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

20 Θέμα 2 – 1272

Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $d(x,-2)<1$. Να δείξετε ότι:

α. $-3<x<-1$

β. $x^2+4x+3<0$

21 Θέμα 2 – 1253

α. Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|<4$.

β. Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$$

22 Θέμα 2 – 1322

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$.

α. Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|x+1|+|x-5|}{3}$.

23 Θέμα 2 – 1323

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α. Να αποδείξετε ότι: $y\in(1,3)$.

β. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\dfrac{|y-1|+|y-3|}{2}$.

24 Θέμα 2 – 1284

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x+4|\geq 3$.

β. Αν $\alpha\geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A=\big||\alpha+4|-3\big|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

25 Θέμα 2 – 1342

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $0<x<1$.

β. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$1,\ x,\ x^2$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

26 Θέμα 2 – 1320

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3)=3-2x$.

α. Να αποδείξετε ότι $x\leq\dfrac{3}{2}$.

β. Αν $x\leq\dfrac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x .

27 Θέμα 2 – 1366

α. Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\leq -2$.

β. Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha|+\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|\geq 2$.

28 Θέμα 2 – 1371

α. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$, να αποδειχθεί ότι: $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|\geq 2 \qquad (1)$.

β. Πότε ισχύει η ισότητα στην (1) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

29 Θέμα 2 – 1252

α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$.

Αν x , y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με

$$1<x<3 \quad \text{και} \quad 2<y<4 \ ,$$

β. τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

γ. τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

30 Θέμα 2 – 1248

α. Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$.

β. Αν x , y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με

$$1<x<3 \quad \text{και} \quad 2<y<4 \ ,$$

τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

31 Θέμα 2 – 1268

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x-3|\le 2 \quad \text{και} \quad |y-6|\le 4$$

α. Να δείξετε ότι: $1\le x\le 5$ και $2\le y\le 10$.

β. Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

32 Θέμα 4 – 1515

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α. Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α , β .

β. Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

33 Θέμα 4 – 1429

Σε έναν άξονα τα σημεία A , B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς 5 , 9 και x αντίστοιχα.

α. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

β. Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$, παραστάσεων

i. Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M . Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

34 Θέμα 4 – 1427

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5)\le 9$.

α. Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

β. Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

γ. Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος **β.** .

δ. Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος **γ.** για να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$.

35 Θέμα 4 – 1428

Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α. Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i. $|x+2|$ **ii.** $|x-7|$

β. Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x+2|+|x-7|$$

γ. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

δ. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

36 Θέμα 4 – 1525

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|\alpha-2|<1$
- $|\beta-3|\le 2$

α. Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$.

β. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β.

γ. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$.

δ. Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

37 Θέμα 4 – 1521

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

β. Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

9. Ρίζες πραγματικών αριθμών

38 Θέμα 2 – 1376

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2}\simeq 1,41$

$\sqrt{3}\simeq 1,73$

$\sqrt{5}\simeq 2,24$

$\sqrt{7}\simeq 2,64$

α. Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς

$$\sqrt{20}\ ,\ \sqrt{45}\ \text{ και }\ \sqrt{80}$$

β. Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{3\cdot\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

39 Θέμα 2 – 1340

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

40 Θέμα 2 – 1378

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β. Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$.

41 Θέμα 2 – 1379

Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β. Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$.

42 Θέμα 2 – 1375

Δίνεται η παράσταση: $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

43 Θέμα 2 – 1270

Δίνεται η παράσταση: $K = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α. Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β. Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

44 Θέμα 2 – 1308

Δίνεται η παράσταση: $A = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

α. Να δείξετε ότι: $A = 4$.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $|x + A| = 1$.

45 Θέμα 2 – 1381

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.

β. Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι: $B^2 + 6B = B^4$.

46 Θέμα 2 – 1380

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$.

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

β. Αν $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3+A^2+A+1=0$.

47 Θέμα 2 – 1335

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\sqrt{(x-2)^2}$ και $B=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός

α. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

β. Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

γ. Να δείξετε ότι, για κάθε $x\le 2$, ισχύει $A=B$.

48 Θέμα 2 – 1377

α. Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$.

49 Θέμα 2 – 1382

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ και $B=(\sqrt[3]{2})^6$.

α. Να δείξετε ότι: $A-B=4$.

β. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2}\ ,\ 1\ ,\ \sqrt[3]{2}$$

50 Θέμα 2 – 1281

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A=(\sqrt{2})^6\ ,\quad B=(\sqrt[3]{3})^6\ ,\quad \Gamma=(\sqrt[6]{6})^6$$

α. Να δείξετε ότι:

$$A+B+\Gamma=23$$

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{3}\quad \text{και}\quad \sqrt[6]{6}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

51 Θέμα 2 – 1338

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot\Gamma=\sqrt{15}$.

β. Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

10. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$

1 Θέμα 2 – 1246

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

β. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

2 Θέμα 2 – 1351

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

β. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

γ. Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

3 Θέμα 2 – 1369

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α. Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

γ. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4 .

4 Θέμα 2 – 1327

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. όταν $\alpha = 1$

ii. όταν $\alpha = -3$

β. Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

13. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

5 Θέμα 2 – 1349

α. Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

β. Αν α , β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος **α.** τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$.

6 Θέμα 2 – 1290

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1 , να βρείτε το λ .

β. Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1) .

7 Θέμα 2 – 1312

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

8 Θέμα 2 – 1285

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x+1)$ μέτρα και x μέτρα.

α. Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

β. Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

9 Θέμα 4 – 1509

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

β. Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\dfrac{1}{\alpha}$.

γ. Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|\rho_1 - \rho_2| = 2$.

10 Θέμα 4 – 1476

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ .

i. Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης

$$2x^2 - \lambda x - 36 = 0$$

ii. Να δείξετε ότι:

- $\rho \neq 0$ και
- ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$

11 Θέμα 4 – 1469

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

β. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

12 Θέμα 4 – 1459

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \quad (1)$$

α. Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος;

β. Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

γ. Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

i. να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 .

ii. να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ .

13 Θέμα 4 – 1456

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1) .

