Ένα αρμονικό κύμα χωρίς ασυνέχειες και κόχες

Α) Μια εξίσωση με κόχες και ασυνέχειες

Αφετηρία της συζήτησης θα είναι το εξής γνωστό πρόβλημα.

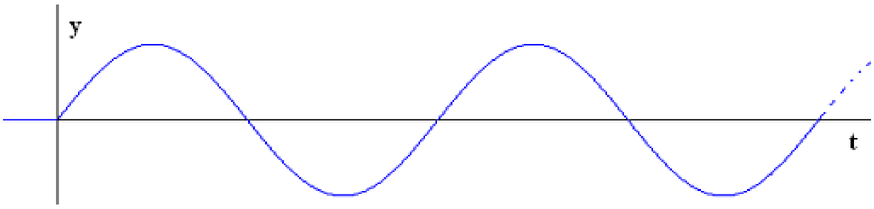
Θεωρούμε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ηρεμεί κατά μήκος του ημιάξονα Ox ενός συστήματος συντεταγμένων. Την στιγμή t=0 η άκρη O του μέσου αρχίζει να ταλαντώνεται κατά την διεύθυνση του άξονα y με εξίσωση y=Αημ(ωt), με αποτέλεσμα στο μέσον να διαδοθεί εγκάρσιο κύμα μήκους κύματος λ.

- i) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου O συναρτήσει του χρόνου.
- ii) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της ταχύτητας του σημείου O συναρτήσει του χρόνου.
- iii) Να βρεθεί η εξίσωση του παραγόμενου κύματος
- iv) Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο του κύματος την στιγμή t=T.
- v) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της ταχύτητας των σημείων του μέσου συναρτήσει της θέσης τους την χρονική στιγμή t=T.

<u>Απάντηση</u>

i) Η απομάκρυνση του σημείου O συναρτήσει του χρόνου είναι:

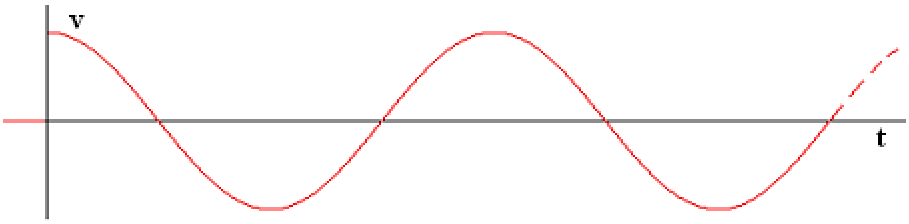
$$y_O = \begin{cases} A\eta\mu(\omega t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$ με αντίστοιχη γραφική παράσταση



Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση παρουσιάζει κόχη στο σημείο (0,0).

ii) Η ταχύτητα του σημείου O συναρτήσει του χρόνου είναι:

$$v_O = \begin{cases} \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



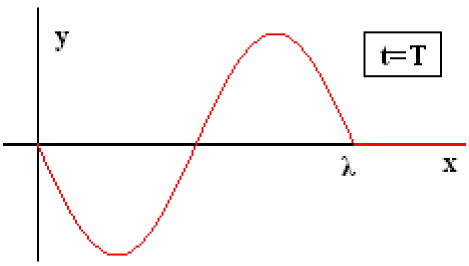
Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του σημείου O παρουσιάζει ασυνέχεια την χρονική στιγμή 0.

iii) Η εξίσωση του παραγόμενου κύματος είναι:

$$y(x,t) = \begin{cases} A\eta\mu(\omega t - kx) & \upsilon t - x \geq 0 \\ 0 & \upsilon t - x < 0 \end{cases}, \ t\in\mathbb{R},\ x\geq 0. \qquad (1)$$

iv) Αντικαθιστώντας στην σχέση (1) t=T έχουμε:

$$y(x,T) = \begin{cases} A\eta\mu(2\pi - kx) & x \leq \lambda \\ 0 & x > \lambda \end{cases}$$ με γραφική παράσταση

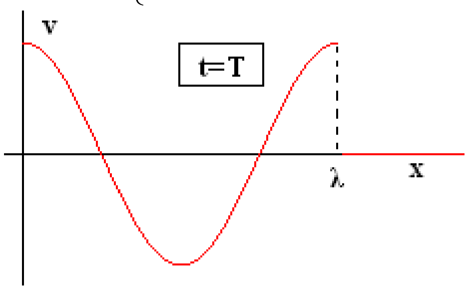


Παρατηρούμε ότι η κόχη σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου «μετακινήθηκε» κατά λ.
v) Παραγωγίζοντας την σχέση (1) ως προς τον χρόνο έχουμε:

$$v(x,t)=\begin{cases}\omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t-kx) & \upsilon t-x>0\\ 0 & \upsilon t-x<0\end{cases},\ t\in\mathbb{R},\ x\geq 0. \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) t=T έχουμε

$$v(x,T)=\begin{cases}\omega A\sigma\upsilon\nu(2\pi-kx) & x<\lambda\\ 0 & x>\lambda\end{cases}$$ με γραφική παράσταση



Παρατηρούμε ότι η ασυνέχεια στην ταχύτητα, σε χρονικό διάστημα μιας περιόδου «μετακινήθηκε» κατά λ.

