Τι σχήμα έχουν τα καλώδια της ΔΕΗ;

Ένα καλώδιο γραμμικής πυκνότητας μ και μήκους ℓ στερεώνεται σε δύο ακλόνητα σημεία που βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και απέχουν απόσταση 2α.

Να βρεθούν:

α) Η εξίσωση της καμπύλης που περιγράφει το σχήμα του καλωδίου.

β) Η δύναμη που ασκεί το καλώδιο σε κάθε στήριγμα.

Λύση

Έστω $y = f(x)$ η εξίσωση της καμπύλης που έχει το καλώδιο και $\vec{T}(x)$ η δύναμη που ασκεί το δεξί μέρος του καλωδίου στο αριστερό.

Η δύναμη T είναι εφαπτόμενη της καμπύλης που ορίζει το καλώδιο.

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του καλωδίου μήκος ds που εκτείνεται μεταξύ των θέσεων x και x+dx.

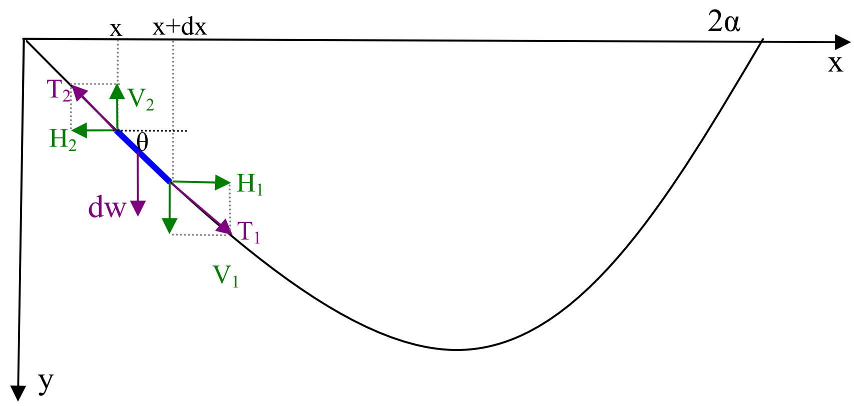
Στο τμήμα αυτό ασκούνται οι εξής δυνάμεις

- Η δύναμη $\vec{T}_1 = \vec{T}(x+dx)$, που του ασκεί το τμήμα του καλωδίου που είναι δεξιότερά του.
- Η δύναμη $\vec{T}_2 = -\vec{T}(x)$, που του ασκεί το τμήμα του καλωδίου που είναι αριστερότερά του.
- Το βάρος του $d\vec{w} = \mu\vec{g}ds$.

Επειδή το στοιχειώδες τμήμα ισορροπεί:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + d\vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) + \mu\vec{g}ds = 0 \qquad (1)$$

Αναλύουμε την T σε δύο συνιστώσες: μια οριζόντια H και μια κατακόρυφη V.



Η σχέση (1) γίνεται:

$$H(x+dx) - H(x) = 0 \Rightarrow dH = 0 \Rightarrow H = \text{σταθερή} \qquad (2\alpha)$$

$$V(x+dx) - V(x) + \mu g ds = 0 \Rightarrow dV + \mu g ds = 0 \qquad (2\beta)$$

Όμως

$$\tan\theta = \frac{V}{H} \Rightarrow V = H\tan\theta \Rightarrow V = Hy' \Rightarrow dV = Hy''dx \qquad (3)$$

και

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2} \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας τις (3) και (4) στην (2β) έχουμε:

$$\boxed{Hy'' + \mu g\sqrt{1 + y'^2} = 0} \tag{5}$$

Η σχέση (5) είναι γνωστή ως **εξίσωση του αλυσοειδούς**.

Εισάγοντας την ποσότητα $\Lambda = \dfrac{\mu g}{H}$, η οποία έχει διαστάσεις αντίστροφου μήκους η σχέση (5) γίνεται:

$$y'' + \Lambda\sqrt{1 + y'^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = -\Lambda dx \tag{6}$$

Από την σχέση (6) με ολοκλήρωση έχουμε:

$$\ln\left(y' + \sqrt{1 + y'^2}\right) = -\Lambda x + \ln C_1 \Leftrightarrow y' + \sqrt{1 + y'^2} = C_1 e^{-\Lambda x} \tag{7}$$

Προς προσδιορισμό είναι τα C_1 και Η δηλαδή τα C_1 και Λ.