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1) , τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$.

14 Θέμα 4 – 1452

α. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1)

β. Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α , β , για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1) .

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β .

15 Θέμα 4 – 1417

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$.

β. Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

ii. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1) , να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$.

14. Άθροισμα και γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$

16 Θέμα 2 – 1348

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

β. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$.

17 Θέμα 2 – 1359

α. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$

β. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του **α.** ερωτήματος.

18 Θέμα 2 – 1262

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$.

α. Να δείξετε ότι:

i. $A + B = \frac{1}{2}$

ii. $A \cdot B = \frac{1}{20}$

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B .

19 Θέμα 2 – 1337

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B=\frac{1}{3+\sqrt{7}}$.

α. Να δείξετε ότι: $A+B=3$ και $A\cdot B=\frac{1}{2}$.

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A , B .

20 Θέμα 2 – 1280

Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$.

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε.

21 Θέμα 2 – 1315

Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha\cdot\beta=4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta=5$.

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β , και να τους βρείτε.

22 Θέμα 2 – 1316

Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=-1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-12$

β. Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε.

23 Θέμα 2 – 1334

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α , β , τέτοιοι ώστε:

$$\alpha+\beta=12 \quad \text{και} \quad \alpha^2+\beta^2=272$$

α. Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha\cdot\beta=-64$$

β. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α , β .

γ. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α , β .

24 Θέμα 2 – 1288

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-\kappa x-2$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\Delta>0$ για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x-2=0$ (1) ,

i. Να βρείτε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ και το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών της (1) .

ii. Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου

$$\rho_1=2x_1 \quad \text{και} \quad \rho_2=2x_2$$

25 Θέμα 2 – 1269

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.

α. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 .

β. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: x_1+x_2 , $x_1\cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

γ. Να προσδιορίσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

26 Θέμα 2 – 1346

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\lambda x+(\lambda^2+\lambda-1)=0$ (1) , με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $S^2-P-2\geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1) .

27 Θέμα 4 – 1508

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2x+\lambda=0$, με παράμετρο $\lambda<1$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β. Να δείξετε ότι: $x_1+x_2=2$.

γ. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον:

$$|x_1-2|=|x_2+2| \text{ , τότε:}$$

i. Να δείξετε ότι: $x_1-x_2=4$.

ii. Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ .

28 Θέμα 4 – 1463

Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0$$

όπου α , β δύο θετικοί αριθμοί.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta=(\alpha^2-\beta^2)^2$.

β. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α , β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α , β .

γ. Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1=\frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2=\frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1+x_1)(1+x_2)\geq 4$$

29 Θέμα 4 – 1461

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1) , τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

γ. Για $\lambda>2$, να αποδείξετε ότι:

i. Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii. $x_1+4x_2\geq 4$

30 Θέμα 4 – 1431

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \quad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i. Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii. Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

γ. Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i. να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii. να βρείτε το λ.

31 Θέμα 4 – 1491

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1x_2)^{24} = 0$$

ii. Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1x_2^2$.

32 Θέμα 4 – 1450

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2 = \lambda(4x-3)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

i. να υπολογίσετε τα $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1x_2$

ii. να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

33 Θέμα 4 – 1438

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \dfrac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

34 Θέμα 4 – 1404

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2 + (2\lambda+3)x + \lambda - 2 = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι: $\Delta = 12\lambda + 25$.

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$.

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση: $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$

35 Θέμα 4 – 1407

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ και t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B \ , \quad t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και} \quad |t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$$

α. i. Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$

ii. Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \quad \text{και} \quad t_A \cdot t_B = 8$$

i. Να γράψετε μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B.

ii. Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

36 Θέμα 4 – 1504

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A, s_B, s_Γ, και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$s_A < s_B \ , \quad s_\Gamma = \frac{s_A + 3s_B}{4} \quad \text{και} \quad |s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|$$

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο O και τα σημεία A, B, παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.

α. Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων s_A, s_B σε Km ικανοποιούν τις σχέσεις

$$s_A + s_B = 1{,}4 \quad \text{και} \quad s_A \cdot s_B = 0{,}45 \quad \text{τότε:}$$

i. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B

ii. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, s_Γ, και s_Δ.

37 Θέμα 4 – 1478

α. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm.

i. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60\ \text{cm}^2$.

ii. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

iii. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν $40\ \text{cm}^2$ και διαγώνιο 8 cm.

38 Θέμα 4 – 1492

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0 \ , \quad \lambda \in (0, 4)$$

α. Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

β. Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0, 4)$.

γ. Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

39 Θέμα 4 – 1493

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0 \quad \text{με} \quad \lambda \in (0, 2)$$

α. Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

β. Να αποδείξετε ότι $E \le 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$.

γ. Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

15. Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

40 Θέμα 2 – 1238

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{-2x^2 + 10x - 12}{x-2} = 0$.

41 Θέμα 2 – 1332

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1-x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

β. Για τις τιμές του x που βρήκατε στο **α.** ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1-x} = 0$$

42 Θέμα 4 – 1448

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \ne 0$.

α. Να αποδείξετε ότι $|\alpha| \le \dfrac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

β. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 2 = 0$.

43 Θέμα 4 – 1460

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$, με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β.

β. Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.

γ. Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0 \quad (1)$

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο **α.** ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

44 Θέμα 4 – 1482

α. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β. Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \ ,$$

η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

45 Θέμα 4 – 1477

α. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε

i. $\beta^2 - 4\gamma > 0$

ii. η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

46 Θέμα 4 – 1445

α. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β. Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

47 Θέμα 4 – 1516

α. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad 8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

β. Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4) \ , \ \text{με} \ \alpha \cdot \gamma \neq 0 \ .$$

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i. $\rho \neq 0$ και

ii. ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4) .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

16. Ανισώσεις 1ου βαθμού

1 Θέμα 2 – 1357

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2}\le x+\frac{1}{2}$.

α. Να βρείτε τις λύσεις τους.

β. Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

2 Θέμα 4 – 1423

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες.

β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2,4)$.

17. Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

3 Θέμα 2 – 1330

α. Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|2x-3|\le 5$

ii. $|2x-3|\ge 1$

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

4 Θέμα 2 – 1365

α. Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\ge 3$.

γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων **α.** και **β.** με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

5 Θέμα 2 – 1374

α. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1-2x|<5$

ii. $|1-2x|\ge 1$

β. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x , για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

6 Θέμα 2 – 1367

α. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4|=3|x-1|$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5|>1$.

γ. Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του **α.** ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του **β.** ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

7 Θέμα 2 – 1331

α. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0 \quad (1)$

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| < 2 \quad (2)$

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

8 Θέμα 2 – 1243

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$.

β. Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3 .

γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των **α.** και **β.** .

9 Θέμα 2 – 1383

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,

α. να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

β. να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \dfrac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

10 Θέμα 2 – 1355

α. Να λύσετε την ανίσωση $|x-5| < 2$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x| > 5$.

γ. Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

11 Θέμα 4 – 1472

α. Να λύσετε την ανίσωση: $|x-3| \leq 5$.

β. Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική
σημασία της παράστασης $|x-3|$.

γ. Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$|x-3| \leq 5$$

δ. Να βρείτε το πλήθος των ακέραιων αριθμών x που ικανοποιούν την ανίσωση

$$\big||x|-3\big| \leq 5$$

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

12 Θέμα 4 – 1455

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1) , τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

13 Θέμα 2 – 1250

Δίνεται η παράσταση: $K = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

β. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση K .

18. Μορφές τριωνύμου

14 Θέμα 2 – 1264

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + \lambda x - 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ .

β. Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

15 Θέμα 2 – 1273

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$$

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο .

16 Θέμα 2 – 1291

α. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$.

β. Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ. Να τοποθετήσετε το $-\dfrac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\dfrac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος **β.** ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

19. Ανισώσεις 2ου βαθμού

17 Θέμα 2 – 1306

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \le 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β. Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος **α.** .
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

18 Θέμα 2 – 1356

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α. Να βρείτε τις ρίζες του.

β. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

γ. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ και $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

19 Θέμα 2 – 1279

α. Να λύσετε την ανίσωση: $3x^2 - 4x + 1 \le 0$.

β. Αν α , β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + 6\beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

20 Θέμα 2 – 1271

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1) και $x^2 - 16 \le 0$ (2)

α. Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) , (2) .

β. Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

21 Θέμα 2 – 1350

α. Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \le 3$ και $2x^2 - x - 1 \ge 0$.

β. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος **α.** .

22 Θέμα 2 – 1363

α. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \le 0$.

γ. Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του **α.** ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του **β.** ερωτήματος.

23 Θέμα 2 – 1277

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$.

β. Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 3| + |x^2 - 10x + 21|$.

i. Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι: $A = -x^2 + 11x - 24$.

ii. Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A = 6$.

24 Θέμα 4 – 1402

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0$ (1) , με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$$

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24}$$

25 Θέμα 4 – 1389

Δίνεται η εξίσωση $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι $1^{ου}$ βαθμού.

β. Αν η εξίσωση (1) είναι $2^{ου}$ βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια ρίζα διπλή, την οποία και να προσδιορίσετε.

γ. Αν η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή, να προσδιορίσετε τις τιμές του λ (αν υπάρχουν) ώστε το τριώνυμο $(8 - \lambda)x^2 - 2(\lambda - 2) + 1$ να είναι μη αρνητικό για κάθε x πραγματικό αριθμό.

26 Θέμα 4 – 1406

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-(\alpha+1)x+4+\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta=(\alpha-1)^2-16$$

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ. Έστω ότι το τριώνυμο έχει δυο ρίζες, x_1 και x_2.

i. Να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$, το γινόμενο $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών του συναρτήσει του α.

ii. Να αποδείξετε ότι: $d(x_1,1)\cdot d(x_2,1)=4$.

27 Θέμα 4 – 1424

Δίνονται οι ανισώσεις: $|x-2|<3$ και $x^2-2x-8\le 0$.

α. Να βρείτε τις λύσεις τους.

β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,4]$.

γ. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

28 Θέμα 4 – 1425

Δίνονται οι ανισώσεις: $2\le|x|\le 3$ και $x^2-4x<0$.

α. Να βρείτε τις λύσεις τους.

β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[2,3]$.

γ. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

29 Θέμα 4 – 1426

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1|\le 2$ και $x^2-x-2>0$.

α. Να λύσετε τις ανισώσεις.

β. Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-3,-1)$.

γ. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$.

30 Θέμα 4 – 1396

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$ η εξίσωση έχει μια ρίζα διπλή.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες.

δ. Αν $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5$, να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες.

31 Θέμα 4 – 1432

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β. Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2 + (2-\lambda)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1)$, με παράμετρο λ.

i. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

32 Θέμα 4 – 1442

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0\,,\ 1\,,\ \alpha\,,\ \alpha^2\,,\ \sqrt{\alpha}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος **α.**

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha\,,\ \alpha^2\,,\ \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$.

33 Θέμα 4 – 1436

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

β. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0\,,\ 1\,,\ \alpha\,,\ \alpha^2\,,\ \sqrt{\alpha}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος **α.**.

ii. Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$.

34 Θέμα 4 – 1439

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ. Αν $\lambda < 0$, τότε:

i. το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

35 Θέμα 4 – 1440

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, με $\lambda>0$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda>0$.

β. Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i. να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

ii. να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi\geq 4$ για κάθε $\lambda>0$.

iii. για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4 , τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

36 Θέμα 4 – 1451

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-\lambda x-(\lambda^2+5)=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1) .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1) , να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει: $(x_1-2)(x_2-2)=-4$.

37 Θέμα 4 – 1391

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β. Για ποιες τιμές του λ το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\neq 0$, ώστε $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda\leq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

38 Θέμα 4 – 1462

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2 .

α. Χρησιμοποιώντας τους τύπους για το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών του τριωνύμου, να αποδείξετε ότι: $\gamma=2\alpha$ και $\beta=-3\alpha$.

β. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x\in(1,2)$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $\alpha<0$

ii. να λύσετε την ανίσωση $\gamma x^2+\beta x+\alpha<0$.

39 Θέμα 4 – 1465

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x)=3x^2+\kappa x-4$, με παράμετρο $\kappa\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ , το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α , β δυο πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει

$$\alpha<x_1<x_2<\beta$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου: $\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\beta\cdot f(\beta)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

40 Θέμα 4 – 1473

α. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2+2x+3=\alpha$ έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

β. Δίνεται το τριώνυμο $f(x)=x^2+2x+3$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)-2}\leq 2$.

41 Θέμα 4 – 1412

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-\lambda)\cdot x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού.

β. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο **α.** ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$.

γ. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο **α.** ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1) , αν αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού.

42 Θέμα 4 – 1474

Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda \ , \ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών .

γ. Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Για κάθε $\lambda>0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1x_2}\leq\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

43 Θέμα 4 – 1475

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

γ. Αν $\lambda>0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και 1 .

44 Θέμα 4 – 1397

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

γ. Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$, όπου κ , μ είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$x_1 < \kappa < x_2 < \mu$$

45 Θέμα 4 – 1511

Δίνεται η ανίσωση: $|x+1| < 4 \quad (1)$.

α. Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) .

γ. Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής

$$x^2 + \beta x + \gamma$$

το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \leq 0$.

46 Θέμα 4 – 1512

Δίνεται η ανίσωση: $|x-1| \leq 3 \quad (1)$.

α. Να λύσετε την ανίσωση και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β. Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) .

γ. Να κατασκευάσετε ένα τριώνυμο της μορφής

$$x^2 + \beta x + \gamma$$

το οποίο να έχει ρίζες δύο από τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) και να έχει θετική τιμή, για κάθε $x \geq 0$.

47 Θέμα 4 – 1479

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (1)$ και $x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad (2)$.

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1) .

β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2) .

γ. Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x , να έχει θετική τιμή.

48 Θέμα 4 – 1481

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β. i. Αν $\beta \neq 0$ τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

ii. Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα **i.** , όταν $\beta = 0$.

γ. Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα **β.** , να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α , β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0 .

49 Θέμα 4 – 1483

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8$.

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

β. Αν $\kappa = -\dfrac{8889}{4444}$, είναι η τιμή της παράστασης: $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης: $\mu^2 - 2|\mu| - 8$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

50 Θέμα 4 – 1486

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ. Αν $3 < \lambda < 12$, τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ , μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

51 Θέμα 4 – 1494

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.

β. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\dfrac{46}{47}\right)^2 + 5\,\dfrac{46}{47} - 6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

γ. Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

52 Θέμα 4 – 1500

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

β. i. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

ii. Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. i. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \qquad (1)$$

έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

ii. Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

53 Θέμα 4 – 1487

α. i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2 + 9x + 18$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

β. i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18$.

54 Θέμα 4 – 1513

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

α. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του x .

β. Να προσδιορίσετε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002)$$

γ. Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού:

$$-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$$

55 Θέμα 4 – 1517

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x \quad (1)$.

β. Δίνονται δύο αριθμοί κ , λ , οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση: $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των κ , λ .

ii. Να δείξετε ότι: $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$.

56 Θέμα 4 – 1518

Δίνεται πραγματικός αριθμός α , που ικανοποιεί τη σχέση: $|\alpha - 2| < 1$.

α. Να γράψετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του α .

β. Θεωρούμε στη συνέχεια το τριώνυμο: $x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4}$.

i. Να βρείτε τη διακρίνουσα του τριωνύμου και να προσδιορίσετε το πρόσημό της.

ii. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$x^2 - (\alpha - 2)x + \frac{1}{4} > 0$$

57 Θέμα 4 – 1458

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) \ , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$.

ii. να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς

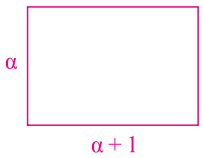
$$f(x_2) \ , \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \ , \quad f(x_2 + 1)$$

58 Θέμα 4 – 1520

α. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 + x - 6 < 0$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - \frac{1}{2}| > 1$.

γ. Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α και $\alpha + 1$ όπου ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $|\alpha - \frac{1}{2}| > 1$. Αν για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:



i. Να δείξετε ότι: $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

59 Θέμα 4 – 1522

α. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

β. Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α , β διαφορετικούς από το 0 με $\alpha < \beta$, για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$.

Να αποδείξετε ότι ισχύει $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο ΠΡΟΟΔΟΙ

21. Αριθμητική πρόοδος

1 Θέμα 2 – 1240

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α. Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

β. Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98 .

2 Θέμα 2 – 1292

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_3 = 9$.

α. Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

β. Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο ν , ώστε να ισχύει $\alpha_\nu > 30$.

3 Θέμα 2 – 1325

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

β. Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152 .

4 Θέμα 2 – 1326

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω .

α. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$.

β. Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

5 Θέμα 2 – 1328

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_4 - \alpha_9 = 15$ και $\alpha_1 = 41$.

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 .

β. Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν , ώστε $\alpha_\nu = \nu$.

6 Θέμα 2 – 1245

α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: $x + 2$, $(x+1)^2$, $3x + 2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i. $x = 1$ **ii.** $x = -1$

7 Θέμα 2 – 1256

Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) .

α. Να βρείτε τη τιμή του x .

β. Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν) ,

i. να υπολογίσετε τη διαφορά ω .

ii. να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

8 Θέμα 2 – 1266

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1) , να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β , x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

9 Θέμα 2 – 1249

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) , για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

β. Να βρείτε τον α_{20} .

γ. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

10 Θέμα 2 – 1343

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

β. Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77 . (Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

11 Θέμα 2 – 1344

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: 1 , 3 , 5 , 7 , …

α. Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.

β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

12 Θέμα 2 – 1370

α. Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1 , 2 , 3 , … , ν

β. Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45 .