Σχόλιο

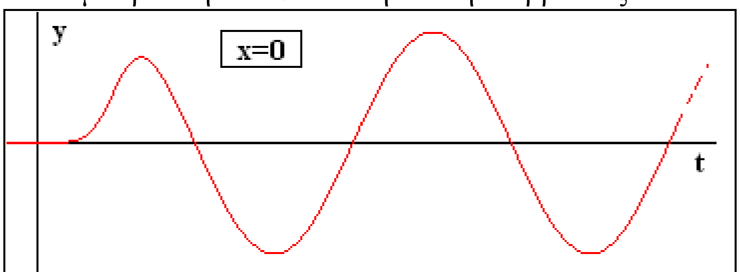
Η ασυνέχεια στην ταχύτητα μας βεβαιώνει ότι η σχέση (1) δεν περιγράφει ένα φυσικό σύστημα.

Β) Ένα αρμονικό κύμα χωρίς κόχες και ασυνέχειες

Όπως φάνηκε από την παραπάνω ανάλυση το πρόβλημα οφείλεται στον τρόπο ταλάντωσης του σημείου Ο. Το γεγονός ότι το Ο, το οποίο αρχικά ήταν ακίνητο, ακαριαία αποκτά ταχύτητα ωΑ σημαίνει ότι το Ο έχει άπειρη επιτάχυνση.

Στην πραγματικότητα το σημείο Ο την στιγμή t=0 αρχίζει να κινείται και μετά από ένα μεταβατικό χρονικό διάστημα μεγέθους τ η κίνησή του γίνεται απλή αρμονική ταλάντωση.

Η απομάκρυνση του Ο από την θέση ισορροπίας του συναρτήσει του χρόνου είναι περίπου μη παρακάτω.



Εικόνα 1

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του Ο συναρτήσει του χρόνου έχει την παρακάτω μορφή:

$$y_O(t)=f(t)=\begin{cases}A\eta\mu(\omega t) & t\geq\tau\\ h(t) & 0\leq t<\tau\\ 0 & t<0\end{cases}$$

όπου h(t) μια κατάλληλη συνάρτηση τέτοια ώστε η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Η h(t) καθορίζεται από τον τρόπο με τον οποίο το σημείο Ο τίθεται σε κίνηση.

Η εξίσωση του κύματος είναι λύση της κυματικής εξίσωσης με αρχικές συνθήκες

$$y(x,0)=0,\ \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=v(x,0)=0,\ x\geq 0,\quad y(0,t)=f(t)$$

Αποδεικνύεται ότι η λύση της κυματικής εξίσωσης με αυτές τις αρχικές συνθήκες είναι:

$$y(x,t)=f(t-\frac{x}{\upsilon})=\begin{cases} A\eta\mu(\omega t-kx) & t-\frac{x}{\upsilon}\geq\tau \\ h(t-\frac{x}{\upsilon}) & 0\leq t-\frac{x}{\upsilon}<\tau \\ 0 & t-\frac{x}{\upsilon}<0 \end{cases}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

- Μια δοθείσα χρονική στιγμή t, τα σημεία τα οποία είναι τελείως ακίνητα ικανοποιούν την σχέση $x>\upsilon t$. Άρα το μέτωπο του κύματος βρίσκεται στην θέση $x=\upsilon t$.
- Μια δοθείσα χρονική στιγμή τα σημεία του μέσου που βρίσκονται «πίσω από το μέτωπο του κύματος» και απέχουν από αυτό απόσταση μεγαλύτερη από $\upsilon\tau$ βρίσκονται σε μια ημιτονοειδή καμπύλη.
- Ένα δοθέν σημείο του μέσου, που βρίσκεται στην θέση x, αρχίζει να κινείται την στιγμή $\frac{x}{\upsilon}$.

  Από την στιγμή $\frac{x}{\upsilon}+\tau$ και μετά η κίνησή του είναι α.α.τ.

Στα επόμενα φαίνεται το στιγμιότυπο του κύματος την στιγμή t=3T και η γραφική παράσταση της ταχύτητας των σημείων του μέσου την ίδια χρονική στιγμή.