Με ολοκλήρωση της (7) από 0 έως 2α προκύπτει ότι:

$$\int_0^{2\alpha} y'(x)dx + \int_0^{2\alpha} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = C_1 \int_0^{2\alpha} e^{-\Lambda x}dx \Rightarrow$$

$$y(2\alpha) - y(0) + \int_0^{\ell} ds = \frac{C_1}{\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda\alpha})$$

Όμως y(2α)=y(0)=0 και $\int_0^{\ell} ds = \ell$. Συνεπώς:

$$\ell = \frac{C_1}{\Lambda}(1 - e^{-2\Lambda\alpha}) \Rightarrow C_1 = \frac{\ell\Lambda}{1 - e^{-2\Lambda\alpha}} \tag{8}$$

Από την (7) έχουμε:

$$y' + \sqrt{1 + y'^2} = C_1 e^{-\Lambda x} \Rightarrow \sqrt{1 + y'^2} = C_1 e^{-\Lambda x} - y' \Rightarrow 1 + y'^2 = (C_1 e^{-\Lambda x} - y')^2 \Rightarrow$$

$$1 + y'^2 = C_1^2 e^{-2\Lambda x} + y'^2 - 2C_1 e^{-\Lambda x} y' \Rightarrow 2C_1 e^{-\Lambda x} y' = C_1^2 e^{-2\Lambda x} - 1 \Rightarrow y' = \frac{C_1 e^{-\Lambda x}}{2} - \frac{e^{\Lambda x}}{2C_1} \tag{9}$$

Με ολοκλήρωση της (9) έχουμε:

$$\boxed{y(x) = -\frac{C_1 e^{-\Lambda x}}{2\Lambda} - \frac{e^{\Lambda x}}{2\Lambda C_1} + C_2} \tag{10}$$

Πρέπει y(0)=y(2α)=0. Επομένως

$$-\frac{C_1}{2\Lambda} - \frac{1}{2\Lambda C_1} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{C_1}{2\Lambda} + \frac{1}{2\Lambda C_1} \tag{11α}$$

και

$$-\frac{C_1 e^{-2\Lambda\alpha}}{2\Lambda} - \frac{e^{2\Lambda\alpha}}{2\Lambda C_1} + \frac{C_1}{2\Lambda} + \frac{1}{2\Lambda C_1} = 0 \Rightarrow C_1(1 - e^{-2\Lambda\alpha}) + \frac{1}{C_1}(1 - e^{2\Lambda\alpha}) = 0 \tag{11β}$$

Από τις σχέσεις (8) και (11β) θα υπολογιστούν τα C_1, Λ.

Αντικαθιστώντας το C_1 από την (8) στην (11β) έχουμε:

$$\frac{\ell\Lambda}{1-e^{-2\Lambda\alpha}}(1-e^{-2\Lambda\alpha})+\frac{1-e^{-2\Lambda\alpha}}{\ell\Lambda}(1-e^{2\Lambda\alpha})=0 \Rightarrow \ell^2\Lambda^2=(e^{2\Lambda\alpha}-1)(1-e^{-2\Lambda\alpha}) \Rightarrow$$

$$\ell^2\Lambda^2=\frac{(e^{2\Lambda\alpha}-1)^2}{e^{2\Lambda\alpha}} \Rightarrow \ell\Lambda=\frac{e^{2\Lambda\alpha}-1}{e^{\Lambda\alpha}} \Rightarrow \ell\Lambda=e^{\Lambda\alpha}-e^{-\Lambda\alpha} \Rightarrow \frac{\ell\Lambda}{2}=\sinh(\Lambda\alpha) \qquad (12)$$

Αντικαθιστώντας την (12) στην (8) έχουμε:

$$C_1=\frac{e^{\Lambda\alpha}-e^{-\Lambda\alpha}}{1-e^{-2\Lambda\alpha}}=\frac{e^{\Lambda\alpha}(1-e^{-2\Lambda\alpha})}{1-e^{-2\Lambda\alpha}} \Rightarrow C_1=e^{\Lambda\alpha} \qquad (13)$$

