Σύνθεση ταλαντώσεων ή συγκεκαλυμμένη τριγωνομετρία;

Δύο υλικά σημεία $Σ_1$ και $Σ_2$ εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας με περίοδο T=4s και πλάτη A_1=6cm και $A_2=2\sqrt{3}$ cm. Τα σώματα αυτά συναντώνται κάποια χρονική στιγμή σε ένα σημείο Μ που απέχει x_0=3cm από την κοινή θέση ισορροπίας τους. Την στιγμή της συνάντησης το πρώτο απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας και το δεύτερο κατευθύνεται προς αυτήν.
Να υπολογίσετε:
α) Την μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων.
β) Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί από την στιγμή της συνάντησής τους μέχρι η απόστασή τους να γίνει μέγιστη για πρώτη φορά
γ) Την περίοδο των συναντήσεων τους και τις θέσεις συνάντησης.

<u>1η Λύση (απόλύτως εντός διδακτέας ύλης)</u>

α) Ορίζουμε έναν άξονα με αρχή την θέση ισορροπίας και θετικό ημιάξονα από την Θ.Ι. προς το Μ. Θέτουμε t_0=0 ην αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή κατά την οποία το πρώτο σώμα πέρασε από την θέση ισορροπίας κατευθυνόμενο προς το Μ.
Επομένως η εξίσωση κίνησης του πρώτου σώματος είναι
$x_1 = A_1 ημ(ωt)$
Έστω t_1 η χρονική στιγμή της συνάντησης.
Την στιγμή t_1 το πρώτο σώμα έχει απομάκρυνση x_0 και θετική ταχύτητα. Συνεπώς,
$ημ(ωt_1) = \frac{x_0}{A_1} = \frac{1}{2}$ και $συν(ωt_1) > 0$. Άρα $ωt_1 = \frac{π}{6}$.
Η εξίσωση κίνησης του δεύτερου σώματος έχει εξίσωση
$x_2 = A_2 ημ(ωt + φ)$
Την στιγμή t_1 ισχύει ότι $x_2=x_0$ και $v_2<0$. Επομένως,

$$A_2 ημ(ωt_1 + φ) = x_0 \Rightarrow ημ(\frac{π}{6} + φ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = ημ\frac{π}{3} \Rightarrow \frac{π}{6} + φ = 2κπ + \frac{π}{3} \text{ ή } \frac{π}{6} + φ = 2κπ + \frac{2π}{3}$$

Την στιγμή t_1, $v_2<0 \Rightarrow ωA_2 συν(ωt_1 + φ) < 0 \Rightarrow συν(\frac{π}{6} + φ) < 0$

Άρα $\frac{π}{6} + φ = 2κπ + \frac{2π}{3} \Rightarrow φ = 2κπ + \frac{π}{2}$
Επομένως η εξίσωση κίνησης του δεύτερου σώματος είναι:

$$x_2 = A_2 ημ(ωt + 2κπ + \frac{π}{2}) = A_2 ημ(ωt + \frac{π}{2})$$

Η απόσταση d των δύο σωμάτων δίνεται από την σχέση:

$$d = |x_1 - x_2| = |A_1 ημ(ωt) - A_2 ημ(ωt + \frac{π}{2})| = |A_1 ημ(ωt) + A_2 ημ(ωt + \frac{3π}{2})|.$$

Η ποσότητα $x = A_1 ημ(ωt) + A_2 ημ(ωt + \frac{3π}{2})$ μπορεί να θεωρηθεί σαν σύνθεση των ταλαντώσεων

$\bar{x}_1 = A_1 ημ(ωt)$ και $\bar{x}_2 = A_2 ημ(ωt + \frac{3π}{2})$
Για το πλάτος και την αρχική φάση της «σύνθετης ταλάντωσης» ισχύει ότι:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 συν(\frac{3π}{2})} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$$

$$εφθ = \frac{A_2 ημ\frac{3π}{2}}{A_1 + A_2 συν\frac{3π}{2}} = -\frac{A_2}{A_1} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = εφ(-\frac{π}{6}). \text{ Άρα } θ = -\frac{π}{6}$$

Επομένως η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης είναι: $x = A ημ(ωt + θ) = 4\sqrt{3} ημ(ωt - \frac{π}{6})$ (x σε cm).

