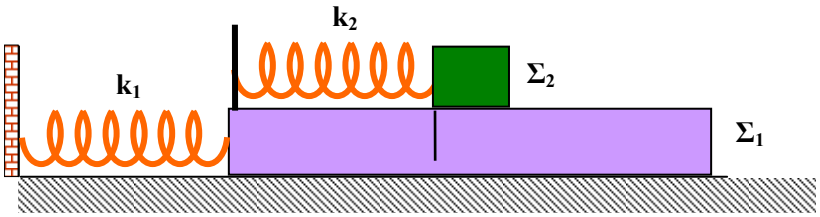
Σύνθεση ή σύζευξη ταλαντώσεων;

Σώμα Σ_1 μάζας m_1 προσδένεται στο ένα άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k_1 το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Πάνω στο πρώτο σώμα στερεώνεται δεύτερο ελατήριο σταθεράς k_2, στο ελεύθερο άκρο του οποίου προσδένεται δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας m_2 όπως στο σχήμα.



Η τριβή μεταξύ των δύο σωμάτων καθώς και η τριβή μεταξύ του σώματος Σ_1 και το δαπέδου θεωρείται αμελητέα.

Αρχικά τα δύο σώματα ηρεμούν και τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος.

Προκαλούμε μια διαταραχή στο σύστημα και το αφήνουμε ελεύθερο να κινηθεί.

Α) Να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις για τις παραμορφώσεις των δύο ελατηρίων.

Β) Θεωρούμε ότι $k_1=2k_2$ και $m_1=2m_2$ και ότι την στιγμή $t=0$ τα σώματα είναι ακίνητα ενώ τα ελατήρια έχουν επιμηκύνσεις A_1, A_2.

Β1) Να βρείτε την εξίσωση της παραμόρφωσης κάθε ελατηρίου συναρτήσει του χρόνου.

Β2) Να κάνετε την γραφική παράσταση της ενέργειας των συστημάτων Σώμα 1 - Ελατήριο 1 και Σώμα 2 Ελατήριο 2 συναρτήσει του χρόνου στην περίπτωση που $A_1=0$ ή $A_2=0$

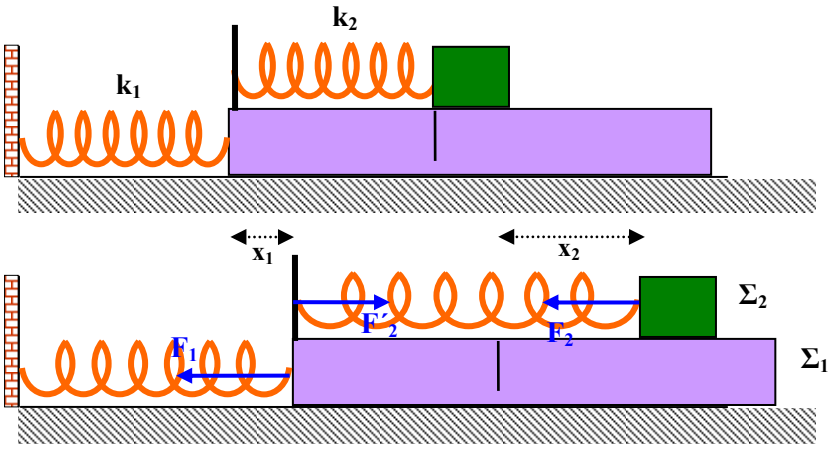
Απάντηση

Θεωρούμε μια τυχαία θέση στην οποία τα ελατήρια έχουν παραμορφωθεί κατά x_1, x_2.

Η μετατοπίσεις των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι x_1 και x_1+x_2 αντιστοίχως.

Το σώμα Σ_1 δέχεται από το ελατήριο σταθεράς k_1 δύναμη $F_1=-k_1x_1$ και από το ελατήριο σταθεράς k_2 δύναμη $F'_2=k_2x_2$.

Το σώμα Σ_2 δέχεται από το ελατήριο σταθεράς k_2 δύναμη $F_2=-k_2x_2$.



Από τον δεύτερο νόμο του Newton για το σώμα Σ_1 έχουμε ότι:

$$m_1 a_1 = F_1 + F_2' \Leftrightarrow m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 + k_2 x_2 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}_1 = -\frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2} \quad (1)$$

Από τον δεύτερο νόμο του Newton για το σώμα Σ_2 έχουμε ότι:

$$m_2 a_2 = F_2 \Leftrightarrow m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k_2 x_2 \Leftrightarrow \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{k_2}{m_2} x_2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας την (1) στην (2) έχουμε ότι:

$$\boxed{\ddot{x}_2 = \frac{k_1}{m_1} x_1 - \left(\frac{k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) x_2} \quad (3)$$

Το σύστημα των (1) και (3) αποτελεί ένα γραμμικό ομογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης.

Για την επίλυσή του θα ακολουθήσουμε την μέθοδο των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (normal modes).

Θεωρούμε ότι και τα δύο ελατήρια ταλαντώνονται με την ίδια γωνιακή συχνότητα ω και την ίδια φάση.

