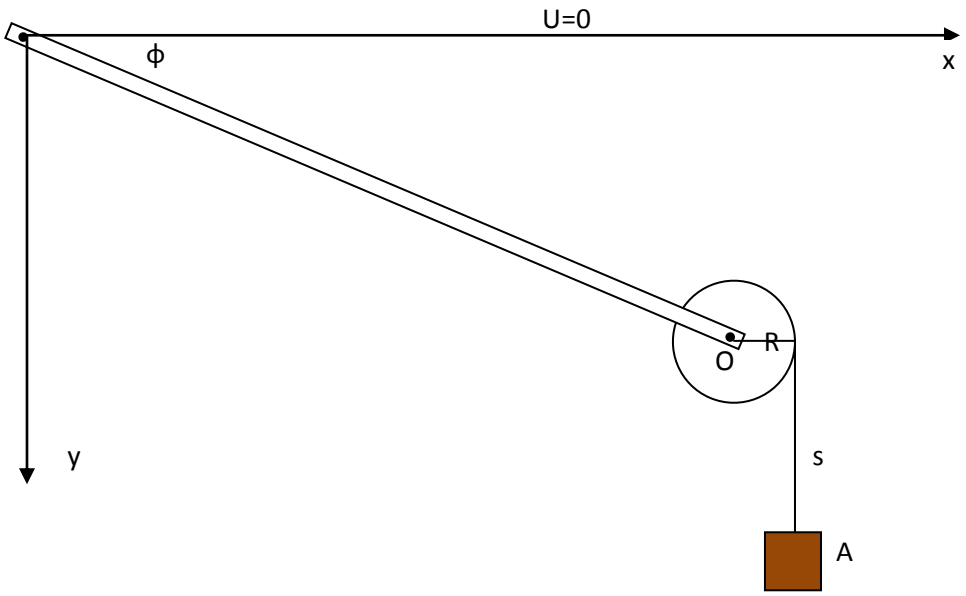
Τροχαλία προσαρμοσμένη σε ράβδο

Θεωρούμε μια ράβδο μήκους L και μάζας m_1, η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στην ράβδο.
Στο άλλο άκρο της ράβδου έχει προσαρμοστεί μια τροχαλία μάζας m_2 , η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα παράλληλο στον πρώτο.
Γύρω από την τροχαλία έχει τυλιχτεί αβαρές νήμα στο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί
σώμα μάζας m_3. Αρχικά η ράβδος σχηματίζει γωνία ϕ_1 με το οριζόντιο επίπεδο και συγκρατείται ακίνητη.
Την χρονική στιγμή 0 αφήνουμε την ράβδο ελεύθερη να κινηθεί.
Να βρεθεί ο χρόνος που απαιτείται μέχρις ότου η ράβδος σχηματίζει γωνία ϕ_2 με το οριζόντιο επίπεδο.
Υποθέτουμε ότι το νήμα της τροχαλίας γλιστρά σε κατάλληλους οδηγούς, έτσι ώστε να παραμένει συνεχώς κατακόρυφο.

<u>Λύση</u>



Θεωρούμε μια τυχαία θέση της ράβδου στην οποία σχηματίζει γωνία ϕ με το οριζόντιο επίπεδο. Στην θέση αυτή έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους s.
Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας: την γωνία ϕ και το μήκος s.
Το διάνυσμα θέσης του κέντρου O της τροχαλίας είναι:

$$\vec{r}_O = L(\sigma\upsilon\nu\phi, \eta\mu\phi)$$

Επομένως η ταχύτητα του κέντρου μάζας της τροχαλίας είναι

$$\vec{\upsilon}_O = \frac{d\vec{r}_O}{dt} = L(-\eta\mu\phi, \sigma\upsilon\nu)\dot{\phi} \Rightarrow \upsilon_O^2 = L^2\dot{\phi}^2$$

Το διάνυσμα θέσης του σώματος είναι:

$$\vec{r}_A = (L\sigma\upsilon\nu\phi, L\eta\mu\phi + s)$$

Επομένως η ταχύτητα του σώματος είναι

$$\vec{\upsilon}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \left(-L\eta\mu\phi\dot{\phi}, L\sigma\upsilon\nu\phi\dot{\phi} + \dot{s}\right) \Rightarrow \upsilon_A^2 = L^2\dot{\phi}^2 + \dot{s}^2 + 2L\sigma\upsilon\nu\phi\,\dot{s}\,\dot{\phi}$$

Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας είναι ίση με $\frac{\dot{s}}{R}$.