Η απόσταση d των δύο σωμάτων γίνεται:

$d = |x| = 4\sqrt{3}\left|\eta\mu(\omega t - \frac{\pi}{6})\right|$ (d σε cm).

Άρα η μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων είναι $d_{max} = 4\sqrt{3}\,cm$.

β) Έστω t_2 η χρονική στιγμή που η απόσταση των δύο σωμάτων γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά μετά την στιγμή της συνάντησης.

Επομένως, $\left|\eta\mu(\omega t_2 - \frac{\pi}{6})\right| = 1 \Leftrightarrow \eta\mu(\omega t_2 - \frac{\pi}{6}) = \pm 1 \Leftrightarrow \omega t_2 - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \omega t_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$

Για το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ ισχύει ότι:

$\omega \Delta t = \omega t_2 - \omega t_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4} = 1s$.

γ) Για τις χρονικές στιγμές της συνάντησης ισχύει ότι:

$d = 0 \Leftrightarrow \left|\eta\mu(\omega t - \frac{\pi}{6})\right| = 0 \Leftrightarrow \omega t - \frac{\pi}{6} = k\pi \Rightarrow \omega \Delta t = \pi \Delta k$

Δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές συνάντησης αντιστοιχούν σε διαδοχικές τιμές του k ($\Delta k=1$).

Άρα $\omega \Delta t = \pi \Leftrightarrow \Delta t = \frac{T}{2} = 2s$.

Τις χρονικές στιγμές της συνάντησης $\omega t = k\pi + \frac{\pi}{6}$

Άρα $x_1 = x_2 = A_1 \eta\mu(\omega t) = 6\eta\mu\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

Αν ο k είναι άρτιος τότε $x_1 = x_2 = 6\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\,cm$

Αν ο k είναι περιττός τότε $x_1 = x_2 = 6\eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -3\,cm$.

<u>2η Λύση (οριακά εκτός διδακτέας ύλης)</u>

α) Ορίζουμε έναν άξονα με αρχή την θέση ισορροπίας και θετικό ημιάξονα από την Θ.Ι. προς το Μ. Θέτουμε $t_0=0$ ην χρονική στιγμή της συνάντησης.

Οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων είναι:

$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t + \varphi_1)$ και $x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \varphi_2)$

Την στιγμή $t_0=0$ ισχύει ότι: $x_1 = x_2 = x_0$, $v_1>0$ και $v_2<0$.

Επομένως, $\eta\mu\varphi_1 = \frac{x_0}{A_1} = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$, $\eta\mu\varphi_2 = \frac{x_0}{A_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{3}$, $\sigma\upsilon\nu\varphi_1>0$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi_2<0$.

Άρα $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ και $\varphi_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων είναι

$x_1 = A_1 \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{6})$ και $x_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \frac{2\pi}{3})$.

Η απόσταση d των δύο σωμάτων δίνεται από την σχέση:

$d = |x_1 - x_2| = |A_1 \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{6}) - A_2 \eta\mu(\omega t + \frac{2\pi}{3})| = |A_1 \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{6}) + A_2 \eta\mu(\omega t + \frac{5\pi}{3})|$.

Η ποσότητα $x = A_1 \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{6}) + A_2 \eta\mu(\omega t + \frac{5\pi}{3})$ μπορεί να θεωρηθεί σαν σύνθεση των ταλαντώσεων

$\overline{x}_1 = A_1 \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{6})$ και $\overline{x}_2 = A_2 \eta\mu(\omega t + \frac{5\pi}{3})$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων είναι $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

Για το πλάτος και την αρχική φάση της «σύνθετης ταλάντωσης» ισχύει ότι:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2})}=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\,\text{cm}$$

Για την διαφορά φάσης της «σύνθετης ταλάντωσης» από την πρώτη ισχύει ότι:

