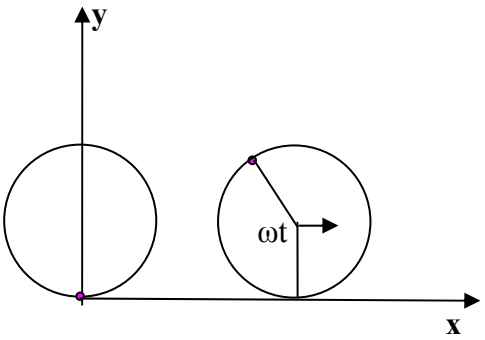
Η ΒΡΑΧΥΣΤΟΧΡΟΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗ ΚΑΙ ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ EULER – LAGRANGE

Η δημοσίευση του Γιάννη Φιορεντίνου για το πρόβλημα της βραχυστόχρονου ήταν μια πρό(σ)κληση.
Διαβάζοντας την εκφώνηση του προβλήματος αποφάσισα να δώσω μια πλήρη αυτοτελή λύση χωρίς να ανατρέξω στην βιβλιογραφία. Στην συνέχεια θεώρησα σκόπιμο να μοιραστώ με τους καλούς φίλους του ylikonet την λύση καθώς και το κύριο εργαλείο που χρησιμοποίησα :
Τις εξισώσεις Euler – Lagrange.
Η παρουσίαση αποτελείται από τρία μέρη

- Τις εξισώσεις της κυκλοειδούς καμπύλης
- Την διατύπωση του προβλήματος της βραχυστόχρονου καμπύλης.
- Τις εξισώσεις Euler – Lagrange
- Την επίλυση του προβλήματος

A) Η κυκλοειδής καμπύλη



Θεωρούμε ένα κύλινδρο ακτίνας R, ο οποίος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα. Ζητάμε την εξίσωση της τροχιάς που διαγράφει ένα συγκεκριμένο σημείο του.
Έστω ότι την στιγμή t=0 το σημείο βρίσκεται στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων.
Την στιγμή t ο κύλινδρος έχει στραφεί κατά γωνία φ=ωt.
Οι συντεταγμένες του σημείου είναι:

$$x = \upsilon_{cm} t + R\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2} - \varphi) = \omega t R - R\eta\mu\varphi = R(\varphi - \eta\mu\varphi)$$

$$y = R + R\eta\mu(\frac{3\pi}{2} - \varphi) = R(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

Επομένως το διάνυσμα θέσης του σημείου είναι

$$(x, y) = \left(R(\varphi - \eta\mu\varphi), R(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)\right) \qquad (A.1)$$

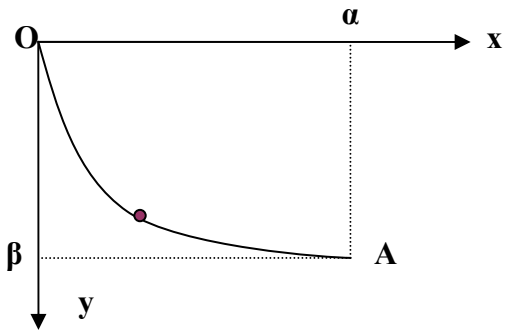
Η σχέση (1) είναι η εξίσωση της τροχιάς του σημείου σε παραμετρική μορφή.
Από την σχέση (1) έχουμε για τα διαφορικά των συντεταγμένων:

$$\left.\begin{array}{l} dx = R(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)d\varphi \\ dy = R\eta\mu\varphi d\varphi \end{array}\right| \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\eta\mu\varphi}{1 - \sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2}{1 - \sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{2R}{y} \Rightarrow$$

$$y\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2R \qquad (A.2)$$

B) Η βραχυστόχρονη καμπύλη

Έστω Ο και Α σταθερά σημεία τα οποία βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.
Έστω ότι ένα σφαιρίδιο μάζας m αφήνεται από το σημείο Ο να ολισθήσει χωρίς τριβές κατά μήκος της καμπύλης ΟΑ του σχήματος.
Ζητάμε να βρούμε την εξίσωση της καμπύλης ΟΑ έτσι ώστε ο χρόνος από το Ο στο Α να είναι ο ελάχιστος δυνατός.



Υποθέτουμε ότι η καμπύλη ΟΑ είναι παραγωγίσιμη με εξίσωση y=f(x) όπου
$f:[0,\beta]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με πρώτη παράγωγο συνεχή και ικανοποιεί τις συνθήκες $f(0)=0$, $f(\alpha)=\beta$.
Ζητάμε την f ώστε το χρονικό διάστημα από το Ο στο Α να είναι το ελάχιστο δυνατό.
Το πρόγραμμα εύρεσης της f αποτελείται από δύο στάδια:

- Στο πρώτο στάδιο θεωρούμε δεδομένη την f και υπολογίζουμε το χρονικό διάστημα από το Ο στο Α.
- Στο δεύτερο στάδιο αναζητούμε την f ώστε το χρονικό διάστημα να είναι το ελάχιστο δυνατό.