Αναζητούμε δηλαδή λύση της μορφής

$$\begin{matrix} x_1 = B_1 \sin \omega t \\ x_2 = B_2 \sin \omega t \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{matrix}$$

Οι εξισώσεις (1) και (3) γίνονται:

$$\left(\omega^2 - \frac{k_1}{m_1}\right) x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 = 0 \quad (4\alpha)$$

$$\frac{k_1}{m_1} x_1 + \left(\omega^2 - \frac{k_2}{m_1} - \frac{k_2}{m_2}\right) x_2 = 0 \quad (4\beta)$$

Οι εξισώσεις (4α) και (4β) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα x_1, x_2.

Για να έχει μη τετριμμένη λύση θα πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών να είναι μηδέν.

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_1} & \omega^2 - \frac{k_2}{m_1} - \frac{k_2}{m_2} \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Η εξίσωση (5) είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς ω^2. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι, ανεξαρτήτως των τιμών των παραμέτρων, έχει πάντα δύο ρίζες θετικές και άνισες.

Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις θα περιοριστούμε στην περίπτωση που $k_2=k$, $k_1=2k$, $m_2=m$, $m_1=2m$.

Αντικαθιστώντας στην (5) έχουμε ότι:

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \frac{k}{m} & \frac{k}{2m} \\ \frac{k}{m} & \omega^2 - \frac{3k}{2m} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \omega^4 - \frac{5k}{2m}\omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} \text{ ή } \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

Οι δύο παραπάνω γωνιακές συχνότητες είναι οι γωνιακές συχνότητες των **κανονικών τρόπων ταλάντωσης**.

Αντικαθιστώντας $\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ στην (4α) έχουμε ότι:

$$\left(\frac{k}{2m} - \frac{k}{m}\right)x_1 + \frac{k}{2m}x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1$$

Επομένως μια λύση του συστήματος είναι η $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \sin\omega_1 t \\ B_1 \sin\omega_1 t \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin\omega_1 t$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι μια δεύτερη λύση είναι η $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\omega_1 t$

Αντικαθιστώντας $\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ στην (4α) έχουμε ότι:

$$\left(\frac{2k}{m} - \frac{k}{m}\right)x_1 + \frac{k}{2m}x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -2x_1$$

Άρα μια λύση είναι η $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \sin\omega_2 t$ και μια ακόμη η $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cos\omega_2 t$

Επειδή το σύστημα των (1) , (3) είναι γραμμικό ομογενές, το άθροισμα των ανωτέρω τεσσάρων λύσεων είναι λύση. Επειδή δε περιέχει 4 αυθαίρετες σταθερές είναι η γενική λύση. Συνεπώς

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin\omega_1 t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos\omega_1 t + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \sin\omega_2 t + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cos\omega_2 t \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \sin\omega_1 t + c_2 \cos\omega_1 t + c_3 \sin\omega_2 t + c_4 \cos\omega_2 t \\ x_2 &= c_1 \sin\omega_1 t + c_2 \cos\omega_1 t - 2c_3 \sin\omega_2 t - 2c_4 \cos\omega_2 t \end{aligned} \qquad (6)$$

Την στιγμή t=0 ισχύει ότι $x_1=A_1$ και $x_2=A_2$. Επομένως

$$A_1 = c_2 + c_4, \quad A_2 = -2c_2 + 2c_4$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $c_2 = \frac{2A_1 + A_2}{3}$ και $c_4 = \frac{A_1 - A_2}{3}$

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (6) έχουμε ότι:

$$\dot{x}_1 = c_1\omega_1 \cos\omega_1 t - c_2\omega_1 \sin\omega_1 t + c_3\omega_2 \cos\omega_2 t - c_4\omega_2 \sin\omega_2 t$$
$$\dot{x}_2 = c_1\omega_1 \cos\omega_1 t - c_2\omega_1 \sin\omega_1 t - 2c_3\omega_2 \cos\omega_2 t + 2c_4\omega_2 \sin\omega_2 t$$

Την στιγμή t=0 ισχύει ότι $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Επομένως

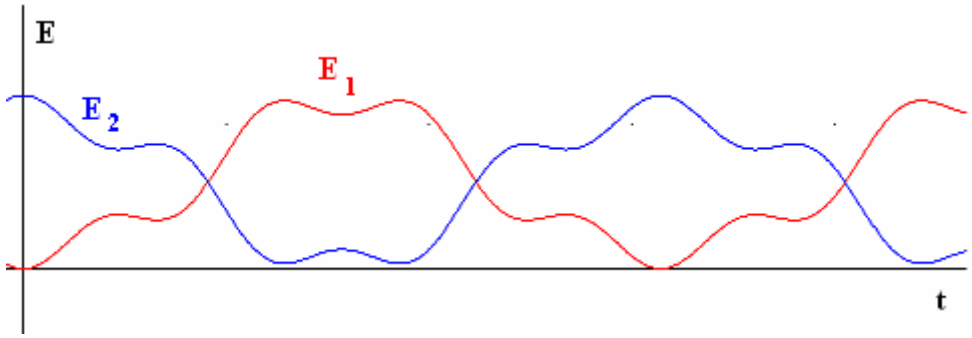
$c_1\omega_1 + c_3\omega_2 = 0$, $c_1\omega_1 - 2c_3\omega_2 = 0$. Από αυτές συμπεραίνουμε ότι $c_1=c_3=0$.