13 Θέμα 2 – 1282

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α. Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

β. Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33 , να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

14 Θέμα 2 – 1336

Οι αριθμοί $x + 6$, $5x + 2$, $11x - 6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω .

α. Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$.

β. Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

15 Θέμα 2 – 1329

Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

β. Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

16 Θέμα 2 – 1347

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει α καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η $7^{η}$ σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α. Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου;
Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β. Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;

17 Θέμα 2 – 1247

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α. Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

β. Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

γ. Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

18 Θέμα 4 – 1453

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 10\omega$.

β. Αν $\alpha_{20} - \alpha_{10} = 30$ και $\alpha_1 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 3\nu - 2$.

γ. Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30;

δ. Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60;

19 Θέμα 4 – 1507

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α. Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

β. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

γ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

20 Θέμα 4 – 1471

Σε αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α. Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

β. Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i. Να βρείτε τον αριθμό κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

21 Θέμα 4 – 1399

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν), όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ που αποτελείται από ακέραιους αριθμούς για την οποία ισχύει ότι:

$$\alpha_1 = x \ , \ \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4 \ , \ \alpha_3 = x^2 - 2 \ , \ \text{όπου} \ x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδειχθεί ότι $x = 3$.

β. Να βρεθεί ο ν-οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

γ. Να υπολογιστεί το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15}$.

22 Θέμα 4 – 1502

Οι αριθμοί: x^2+5 , x^2+x , $2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x .

β. Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο $4^{ος}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i. Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

ii. Τον πρώτο όρο της προόδου.

iii. Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}$.

23 Θέμα 4 – 1503

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) , ο $3^{ος}$ όρος είναι $\alpha_3=8$ και ο $8^{ος}$ όρος είναι $\alpha_8=23$.

α. Να αποδείξετε ότι ο $1^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1=2$ και η διαφορά της $\omega=3$.

β. Να υπολογίσετε τον $31^{ο}$ όρο της.

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ldots+(\alpha_{31}+31)$.

24 Θέμα 4 – 1416

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α. Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

β. Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

γ. Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^{η}$ μέχρι και την $14^{η}$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

25 Θέμα 4 – 1411

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α . Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α , η δεύτερη 4 μέτρα από το Α , η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α , 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α. Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το $\nu^{ο}$ όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

β. Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η $20^{η}$ κυψέλη;

γ. Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α .

i. Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την $3^{η}$ κυψέλη;

ii. Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

26 Θέμα 4 – 1430

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3 , 7 , 11 , 15 , … και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4 . Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α. Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

γ. Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235 . Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

27 Θέμα 4 – 1435

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον $1^{ο}$ μήνα 1 ευρώ, το $2^{ο}$ μήνα 2 ευρώ, τον $3^{ο}$ μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον $1^{ο}$ μήνα 100 ευρώ, το $2^{ο}$ μήνα 110 ευρώ, τον $3^{ο}$ μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α. i. Να βρείτε το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α .

ii. Να βρείτε το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το $\nu^{ο}$ μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β .

iii. Να βρείτε το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α .

iv. Να βρείτε το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β .

β. i. Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

ii. Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

28 Θέμα 4 – 1387

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η $1^{η}$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^{η}$ σειρά έχει 28 καθίσματα.

α. Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναιδιαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

β. Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου.

γ. Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

δ. Αν στην $1^{η}$ σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^{η}$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^{η}$ υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^{η}$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

ii. Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

29 Θέμα 4 – 1395

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3 € και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5 € περισσότερο από τον προηγούμενο.

α. Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

β. Αν, για κάθε $\nu \le 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου.

γ. Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης.

δ. Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε διαθέτοντας τα εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.
(Δίνεται ότι: $\sqrt{10021} = 101$)

30 Θέμα 4 – 1488

Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:
«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α. Να βρείτε την τιμή του x.

β. Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές.

γ. Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

22. Γεωμετρική πρόοδος

31 Θέμα 2 – 1360

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α. Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

β. Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$.

32 Θέμα 2 – 1242

α. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x, $2x+1$, $5x+4$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i. $x = 1$

ii. $x = -1$

33 Θέμα 2 – 1257

α. Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

β. Αν οι αριθμοί $4-x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

γ. Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

34 Θέμα 2 – 1265

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2-5\beta x+2\beta^2=0 \quad (1)$, με παράμετρο $\beta>0$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=2\beta$ και $x_2=\dfrac{\beta}{2}$.

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1) , να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

35 Θέμα 2 – 1311

Οι αριθμοί $\kappa-2$, 2κ και $7\kappa+4$, $\kappa\in\mathbb{N}$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) .

α. Να αποδείξετε ότι $\kappa=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

β. i. Να εκφράσετε το $2^{ο}$ όρο, τον $5^{ο}$ και τον $4^{ο}$ όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1 .

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha_2+\alpha_5=4(\alpha_1+\alpha_4)$.

36 Θέμα 2 – 1321

α. Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί $x+4$, $2-x$, $6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β. Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

ii. τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

37 Θέμα 2 – 1339

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) , για την οποία ισχύει $\dfrac{\alpha_5}{\alpha_2}=27$.

α. Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda=3$.

β. Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200 , να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 .

38 Θέμα 4 – 1499

Δίνονται οι αριθμοί 2 , x , 8 με $x>0$.

α. Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2 , x , 8 , με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

β. Να βρείτε τώρα την τιμή του x ώστε οι αριθμοί 2 , x , 8 , με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

γ. Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος 2 , 5 , 8 , 11 , … και (β_ν) είναι η γεωμετρική πρόοδος 2 , 4 , 8 , 16 , … τότε:

i. Να βρείτε το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) .

ii. Να βρείτε την τιμή του ν ώστε, για το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν) να ισχύει: $2(S_\nu+24)=\beta_7$.

39 Θέμα 4 – 1519

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\alpha_3 = 4 \ , \ \alpha_5 = 16 \ \text{ και } \ \lambda > 0$$

α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου.

β. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $(\beta_\nu) = \dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

γ. Αν S_{10} και S'_{10} είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}$$

40 Θέμα 4 – 1498

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν E, τέτοια ώστε οι αριθμοί α, E, β, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

α. Να αποδείξετε ότι $E = 1$.