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{A_2\eta\mu\frac{3\pi}{2}}{A_1+A_2\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}}=-\frac{A_2}{A_1}=-\frac{\sqrt{3}}{3}=\varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{6})\text{ . Άρα }\theta=-\frac{\pi}{6}$$

Επομένως η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης είναι:

$$x=A\eta\mu(\omega t+\varphi_1+\theta)=4\sqrt{3}\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6})=4\sqrt{3}\eta\mu(\omega t)\ \text{(x σε cm).}$$

Η απόσταση d των δύο σωμάτων γίνεται:

$$d=|x|=4\sqrt{3}\left|\eta\mu(\omega t)\right|\ \text{(d σε cm).}$$

Άρα η μέγιστη απόσταση των δύο σωμάτων είναι $d_{max}=4\sqrt{3}$ cm.

β) Έστω t_2 η χρονική στιγμή που η απόσταση των δύο σωμάτων γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά μετά την στιγμή της συνάντησης.

Επομένως, $\left|\eta\mu(\omega t_2)\right|=1\Leftrightarrow\eta\mu(\omega t_2)=\pm1\Leftrightarrow\omega t_2=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\omega t_2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t_2=\frac{T}{4}=1\text{s}$

γ) Για τις χρονικές στιγμές της συνάντησης ισχύει ότι:

$$d=0\Leftrightarrow\left|\eta\mu(\omega t)\right|=0\Leftrightarrow\omega t=k\pi\Rightarrow\omega\Delta t=\pi\Delta k$$

Δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές συνάντησης αντιστοιχούν σε διαδοχικές τιμές του k (Δk=1).

Άρα $\omega\Delta t=\pi\Leftrightarrow\Delta t=\frac{T}{2}=2\text{s}$.

Τις χρονικές στιγμές της συνάντησης $\omega t=k\pi$

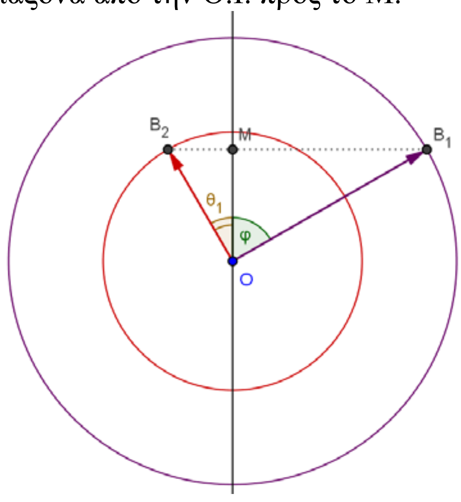
Άρα $x_1=x_2=A_1\eta\mu(\omega t+\frac{\pi}{6})=6\eta\mu\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

Αν ο k είναι άρτιος τότε $x_1=x_2=6\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\,\text{cm}$

Αν ο k είναι περιττός τότε $x_1=x_2=6\eta\mu\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-3\,\text{cm}$.

<u>2η Λύση (με στρεφόμενα διανύσματα)</u>

α) Ορίζουμε έναν άξονα με αρχή την θέση ισορροπίας και θετικό ημιάξονα από την Θ.Ι. προς το Μ.



Έστω $\overrightarrow{OB_1}$ και $\overrightarrow{OB_2}$ τα στρεφόμενα διανύσματα που αναπαριστούν τις απομακρύνσεις των δύο σωμάτων. Την στιγμή της συνάντησης το πρώτο σώμα έχει θετική απομάκρυνση και θετική ταχύτητα. Συνεπώς το στρεφόμενο διάνυσμά του βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο. Το δεύτερο σώμα έχει θετική απομάκρυνση και αρνητική ταχύτητα. Άρα το στρεφόμενο διάνυσμά του βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

Την στιγμή της συνάντησης τα δύο σώματα βρίσκονται στην ίδια θέση. Επομένως τα στρεφόμενά διανύσματά τους έχουν την ίδια προβολή στον άξονα y.

Ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\varphi=\frac{OM}{OB_1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$ και

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1=\frac{OM}{OB_2}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta_1=\frac{\pi}{6}$$

Επειδή $\theta_1 + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$, τα δύο στρεφόμενα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

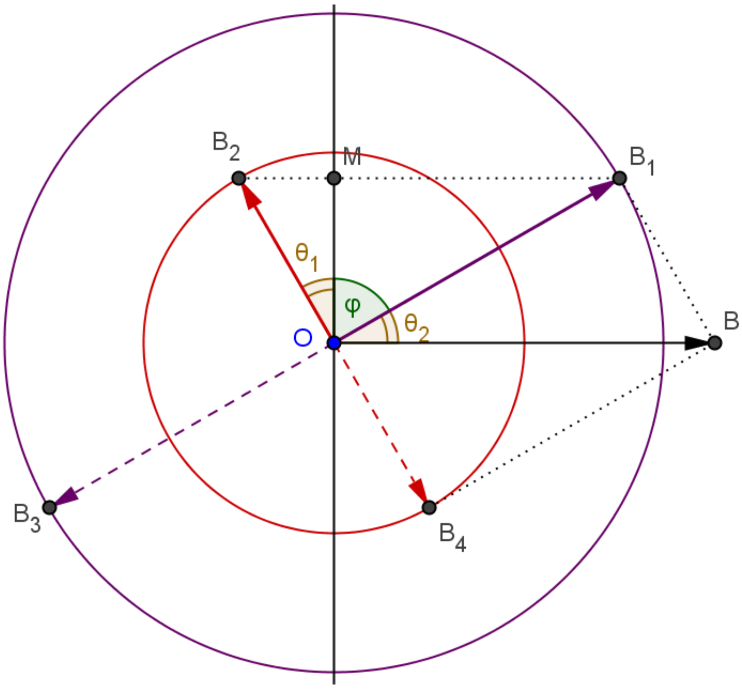
Η απόσταση των δύο σωμάτων δίνεται από την σχέση $d = |x_1 - x_2|$.

Η ποσότητα $x=x_1-x_2$ μπορεί να θεωρηθεί σύνθεση των ταλαντώσεων με στρεφόμενα διανύσματα τα $\overrightarrow{OB_1}$ και $\overrightarrow{OB_4} = -\overrightarrow{OB_2}$. Έστω $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_4}$

Τα διανύσματα $\overrightarrow{OB_1}$ και $\overrightarrow{OB_4}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Ισχύει δε ότι $\varepsilon\varphi\theta_2 = \dfrac{OB_4}{OB_1} = \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta_2 = \dfrac{\pi}{6}$

Επομένως, $\theta_2 + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Άρα το ΟΒ (την στιγμή της συνάντησης) έχει την διεύθυνση του άξονα x.



α) Η ποσότητα x αναπαριστάνεται από το στρεφόμενο διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$. Επομένως η μέγιστη τιμή της είναι ίση με το μέτρο του. Συνεπώς, $d_{max} = OB = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$.

β) Η απόσταση των δύο σωμάτων θα γίνει μέγιστη όταν το $\overrightarrow{OB}$ έχει την διεύθυνση του άξονα y.

Αυτό γίνεται για πρώτη φορά μετά από $\dfrac{T}{4} = 1\,\text{s}$.

γ) Τα δύο σώματα συναντώνται κάθε φορά που η απόστασή τους είναι μηδέν. Επομένως συναντώνται όταν η προβολή του $\overrightarrow{OB}$ στον άξονα y είναι 0. Αυτό συμβαίνει όταν το $\overrightarrow{OB}$ έχει την διεύθυνση του άξονα x. Το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο συναντήσεων είναι προφανώς $\dfrac{T}{2} = 2\,\text{s}$.

Όταν το $\overrightarrow{OB}$ έχει την διεύθυνση του θετικού ημιάξονα Οx τότε συναντώνται στο Μ και x=3cm.
Όταν το $\overrightarrow{OB}$ έχει την διεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα Οx΄ τότε συναντώνται στο συμμετρικό του Μ και x=-3cm.