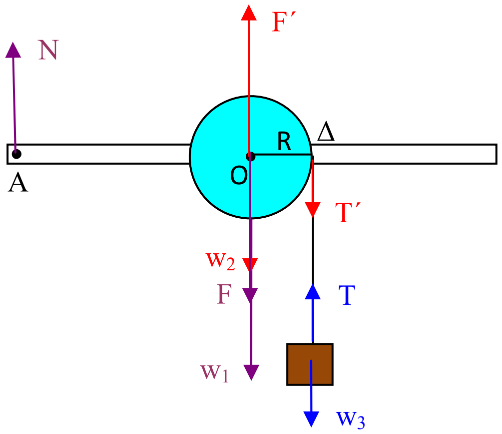
Τροχαλία προσαρμοσμένη σε ράβδο

Θεωρούμε μια ράβδο μήκους ℓ και μάζας m_1, η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα κάθετο στην ράβδο.
Στη μέση της ράβδου έχει προσαρμοστεί μια τροχαλία μάζας m_2 , η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα παράλληλο στον πρώτο.
Γύρω από την τροχαλία έχει τυλιχτεί αβαρές νήμα στο άκρο του οποίου έχει προσδεθεί σώμα μάζας m_3. Αρχικά η ράβδος και το σώμα συγκρατούνται ακίνητα και η ράβδος είναι οριζόντια.
Την χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε ταυτόχρονα την ράβδο και το σώμα ελεύθερα να κινηθούν.
Α) Να βρείτε τις γωνιακές επιταχύνσεις της ράβδου και της τροχαλίας.
Β) Να βρείτε την σχέση των μαζών των τριών σωμάτων έτσι ώστε το νήμα να είναι αρχικά τεντωμένο.
Δίνονται οι ροπές αδράνειας της ράβδου και της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής τους

$I_\rho = \frac{1}{3}m_1\ell^2$ και $I_\tau = \frac{1}{2}m_2R^2$

<u>Λύση</u>



Στο σώμα μάζας m_3 ασκούνται το βάρος του w_3 από την γη και η δύναμη Τ από το νήμα.
Στην τροχαλία ασκούνται το βάρος της w_2 από την γη, η δύναμη Τ΄ από το νήμα και η δύναμη F΄ από τον άξονα.
Στην ράβδο ασκούνται το βάρος της w_1 από την γη, η δύναμη F από την τροχαλία και η δύναμη Ν από τον άξονα της ράβδου.
Από το αξίωμα δράσης αντίδρασης ισχύει ότι F=F΄.
Από το αξίωμα δράσης αντίδρασης σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το νήμα είναι αβαρές ισχύει ότι Τ=Τ΄.
Έστω ω_ρ η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ω_τ η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας $\alpha_{\gamma(\rho)}$ η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου και $\alpha_{\gamma(\tau)}$ η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.
Έστω υ_O και a_O η ταχύτητα και η επιτάχυνση του μέσου Ο της ράβδου, υ_Δ και a_Δ η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σημείου επαφής Δ του σχοινιού με την τροχαλία και τέλος υ_3 και a_3 η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος.
Ισχύει ότι :

$$\upsilon_O = \omega_\rho \frac{\ell}{2} \quad (1)$$

$$\upsilon_\Delta = \upsilon_O + \omega_\tau R = \omega_\rho \frac{\ell}{2} + \omega_\tau R \quad (2)$$

$$\upsilon_3 = \upsilon_\Delta = \omega_\rho \frac{\ell}{2} + \omega_\tau R \quad (3)$$

Παραγωγίζοντας τις (1) και (3) βρίσκουμε για τις επιταχύνσεις ότι:

$$a_O = \alpha_{\gamma(\rho)}\frac{\ell}{2} \qquad (4)$$

$$a_3 = \alpha_{\gamma(\rho)}\frac{\ell}{2} + \alpha_{\gamma(\tau)}R \qquad (5)$$

Για την στροφική κίνηση της ράβδου ισχύει ότι:

$$\Sigma\tau_{(A)} = I_A\alpha_{\gamma(\rho)} \Rightarrow F\frac{\ell}{2} + w_1\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}m_1\ell^2\alpha_{\gamma(\rho)} \Rightarrow \boxed{F + w_1 = \frac{2}{3}m_1\ell\alpha_{\gamma(\rho)}} \qquad (6)$$

Για την στροφική κίνηση της τροχαλίας ισχύει ότι:

$$\Sigma\tau_{(O)} = I_O\alpha_{\gamma(\tau)} \Rightarrow T'R = \frac{1}{2}m_2R^2\alpha_{\gamma(\tau)} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}m_2R\alpha_{\gamma(\tau)}} \qquad (7)$$

Για την κίνηση του κέντρου μάζας της τροχαλίας ισχύει ότι:

$$\Sigma F = m_2a_O \Rightarrow T' + w_2 - F' = m_2a_O \Rightarrow \boxed{T + w_2 - F = m_2\alpha_{\gamma(\rho)}\frac{\ell}{2}} \qquad (8)$$

Για την κίνηση του κέντρου μάζας του σώματος ισχύει ότι:

$$\Sigma F = m_3a_3 \Rightarrow \boxed{w_3 - T = m_3\left(\alpha_{\gamma(\rho)}\frac{\ell}{2} + \alpha_{\gamma(\tau)}R\right)} \qquad (9)$$

Οι εξισώσεις (6), (7), (8), (9) είναι τέσσερις εξισώσεις με αγνώστους τους: F, T, $\alpha_{\gamma(\rho)}$, $\alpha_{\gamma(\tau)}$.
Προσθέτοντας τις (6) και (8) και αφαιρώντας την (7) κατά μέλη έχουμε:

$$\boxed{w_2 + w_1 = \left(\frac{2m_1}{3} + \frac{m_2}{2}\right)\ell\alpha_{\gamma(\rho)} - \frac{m_2}{2}R\alpha_{\gamma(\tau)}} \qquad (10)$$

Προσθέτοντας τις (7) και (9) κατά μέλη έχουμε:

$$\boxed{w_3 = \frac{m_3}{2}\alpha_{\gamma(\rho)}\ell + \left(m_3 + \frac{m_2}{2}\right)\alpha_{\gamma(\tau)}R} \qquad (11)$$

Οι εξισώσεις (10) και (11) αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τις δύο γωνιακές επιταχύνσεις.
Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε ότι:

$$\boxed{\alpha_{\gamma(\rho)}\ell = 6g\frac{m_1m_2 + 2m_1m_3 + m_2^2 + 3m_2m_3}{4m_1m_2 + 8m_1m_3 + 3m_2^2 + 9m_2m_3}} \qquad (12)$$

$$\boxed{\alpha_{\gamma(\tau)}R = 2g\frac{m_1m_3}{4m_1m_2 + 8m_1m_3 + 3m_2^2 + 9m_2m_3}} \qquad (13)$$

Αντικαθιστώντας τις (12) και (13) στην (9) βρίσκουμε την T

$$\boxed{T = g\frac{m_1m_2m_3}{4m_1m_2 + 8m_1m_3 + 3m_2^2 + 9m_2m_3}} \qquad (14)$$

Επομένως για κάθε (μη μηδενική) τιμή των μαζών το νήμα είναι αρχικά τεντωμένο.

Ε. Κορφιάτης
korfiatis@sch.gr