β. Αν $\alpha + \beta = 10$ τότε:

i. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β.

ii. Να βρείτε τα μήκη α, β.

41 Θέμα 4 – 1392

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της $1^{ης}$ ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της $2^{ης}$ ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της $3^{ης}$ ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α. Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας μετά το ατύχημα.

β. Πόσες ημέρες μετά από την στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

γ. Στο τέλος της $8^{ης}$ ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

42 Θέμα 4 – 1394

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

β. Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 6400, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες.

Συμβολίζουμε με β_ν το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης $(\nu \le 5)$.

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

ii. Να εκφράσετε το πλήθος β_ν των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

23. Η έννοια της συνάρτησης

1 Θέμα 2 – 1255

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$

2 Θέμα 2 – 1244

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} 2x+4, & x<0 \\ x-1\ , & x\geq 0 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$.

β. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε: $f(x)=0$.

3 Θέμα 2 – 1283

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases} 8-x\ , & \text{αν } x<0 \\ 2x+5, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι $f(-5)=f(4)$.

β. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε $f(x)=9$.

4 Θέμα 2 – 1372

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\leq 0 \\ x^2\ , & 3<x<10 \end{cases}$

α. Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

β. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=25$.

5 Θέμα 2 – 1385

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6 .

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

6 Θέμα 2 – 1354

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$.

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

7 Θέμα 2 – 1295

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-16x}{x-4}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει $f(x)=x^2+4x$.

β. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$.

8 Θέμα 2 – 1297

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

α. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\dfrac{5}{2}$.

9 Θέμα 2 – 1263

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A , μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0,8x$.

α. Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;

β. Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A ;

10 Θέμα 2 – 1278

Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου $(^\circ C)$, σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T=15+25\cdot x \text{ , όταν } 0\le x\le 200$$

α. Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με $290\,^\circ C$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από $440\,^\circ C$;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

11 Θέμα 4 – 1437

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει: $f(x)=|x|-2$.

γ. Για $x\in A$, να λύσετε την εξίσωση: $\left(f(x)+2\right)^2-4f(x)-5=0$.

12 Θέμα 4 – 1441

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2-4x+\alpha \quad \text{και} \quad g(x)=\alpha x-5 \ , \quad \text{με} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

α. Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α .

β. Για $\alpha=1$,

i. να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$

ii. να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$.

13 Θέμα 4 – 1457

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-x+(\lambda-\lambda^2)=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$. (1)

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

γ. Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-x+\lambda-\lambda^2}$ να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

14 Θέμα 4 – 1388

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .

β. Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$:

i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της g .

ii. Να δείξετε ότι: $g(\alpha+3)>g(\alpha)$, όταν $-1<\alpha<2$.

15 Θέμα 4 – 1390

Δίνεται συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

α. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .

β. Για $\kappa=1$ και $\lambda=-2$:

i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της g .

ii. Να δείξετε ότι: $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$, όταν $\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)$.

16 Θέμα 1526

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι

- $|1-3\alpha|<2$
- Η απόσταση του αριθμού β από τον αριθμό 2 είναι μικρότερη του 1

α. Να αποδειχθεί ότι $-\dfrac{1}{3}<\alpha<1$.

β. Να αποδειχθεί ότι $|\beta-3\alpha-1|<3$.

γ. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{4x^2-4(\beta-2)x+\beta^2}$ έχει πεδίο ορισμού όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

17 Θέμα 4 – 1400

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$.

α. Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης;

β. Τι εκφράζει ο αριθμός $12,5$ και τι ο αριθμός $15,5$ στο πλαίσιο του προβλήματος;

γ. Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).

δ. Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

18 Θέμα 4 – 1418

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου A με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου B με πλευρά $(d+1)$ cm .

α. Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου A και κάθε πλακάκι τύπου B .

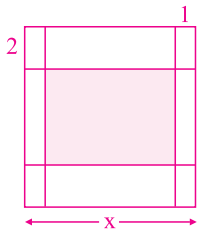
β. Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου A είτε με 128 τύπου B , να βρείτε:

i. Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

ii. Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

19 Θέμα 4 – 1420

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \le x \le 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

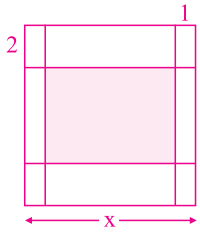
$$E(x)=(x-2)(x-4)$$

β. Να βρεθεί η τιμή του x , ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35\ cm^2$.

γ. Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\ cm^2$.

20 Θέμα 4 – 1421

Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm $(5 \le x \le 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α. Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = x^2 - 6x + 8$$

β. Να βρεθεί η τιμή του x, ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $24\ cm^2$.

γ. Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ $35\ cm^2$, να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου.

21 Θέμα 4 – 1422

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $(^\circ C)$ σε βαθμούς Φαρενάιτ $(^\circ F)$, πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με $1,8$ και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου $(^\circ C)$ σε βαθμούς Κέλβιν $(^\circ K)$, προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου $(^\circ C)$ το 273.

α. Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν $(^\circ K)$ και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ $(^\circ F)$ είναι η:

$$K = \frac{F - 32}{1,8} + 273$$

γ. Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από $278\ ^\circ K$ μέχρι $283\ ^\circ K$. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^\circ F$.

22 Θέμα 4 – 1467

Αν ένας κάτοικος μιας πόλης A καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 12 + 0,5x, & \text{αν } 0 \le x \le 30 \\ 0,7x + 6, & \text{αν } x > 30 \end{cases}$$

α. Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

i. έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

ii. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

iii. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

β. Σε μια άλλη πόλη B το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x) = 12 + 0,6x, \text{ για } x \ge 0$$

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλη B, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

23 Θέμα 4 – 1484

Ο αγώνας δρόμου ανάμεσα στη χελώνα και το λαγό γίνεται σύμφωνα με τους ακόλουθους κανόνες:

- Η διαδρομή είναι τμήμα ενός ευθύγραμμου δρόμου.
- Ο λαγός ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο O.
- Το τέρμα βρίσκεται σε σημείο M με $OM>600$ μέτρα.
- Η χελώνα ξεκινάει τη στιγμή $t=0$ με προβάδισμα, δηλαδή από ένα σημείο A που βρίσκεται μεταξύ του O και του M, με $OA=600$ μέτρα.