Στάδιο 1: Με δεδομένη την f υπολογίζουμε το χρονικό διάστημα από το Ο στο Α.

Σε μια τυχαία θέση με συντεταγμένες (x,y) το υλικό σημείο έχει ταχύτητα υ.
Έστω ds το στοιχείο μήκους της καμπύλης ΟΑ. Ισχύει ότι

$$\upsilon=\frac{ds}{dt}\Rightarrow dt=\frac{ds}{\upsilon}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\upsilon}=\frac{dx}{\upsilon}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\upsilon}dx \qquad (B.1)$$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας προκύπτει ότι

$$\upsilon=\sqrt{2gy} \qquad (B.2)$$

Από τις (B.1) και (B.2) έχουμε:

$$dt=\frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{2gf(x)}}dx\Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\alpha}\frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)}}dx} \qquad (B.3)$$

Εφαρμογή 1:

Υποθέτουμε ότι α=β και η καμπύλη ΟΑ είναι τεταρτοκύκλιο ακτίνας α.
Τότε $(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2\Rightarrow y=\sqrt{\alpha^2-(x-\alpha)^2}\Rightarrow f(x)=\sqrt{\alpha^2-(x-\alpha)^2}$
Αντικαθιστώντας στην σχέση (B.3) βρίσκουμε ότι:

$$\Delta t = \frac{\alpha}{\sqrt{2g}} \int_0^{\alpha} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^2 - (\alpha - x)^2}} \right)^3 dx$$

Θέτοντας $\alpha - x = \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi$ εύκολα βρίσκουμε ότι $\Delta t = \sqrt{\frac{\alpha}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\eta\mu\varphi}} = 2.6\sqrt{\frac{\alpha}{2g}}$

<u>Εφαρμογή 2:</u>
Υποθέτουμε ότι α=β και η καμπύλη ΟΑ είναι ευθεία με εξίσωση $y = x \Rightarrow f(x) = x$.

Τότε $\Delta t = \sqrt{\frac{\alpha}{2g}} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2.8\sqrt{\frac{\alpha}{2g}}$

Γ) Οι εξισώσεις Euler - Lagrange

Η (Β.3) έχει την μορφή Δt=I με

$$I = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} L\left[f(x), f'(x), x\right] dx \qquad (\Gamma.1)$$

όπου $f(\alpha_1)=\beta_1$ και $f(\alpha_2)=\beta_2$.
Ζητάμε να βρούμε εκείνη την f για την οποία το I είναι το ελάχιστο δυνατό.
Έστω ότι την βρήκαμε και είναι η f(x).
Θεωρούμε ε>0 και τυχαία συνάρτηση g με $g(\alpha_1)=0$ και $g(\alpha_2)=0$.
Η συνάρτηση h με h(y)=f(y)+εg(y) ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες. $h(\alpha_1)=\beta_1$ και $h(\alpha_2)=\beta_2$.
Ορίζεται η συνάρτηση

$$I(\varepsilon) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} L\left[h(x), h'(x), x\right] dx = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} L\left[f(x) + \varepsilon g(x), f'(x) + \varepsilon g'(x), x\right] dx$$

Επειδή η f ελαχιστοποιεί το I, η συνάρτηση I(ε) παρουσιάζει ελάχιστο για ε=0.
Άρα

$$I'(0) = 0 \Rightarrow \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left.\frac{\partial L}{\partial h}\right|_{h=f} g(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left.\frac{\partial L}{\partial h'}\right|_{h=f} g'(x)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial L}{\partial f} g(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial L}{\partial f'} g'(x)dx = 0 \qquad (\Gamma.2)$$

Εκτελώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο δεύτερο ολοκλήρωμα της (Γ.2) έχουμε:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial L}{\partial f'} g'(x)dx = \left[\frac{\partial L}{\partial f'} g(x)\right]_{x=\alpha_2} - \left[\frac{\partial L}{\partial f'} g(x)\right]_{x=\alpha_1} - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) g(x)dx$$

Επειδή $g(\alpha_1)=g(\alpha_2)=0$ έχουμε ότι

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\partial L}{\partial f'} g'(x)dx = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right) g(x)dx$$

Η σχέση (Γ.2) γίνεται:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)\right] g(x)dx = 0 \qquad (\Gamma.3)$$

Επειδή η σχέση (Γ.2) πρέπει να ισχύει για κάθε g προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial L}{\partial f}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)=0 \qquad (\Gamma.4)$$