Η κινητική ενέργεια της ράβδου είναι ίση με $K_{\rho\alpha\beta\delta} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega^2 = \frac{1}{6}m_1L^2\dot{\phi}^2$

Η κινητική ενέργεια της τροχαλίας είναι :

$$K_{\tau\rho o\chi} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega_{\tau\rho}^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{\mathrm{O}}^2 = \frac{1}{4}m_2R^2\frac{\dot{s}^2}{R^2} + \frac{1}{2}m_2L^2\dot{\phi}^2 = \frac{1}{4}m_2\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m_2L^2\dot{\phi}^2$$

Η κινητική ενέργεια του σώματος είναι:

$$K_{\sigma\omega\mu} = \frac{1}{2}m_3\upsilon_{\mathrm{A}}^2 = \frac{1}{2}m_3(L^2\dot{\phi}^2 + \dot{s}^2 + 2L\sigma\upsilon\nu\phi\,\dot{s}\,\dot{\phi})$$

Η δυναμική ενέργεια της ράβδου είναι : $U_{\rho\alpha\beta\delta} = -m_1g\frac{L}{2}\eta\mu\phi$

Η δυναμική ενέργεια της τροχαλίας είναι : $U_{\tau\rho o\chi} = -m_2gL\eta\mu\phi$

Η δυναμική ενέργεια του σώματος είναι : $U_{\sigma\omega\mu} = -m_3g(L\eta\mu\phi + s)$

Η Lagrangian του συστήματος είναι:

$$\Lambda = \mathrm{K} + U = \frac{1}{6}m_1L^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4}m_2\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m_2L^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_3(L^2\dot{\phi}^2 + \dot{s}^2 + 2L\sigma\upsilon\nu\phi\,\dot{s}\,\dot{\phi} +$$

$$m_1g\frac{L}{2}\eta\mu\phi + m_2gL\eta\mu\phi + m_3g(L\eta\mu\phi + s)$$

Η μάζα της τροχαλίας δυσκολεύει το αλγεβρικό μέρος του προβλήματος χωρίς να επηρεάζει την επιλυσιμότητά του. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η τροχαλία είναι αβαρής.

Η Lagrangian του συστήματος γίνεται:

$$\Lambda = \frac{1}{6}m_1L^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_3(L^2\dot{\phi}^2 + \dot{s}^2 + 2L\sigma\upsilon\nu\phi\,\dot{s}\,\dot{\phi} + m_1g\frac{L}{2}\eta\mu\phi + m_3g(L\eta\mu\phi + s)$$

Ισχύει ότι:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{s}} = m_3\dot{s} + m_3L\sigma\upsilon\nu\phi\,\dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{s}} = m_3\ddot{s} - m_3L\eta\mu\phi\,\dot{\phi}^2 + m_3L\sigma\upsilon\nu\phi\,\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial s} = m_3g$$

Από τις εξισώσεις Euler – Lagrange έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{s}} = \frac{\partial\Lambda}{\partial s} \Rightarrow \ddot{s} = g + L\eta\mu\phi\,\dot{\phi}^2 - L\sigma\upsilon\nu\phi\,\ddot{\phi} \qquad (1)$$

IIσχύει ότι:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\phi}} = \frac{1}{3}m_1L^2\dot{\phi} + m_3L^2\dot{\phi} + m_3L\sigma\upsilon\nu\phi\dot{s} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\phi}} = \frac{1}{3}m_1L^2\ddot{\phi} + m_3L^2\ddot{\phi} - m_3L\eta\mu\phi\,\dot{\phi}\,\dot{s} + m_3L\sigma\upsilon\nu\phi\,\ddot{s}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi} = -m_3L\eta\mu\phi\,\dot{s}\dot{\phi} + m_1g\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\phi + m_3gL\sigma\upsilon\nu\phi$$

Από τις εξισώσεις Euler – Lagrange έχουμε:

Η Lagrangian του συστήματος γίνεται:

$$\Lambda = \frac{1}{6}m_1L^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m_3(L^2\dot{\phi}^2 + \dot{s}^2 + 2L\sigma\upsilon\nu\phi\,\dot{s}\,\dot{\phi} + m_1g\frac{L}{2}\eta\mu\phi + m_3g(L\eta\mu\phi + s)$$