Υποθέτουμε ότι, για $t\geq 0$, η απόσταση του λαγού από το O τη χρονική στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_\Lambda(t)=10t^2$ μέτρα, ενώ η απόσταση της χελώνας από το O τη στιγμή t min δίνεται από τον τύπο $S_X(t)=600+40t$ μέτρα.

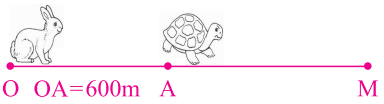
α. Να βρείτε σε πόση απόσταση από το O θα πρέπει να βρίσκεται το τέρμα M, ώστε η χελώνα να κερδίσει τον αγώνα.

β. Υποθέτουμε τώρα ότι η απόσταση του τέρματος M από το O είναι $OM=2250$ μέτρα. Να βρείτε:

i. Ποια χρονική στιγμή ο λαγός φτάνει τη χελώνα.

ii. Ποιος από τους δύο δρομείς προηγείται τη χρονική στιγμή $t=12$ min και ποια είναι τότε η μεταξύ τους απόσταση.

iii. Ποια χρονική στιγμή τερματίζει ο νικητής του αγώνα.



24 Θέμα 4 – 1495

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(A=90^\circ)$ με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε: $x+y=10$.

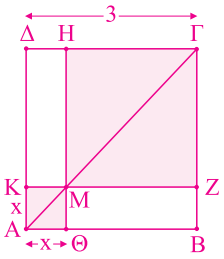
α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$$E(x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x)\ ,\quad x\in(0,10)$$

β. Να αποδείξετε ότι $E(x)\leq\frac{25}{2}$, για κάθε $x\in(0,10)$.

γ. Για ποια τιμή του $x\in(0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ;

25 Θέμα 4 – 1497



Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $AB=3$ και το M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω E το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.

α. Να αποδείξετε ότι $E=2x^2-6x+9$, $x\in(0,3)$.

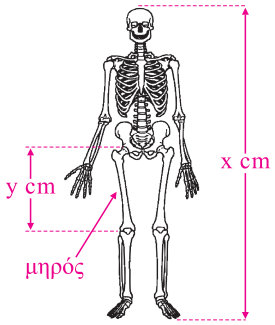
β. Να αποδείξετε ότι $E\geq\frac{9}{2}$, για κάθε $x\in(0,3)$.

γ. Για ποια θέση του M πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

26 Θέμα 4 – 1501

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$

α. Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

β. Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm . Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

27 Θέμα 4 – 1410

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε m) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 60t - 5t^2$$

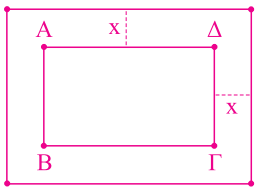
α. Μετά από πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

β. Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί στο ύψος $y = 175$ m .

γ. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100 m .

28 Θέμα 4 – 1505

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ , με διαστάσεις 15 m και 25 m . Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος x m ($x > 0$), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 4x^2 + 80x \ , \quad x > 0$$

β. Να βρεθεί το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν $E = 500\ m^2$.

γ. Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από 500 m^2 ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

29 Θέμα 4 – 1506

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi = 40$ cm . Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

α. να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$

β. να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση:

$$E(x) = 20x - x^2$$

γ. να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \le 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$

δ. να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm .

30 Θέμα 4 – 1510

Δυο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.
Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους κ.α).
Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α. Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(\nu)$ της επιχείρησης, αν γεμίζει ν τόνερ το μήνα.

β. Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(\nu)$ της επιχείρησης από την πώληση ν αριθμού τόνερ το μήνα.

γ. Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i. να μην έχει ζημιά.

ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

25. Γραφική παράσταση συνάρτησης

31 Θέμα 2 – 1358

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) + f(1)$

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

32 Θέμα 2 – 1345

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

33 Θέμα 2 – 1259

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M(\alpha, \frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

34 Θέμα 2 – 1307

Δίνεται η συνάρτηση g, με $g(x)=\dfrac{2x^2-4x+\mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$,

α. να δείξετε ότι $\mu=-6$

β. να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

γ. για $\mu=-6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

35 Θέμα 2 – 1241

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,6)$, $B(-1,4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β.

β. Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

36 Θέμα 2 – 1299

α. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A=x^3-x^2+3x-3$

β. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{3}{x}$ και $g(x)=x^2-x+3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$.

37 Θέμα 2 – 1301

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^3$ και $g(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.

β. Αν A, O, B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξτε ότι A, B είναι συμμετρικά ως προς το O.

38 Θέμα 4 – 1393

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

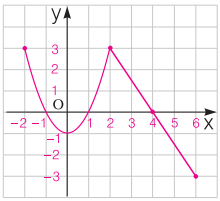
β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x+\alpha$. Να δείξετε ότι:

i. αν $\alpha>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν δύο κοινά σημεία.

ii. αν $\alpha<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινά σημεία.

39 Θέμα 2 – 1304

Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

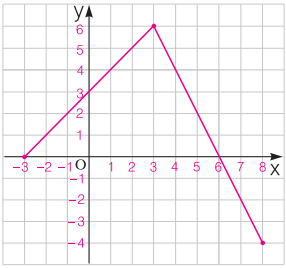
x	– 2	– 1		1	2	
y			– 1			– 3

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

δ. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

40 Θέμα 2 – 1305

Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

x	– 3	– 1	0	3		
y					– 2	– 4

δ. Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

41 Θέμα 4 – 1454

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\sqrt{x^2-x+\frac{\alpha}{4}}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f να είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

β. Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,\frac{1}{2})$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$.

42 Θέμα 4 – 1444

Για δεδομένο $\lambda\in\mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με

$$f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2\ ,\quad x\in\mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.