Τελικά

$$x_1 = \frac{2A_1 + A_2}{3}\cos\omega_1 t + \frac{A_1 - A_2}{3}\cos\omega_2 t$$
$$x_2 = \frac{2A_1 + A_2}{3}\cos\omega_1 t - 2\frac{A_1 - A_2}{3}\cos\omega_2 t \qquad (7)$$

Παρατηρήσεις και σχόλια

1. Αν κάθε σύστημα ελατήριο – μάζα εκτελούσε ανεξάρτητη ταλάντωση τότε η γωνιακή του συχνότητα θα ήταν $\sqrt{\frac{k}{m}}$. Ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των δύο συστημάτων κάθε σώμα εκτελεί μια σύνθετη κίνηση, η οποία είναι υπέρθεση δύο ταλαντώσεων με γωνιακές συχνότητες $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ και $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$
2. Επειδή στο παράδειγμά μας ο λόγος των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι ρητός αριθμός, η κίνηση κάθε σώματος είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου. Με τυχαίες τιμές των παραμέτρων ο παραπάνω λόγος είναι άρρητος με αποτέλεσμα οι συναρτήσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ να μην είναι περιοδικές.
3. Οι ενέργειες των δύο συστημάτων Ελατήριο 1 – Σώμα 1 και Ελατήριο 2 – Σώμα 2 είναι
$$E_1 = K_1 + U_{\varepsilon\lambda(1)} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}k_1 x_1^2 = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}k_1 x_1^2$$
$$E_2 = K_2 + U_{\varepsilon\lambda(2)} = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2 = \frac{1}{2}m_2 (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}k_2 x_2^2$$
4. Για την δοθείσα σχέση μεταξύ των παραμέτρων και $A_1=0$ η γραφική παράσταση των ενεργειών των δύο συστημάτων συναρτήσει του χρόνου είναι



5. Εργαζόμενοι ομοίως στην περίπτωση που περίπτωση που $k_2=k$, $k_1=4k$, $m_2=m$, $m_1=3m$ οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι $\omega_1=\sqrt{\frac{2k}{m}}$ και $\omega_2=\sqrt{\frac{2k}{3m}}$.

Η γενική λύση του συστήματος των (1) και (3) είναι:

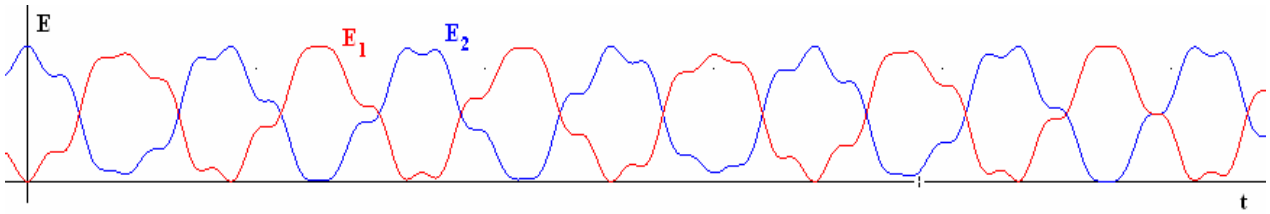
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\sin\omega_1 t + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\cos\omega_1 t + c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\sin\omega_2 t + c_4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\cos\omega_2 t$$

Με μηδενικές ταχύτητες την στιγμή t=0 έχουμε: $c_1=c_3=0$, $c_2=\frac{2A_1-A_2}{4}$ και $c_4=\frac{2A_1+A_2}{4}$.

$$x_1=\frac{2A_1-A_2}{4}\cos\omega_1 t+\frac{2A_1+A_2}{4}\cos\omega_2 t$$

$$x_2=-\frac{2A_1-A_2}{2}\cos\omega_1 t+\frac{2A_1+A_2}{2}\cos\omega_2 t$$

Θεωρώντας και πάλι ότι $A_1=0$ οι γραφικές παραστάσεις είναι:



Παρατηρούμε ότι δύο συναρτήσεις δεν είναι «απόλυτα περιοδικές». Το γεγονός αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο λόγος των δύο γωνιακών συχνοτήτων είναι άρρητος.

6. Παρά το γεγονός ότι το σύστημα είναι αρκετά απλό, δεν μπορεί να οριστεί η έννοια «ενέργεια ταλάντωσης». Αντιθέτως εξακολουθούν να ορίζονται οι έννοιες δυναμική ενέργεια ελατηρίου και κινητική ενέργεια σώματος. Το γεγονός αυτό, κατά την άποψή μου, συνηγορεί ότι η έννοια που έχουμε ορίσει στον απλό αρμονικό ταλαντωτή δεν είναι μια φυσική πραγματικότητα αλλά ένα ολοκλήρωμα της κίνησης χωρίς ιδιαίτερη φυσική υπόσταση.

korfiatis@sch.gr