Η εξίσωση (Γ.4) είναι γνωστή ως **εξίσωση Euler-Lagrange**.
Η εξίσωση (Γ.4) είναι μια διαφορική εξίσωση $2^{ης}$ τάξης για την άγνωστη συνάρτηση f με αρχικές συνθήκες $f(\alpha_1)=\beta_1$ και $f(\alpha_2)=\beta_2$.
Υπάρχει μια ενδιαφέρουσα περίπτωση στην οποία η εξίσωση (Γ.4) ολοκληρώνεται άμεσα μετατρεπόμενη σε μια ΔΕ $1^{ης}$ τάξης.
Η περίπτωση αυτή είναι η περίπτωση εκείνη στην οποία η **L δεν εξαρτάται ρητώς από το x.**
Δηλαδή $L=L(f(x),f'(x))$.
Ορίζουμε την ποσότητα (Hamiltonian)

$$H=\frac{\partial L}{\partial f'}f'-L \qquad (\Gamma.5)$$

Θα αποδείξουμε ότι η H είναι σταθερά
Πράγματι:

$$\frac{dH}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)f'+\frac{\partial L}{\partial f'}f''-\frac{\partial L}{\partial f}f'-\frac{\partial L}{\partial f'}f''=f'\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)-\frac{\partial L}{\partial f}\right]=0$$

Στο πρόβλημα που εξετάζουμε

$$L(f,f',y)=\frac{\sqrt{f'^2+1}}{\sqrt{f}} \qquad (\Gamma.6)$$

Ισχύει ότι $\frac{\partial L}{\partial f'}=\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{f'}{\sqrt{f'^2+1}}$

$$H=\frac{\partial L}{\partial f'}f'-L=\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{f'^2}{\sqrt{f'^2+1}}-\frac{\sqrt{f'^2+1}}{\sqrt{f}}=-\frac{1}{\sqrt{f'^2+1}\sqrt{f}} \qquad (\Gamma.7)$$

Επειδή η L δεν εξαρτάται ρητώς από το x, η H είναι σταθερή. Επομένως

$$f(1+f'^2)=2c\Rightarrow y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=2c\,. \qquad (\Gamma.8)$$

Δ) Η λύση του προβλήματος

Στάδιο 2: Εύρεση εκείνης της f για την οποία το Δt είναι το ελάχιστο δυνατό.

Συγκρίνοντας την σχέση (Γ.8) με την (Α.2) είναι παραπάνω από προφανές ότι η λύση της (Γ.8) είναι η κυκλοειδής καμπύλη. Όμως ας προσπαθήσουμε να λύσουμε την (Γ.8).
Ισχύει ότι

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\geq 1\Rightarrow y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\geq y\Rightarrow 2c\geq y\geq 0\Rightarrow -c\leq y-c\leq c\Rightarrow -1\leq\frac{y-c}{c}\leq 1$$

Επομένως υπάρχει γωνία φ τέτοια ώστε

$$\frac{y-c}{c}=-\text{συν}\varphi\Rightarrow y=c(1-\text{συν}\varphi)\Rightarrow \qquad (\Delta.1)$$

$$dy=c\,\text{ημ}\varphi d\varphi \qquad (\Delta.2)$$

Αντικαθιστώντας την (Δ.1) στην (Γ.8) έχουμε:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\varphi}{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}\Rightarrow\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\varphi}{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}\Rightarrow\left(c\frac{d\varphi}{dx}\right)^2=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\varphi}{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}\frac{1}{\eta\mu^2\varphi}\Rightarrow$$

$$\left(c\frac{d\varphi}{dx}\right)^2=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\varphi}{1-\sigma\upsilon\nu\varphi}\frac{1}{(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)(1+\sigma\upsilon\nu\varphi)}\Rightarrow\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2=c^2(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)^2\Rightarrow$$

$$\frac{dx}{d\varphi}=c(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)\Rightarrow x=c(\varphi-\eta\mu\varphi)$$

<u>Εφαρμογή 3:</u>

Υποθέτουμε ότι α=β και η καμπύλη ΟΑ είναι κυκλοειδής με εξίσωση

$$(x,y)=\left(R(\varphi-\eta\mu\varphi),R(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)\right)$$

Αναζητούμε γωνία θ και ακτίνα R έτσι ώστε

$$(\alpha,\alpha)=\left(R(\theta-\eta\mu\theta),R(1-\sigma\upsilon\nu\theta)\right)$$

Επομένως

$$\theta-\eta\mu\theta=1-\sigma\upsilon\nu\theta\Rightarrow\theta=2.41$$

$$\alpha=R(\theta-\eta\mu\theta)\Rightarrow\alpha=1.74R$$

$$\Delta t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\alpha}\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y}}dx$$

Από την (Α.2)

$$y\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=2R\Rightarrow\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{\frac{2R}{y}}$$

$$\Delta t=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{\alpha}\frac{\sqrt{2R}}{y}dx=\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\alpha}\frac{dx}{y}=\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\theta}\frac{R(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)d\varphi}{R(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)}=\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\theta}d\varphi=\theta\sqrt{\frac{R}{g}}\Rightarrow$$

$$\Delta t=2.58\sqrt{\frac{\alpha}{2g}}$$

Ε.Κορφιάτης
korfiatis@sch.gr