β. Για $\lambda=-1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

γ. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

δ. Για $\lambda=1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

43 Θέμα 4 – 1524

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=2x-\alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

γ. Να βρεθεί η τιμή του α αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$.

δ. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

44 Θέμα 4 – 1446

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

γ. Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

45 Θέμα 4 – 1470

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x^2+1$ και $g(x)=x+\alpha$, με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Για $\alpha=1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δυο σημεία.

γ. Για $\alpha>1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

46 Θέμα 4 – 1408

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και λ παράμετρος με $\lambda\neq 0$.

α. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β. Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

γ. Αν $\lambda\neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρεθεί η παράμετρος λ , ώστε να ισχύει: $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$.

47 Θέμα 4 – 1398

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

β. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

γ. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του άξονα $x'x$ που η τετμημένη του να ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=g(x)$.

δ. Να βρείτε συνάρτηση h που η γραφική της παράσταση να είναι ευθεία και να τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του άξονα $x'x$.

48 Θέμα 4 – 1433

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

β. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1 , τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του α .

ii. Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

49 Θέμα 4 – 1485

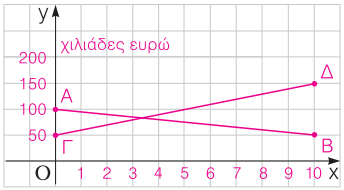
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)^2-4$ και $g(x)=|x-1|+2$, με $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

50 Θέμα 4 – 1434



Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

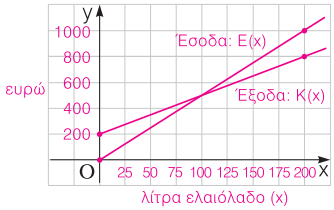
Το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.

α. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

β. i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο **α.** ερώτημα ήταν σωστές.

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

51 Θέμα 4 – 1386



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο διπλανό σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

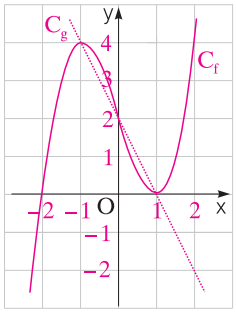
α. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

β. Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

γ. Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά

δ. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος **γ.** .

52 Θέμα 4 – 1490



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x)=-2x+2$.

Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

α. Τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει $f(x)=-2x+2$.

β. Τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$.

γ. Τις τιμές του x , για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

δ. Τις τιμές του x , για τις οποίες η παράσταση $A=\sqrt{f(x)+2x-2}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

26. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

53 Θέμα 2 – 1294

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \quad \text{και} \quad f(1) = 3$$

α. Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

β. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

54 Θέμα 2 – 1275

α. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

γ. Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

55 Θέμα 2 – 1302

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$.

α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$.

γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

56 Θέμα 4 – 1403

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{9 - x^2}}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

γ. Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B.

57 Θέμα 4 – 1447

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

β. i. Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

ii. Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ. i. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα **γ.i.**, να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος **β.ii.**, αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

58 Θέμα 4 – 1523

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

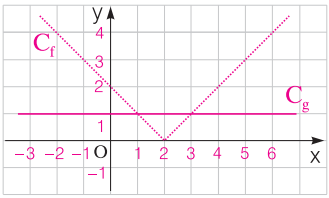
β. Να αποδειχθεί ότι $f(x)=\begin{cases} x-3 \ , & x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$

γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$.

59 Θέμα 4 – 1514

Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=1$, $x\in\mathbb{R}$.



α. i. Να εκτιμήσετε τα σημεία τομής των C_f και C_g.

ii. Να εκτιμήσετε τις τιμές του x, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από τη C_g.

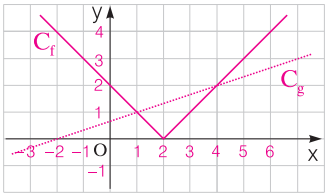
β. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση

$$A=\frac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$$

60 Θέμα 4 – 1468

Στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με $f(x)=|x-2|$ και $g(x)=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$, $x\in\mathbb{R}$.



α. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g.

β. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντήση σας στο ερώτημα **α.** .

γ. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων, να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

δ. Με τη βοήθεια του ερωτήματος **γ.** , να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$K=\sqrt{3|2-x|-(x+2)}$$

61 Θέμα 4 – 1496

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ΤΑΧΙ με το όνομα "RED" χρεώνει 1 ευρώ με την είσοδο στο ΤΑΧΙ και 0,6 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.
Μια άλλη εταιρεία ΤΑΧΙ με το όνομα "YELLOW" χρεώνει 2 ευρώ με την είσοδο στο ΤΑΧΙ και 0,4 ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει ο πελάτης.
Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α. i. Αν $f(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία "RED" για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)	0	2	8
f(x) (ευρώ)			

ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία "YELLOW" για μια διαδρομή x χιλιομέτρων να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x (km)			
g(x) (ευρώ)	2	3,2	4,8

β. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και τους τύπους τους $f(x)$, $g(x)$.

γ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας "RED" είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

δ. Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία "RED" και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα παραπάνω από τον B, να βρείτε πόσο παραπάνω θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B.

62 Θέμα 4 – 1480

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μία ημέρα, η εταιρεία A χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0,20x$$

όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α. Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας A, ο οποίος σε μία ημέρα ταξίδεψε 400 Km ;

β. Πόσα χιλιόμετρα οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος, για μία ημέρα, πλήρωσε 150 ευρώ;

γ. Μία άλλη εταιρεία, η B, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο

$$y = 80 + 0,10x$$

όπου, όπως προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε Km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

δ. Αν $f(x) = 60 + 0,20x$ και $g(x) = 80 + 0,10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών A και B αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή καθεμιάς από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος **γ.** .

63 Θέμα 4 – 1409

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α. Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

β. Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i. Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος **β.i.** , στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

γ. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος **β.** , να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

64 Θέμα 4 – 1449

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

γ. Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f .