Ισχύει ότι:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{s}} = m_3\dot{s} + m_3L\sigma\upsilon\nu\phi\,\dot{\phi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{s}} = m_3\ddot{s} - m_3L\eta\mu\phi\,\dot{\phi}^2 + m_3L\sigma\upsilon\nu\phi\,\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial s} = m_3g$$

Από τις εξισώσεις Euler – Lagrange έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{s}}=\frac{\partial\Lambda}{\partial s}\Rightarrow\ddot{s}=g+L\eta\mu\phi\dot{\phi}^2-L\sigma\upsilon\nu\phi\ddot{\phi} \tag{1}$$

Ιισχύει ότι:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\phi}}=\frac{1}{3}m_1L^2\dot{\phi}+m_3L^2\dot{\phi}+m_3L\sigma\upsilon\nu\phi\dot{s}\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\phi}}=\frac{1}{3}m_1L^2\ddot{\phi}+m_3L^2\ddot{\phi}-m_3L\eta\mu\phi\dot{\phi}\dot{s}+m_3L\sigma\upsilon\nu\phi\ddot{s}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi}=-m_3L\eta\mu\phi\dot{s}\dot{\phi}+m_1g\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\phi+m_3gL\sigma\upsilon\nu\phi$$

Από τις εξισώσεις Euler – Lagrange έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\phi}}=\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi}\Rightarrow\frac{1}{3}m_1L^2\ddot{\phi}+m_3L^2\ddot{\phi}-m_3L\eta\mu\phi\dot{\phi}\dot{s}+m_3L\sigma\upsilon\nu\phi\ddot{s}=-m_3L\eta\mu\phi\dot{s}\dot{\phi}+m_1g\frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\phi+m_3gL\sigma\upsilon\nu\phi\Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}m_1L\ddot{\phi}+m_3L\ddot{\phi}+m_3\sigma\upsilon\nu\phi\ddot{s}=m_1g\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\phi+m_3g\sigma\upsilon\nu\phi \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (2) την (1) έχουμε:

$$\frac{1}{3}m_1L\ddot{\phi}+m_3L\ddot{\phi}+m_3\sigma\upsilon\nu\phi(g+L\eta\mu\phi\dot{\phi}^2-L\sigma\upsilon\nu\phi\ddot{\phi})=\frac{m_1}{2}g\sigma\upsilon\nu\phi+m_3g\sigma\upsilon\nu\phi\Rightarrow$$

$$L(\frac{1}{3}m_1+m_3-m_3\sigma\upsilon\nu^2\phi)\ddot{\phi}+m_3L\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\ \dot{\phi}^2=\frac{m_1}{2}g\sigma\upsilon\nu\phi\Rightarrow$$

$$L(\frac{1}{3}m_1+m_3\eta\mu^2\phi)\ \ddot{\phi}+m_3L\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\ \ \dot{\phi}^2=\frac{m_1}{2}g\sigma\upsilon\nu\phi \tag{3}$$

Η σχέση (3) μπορεί από διαφορική εξίσωση που περιέχει δεύτερη παράγωγο της γωνίας φ ως προς τον χρόνο να μετατραπεί σε διαφορική εξίσωση που περιέχει την πρώτη παράγωγο της γωνιακής ταχύτητας ως προς την γωνία φ.

Ισχύει ότι:

$$\omega=\dot{\phi}=\frac{d\phi}{dt}$$

Και

$$\ddot{\phi}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{\omega d\omega}{\omega dt}=\frac{\omega d\omega}{d\phi}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3) έχουμε:

$$L(\frac{1}{3}m_1+m_3\eta\mu^2\phi)\ \frac{\omega d\omega}{d\phi}+m_3L\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\ \ \omega^2=\frac{m_1}{2}g\sigma\upsilon\nu\phi \tag{4}$$

Θέτουμε $u=\omega^2$ και η σχέση (4) γίνεται:

$$\frac{1}{2}L(\frac{1}{3}m_1+m_3\eta\mu^2\phi)\ \frac{du}{d\phi}+m_3L\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\ \ u=\frac{m_1}{2}g\sigma\upsilon\nu\phi \tag{5}$$

Η (5) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης :

Για να την λύσουμε λύνουμε πρώτα την ομογενή:

$$\frac{1}{2}L(\frac{1}{3}m_1+m_3\eta\mu^2\phi)\ \frac{du}{d\phi}+m_3L\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\ \ u=0\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1+m_3\eta\mu^2\phi)\ \frac{du}{d\phi}=-m_3\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\ \ u \tag{6}$$