Θέτουμε $\boxed{\zeta=\Lambda\alpha \Leftrightarrow \Lambda=\frac{\zeta}{\alpha}}$. (14)

Η 12 γίνεται

$$\boxed{\frac{\sinh(\zeta)}{\zeta}=\frac{\ell}{2\alpha}} \qquad (15)$$

Δοθέντων των ℓ, α, από την σχέση (15) υπολογίζεται το ζ, από την σχέση (14) το Λ, από την σχέση (13) το C_1 και από την σχέση $\Lambda=\frac{\mu g}{H} \Rightarrow H=\frac{\mu g}{\Lambda}=\frac{\mu g\alpha}{\zeta}$ υπολογίζουμε το H.

Αντικαθιστώντας τα C_1, C_2 στην (10) έχουμε τελικά ότι:

$$\boxed{y(x)=\frac{1}{\Lambda}\left[\cosh(\Lambda\alpha)-\cosh(\Lambda(x-\alpha))\right]} \qquad (16)$$

Από τις σχέσεις (16) και (3) έχουμε ότι:

$y'(x)=-\sinh(\Lambda(x-\alpha)$ και

$V(x)=Hy'(x)=-H\sinh(\Lambda(x-\alpha)$

Η μέγιστη τιμή της y επιτυγχάνεται για x=α.

$$\beta=y(\alpha)=\frac{1}{\Lambda}\left[\cosh(\Lambda\alpha)-1\right]$$

Συνεπώς η δύναμη που ασκείται στο αριστερό στήριγμα είναι:

$$\vec{T}(0)=H\vec{i}+V(0)\vec{j}=H\vec{i}+H\sinh(\Lambda\alpha)\vec{j}=H\vec{i}+H\sinh(\zeta)\vec{j}=H\vec{i}+H\zeta\frac{\ell}{2\alpha}\vec{j} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_\alpha=\vec{T}(0)=H\vec{i}+H\Lambda\frac{\ell}{2}\vec{j}$$

Και η δύναμη που ασκείται στο δεξιό

$$\vec{F}_2=-\vec{T}(2\alpha)=-H\vec{i}-V(2\alpha)\vec{j}=-H\vec{i}+H\sinh(\Lambda\alpha)\vec{j}=-H\vec{i}+H\Lambda\frac{\ell}{2}\vec{j}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι $\vec{F}_1+\vec{F}_2=H\Lambda\ell\vec{j}=\mu g\ell\vec{j}$.

Παρατήρηση

Έστω ότι το μήκος ℓ του καλωδίου δεν είναι πολύ μεγαλύτερο από την οριζόντια απόσταση 2α.

Τότε η κατακόρυφη απόσταση του χαμηλότερου σημείου του καλωδίου από τα σημεία στήριξης (βέλος της καμπύλης) είναι μικρή συγκρινόμενη με την απόσταση 2α, με αποτέλεσμα η γωνία θ να είναι μικρή.

Επομένως,

$$1+y'^2=1+\tan^2\theta\cong 1$$

Η σχέση (5) γίνεται:

$$Hy''+\mu g=0\Leftrightarrow y''(x)=-\frac{\mu g}{H}\Leftrightarrow y(x)=-\frac{\mu g}{2H}x^2+Ax+B\ (\text{παραβολή})$$

Η y μηδενίζεται για x=0 και x=2α. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι η εξίσωση της y είναι

$$y(x)=\frac{\mu g}{2H}x(2\alpha-x) \tag{17}$$

Το βέλος της καμπύλης είναι $\beta=y(\alpha)=\dfrac{\mu g}{2H}\alpha^2$

Στα σχήματα που ακολουθούν έχουν σχεδιαστεί με κόκκινο χρώμα οι γραφικές παραστάσεις της σχέσης (16) και με μπλε χρώμα της σχέσης (17) θεωρώντας ότι έχουν το ίδιο βέλος στην περίπτωση που

$$\zeta=2\Rightarrow\frac{\ell}{2\alpha}=\frac{\sinh(2)}{2}=1{,}813\quad\text{και}\quad\zeta=4\Rightarrow\frac{\ell}{2\alpha}=\frac{\sinh(4)}{4}=6{,}82$$

korfiatis@sch.gr