Ισχύει ότι

$$\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi = \frac{\eta\mu 2\phi}{2}$$

Και $$\eta\mu^2\phi = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\phi}{2}$$

Η σχέση (5) γίνεται:

$$(\frac{1}{3}m_1 + m_3\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\phi}{2})\ \frac{du}{d(2\phi)} = -m_3\frac{\eta\mu 2\phi}{2}\ u$$

Θέτοντας (γ=2φ) έχουμε:

$$\left(\frac{2}{3}m_1 + m_3(1-\sigma\upsilon\nu\gamma)\right)\frac{du}{d\gamma} = -m_3\eta\mu\gamma\, u \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{m_3\eta\mu\gamma d\gamma}{\frac{2}{3}m_1 + m_3(1-\sigma\upsilon\nu\gamma)}$$

Θέτουμε p=συνγ⇒dp=-ημγdγ

$$\frac{du}{u} = \frac{m_3 dp}{\frac{2}{3}m_1 + m_3(1-p)}$$

Θέτουμε

$$q = \frac{2}{3}m_1 + m_3(1-p) \Rightarrow dq = -m_3 dp$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dq}{q} \Rightarrow \ln u + \ln q = \ln c \Rightarrow u = \frac{c}{q}$$

Επιλέγουμε c=1.

$$u_0 = q^{-1} = \left[\frac{2}{3}m_1 + m_3(1-p)\right]^{-1} = \left[\frac{2}{3}m_1 + m_3(1-\sigma\upsilon\nu 2\phi)\right]^{-1}$$

Η u_0 ικανοποιεί την ΔΕ

$$\frac{1}{2}L(\frac{1}{3}m_1 + m_3\eta\mu^2\phi)\ \frac{du_0}{d\phi} + m_3 L\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\ \ u_0 = 0$$

Επιστρέφουμε στην λύση της (5).

Θέτουμε $u=u_0v$

Η σχέση (5) γίνεται:

$$v\left[\frac{1}{2}L(\frac{1}{3}m_1 + m_3\eta\mu^2\phi)\ \frac{du_0}{d\phi} + m_3 L\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\ \ u_0\right] + \frac{1}{2}L(\frac{1}{3}m_1 + m_3\eta\mu^2\phi)u_0\frac{dv}{d\phi} = \frac{m_1}{2}g\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}L(\frac{1}{3}m_1 + m_3\eta\mu^2\phi)u_0\frac{dv}{d\phi} = \frac{m_1}{2}g\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow (\frac{1}{3}m_1 + m_3\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\phi}{2})u_0\frac{dv}{d\phi} = m_1\frac{g}{L}\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}m_1 + m_3(1-\sigma\upsilon\nu 2\phi)\right)u_0\frac{dv}{d\phi} = m_1\frac{g}{L}\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow \frac{dv}{d\phi} = m_1\frac{2g}{L}\sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow v = m_1\frac{2g}{L}(c+\eta\mu\phi)$$

Άρα

$$u = u_0 v = m_1\frac{2g}{L}\frac{c+\eta\mu\phi}{\frac{2}{3}m_1 + m_3(1-\sigma\upsilon\nu 2\phi)} \Rightarrow u = m_1\frac{3g}{L}\frac{c+\eta\mu\phi}{m_1 + 3m_3\eta\mu^2\phi} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{m_1 \frac{3g}{L} \frac{c + \eta\mu\phi}{m_1 + 3m_3 \eta\mu^2\phi}}$$

Υποθέτουμε ότι την στιγμή t=0 ισχύει ότι $\phi=\phi_1$ και ω=0. Άρα $c=-\eta\mu\phi_1$.

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{m_1 \frac{3g}{L} \frac{\eta\mu\phi - \eta\mu\phi_1}{m_1 + 3m_3 \eta\mu^2\phi}} \Rightarrow dt = d\phi \sqrt{\frac{L}{3g}} \sqrt{\frac{1 + 3\lambda\eta\mu^2\phi}{\eta\mu\phi - \eta\mu\phi_1}}$$

Όπου

$$\lambda = \frac{m_3}{m_1}$$

$$\boxed{\Delta t = \sqrt{\frac{L}{3g}} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\frac{1 + 3\lambda\eta\mu^2\phi}{\eta\mu\phi - \eta\mu\phi_1}} d\phi}$$