Παρατηρήσεις στην μηχανική στερεού σώματος

Πρόλογος

Με αφορμή την τελευταία μας συζήτηση για το ΘΜΚΕ στην μεταφορική κίνηση ενός στερεού σώματος, θεώρησα σκόπιμο να οργανώσω τις σκέψεις μου στο χαρτί.
Η παρουσίαση της μηχανικής του στερεού σώματος στα Πανεπιστημιακά βιβλία γίνεται (με τον παιδαγωγικά ορθό τρόπο) από το μερικό στο γενικό. Αυτός ο τρόπος παρουσίασης όμως στην συνέχεια δημιουργεί συγχύσεις, όσον αφορά το ποιες σχέσεις ισχύουν σε κάθε ειδική περίπτωση.
Θεώρησα λοιπόν σκόπιμο να ενσωματώσω στο κείμενο που ακολουθεί, τις σημειώσεις που είχα γράψει για ένα μάθημα σε έναν φοιτητή του Φυσικού τμήματος. Η παρουσίαση της μηχανικής του στερεού σώματος γίνεται από το γενικό στο μερικό, με αποτέλεσμα την μεγαλύτερη ασφάλεια όσον αφορά την σωστή εφαρμογή της κατάλληλης σχέσης σε κάθε περίπτωση.
Είμαι βέβαιος ότι οποιαδήποτε παρατήρησή σου θα είναι χρήσιμη.
Το κείμενο που ακολουθεί είναι ένας προβληματισμός για τον τρόπο με τον οποίο διδάσκουμε και εφαρμόζουμε το Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ) κατά την (σύνθετη) κίνηση ενός στερεού σώματος.
Η ανάγκη για το γράψιμο της παρακάτω μονογραφίας προκύπτει από το εξής γεγονός: Κάθε χρόνο διδάσκοντας την μηχανική του στερεού σώματος στους μαθητές της Γ΄ τάξης, διαπιστώνω ότι σε πολλές περιπτώσεις βρίσκονται σε σύγχυση. Έχοντας ακούσει ήδη το αντικείμενο από τον καθηγητή του φροντιστηρίου και ακούγοντάς το δεύτερη φορά από εμένα, ακούν δύο διαφορετικές και σε κάποιες περιπτώσεις αντικρουόμενες απόψεις. Κλασσικό σημείο αντιπαράθεσης είναι το έργο της στατικής τριβής κατά την κύλιση χωρίς ολίσθηση. Κάποιοι ισχυρίζονται ότι το έργο της τριβής είναι μηδέν και άλλοι ότι είναι διάφορο του μηδενός. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στις περισσότερες περιπτώσεις ,η εξίσωση που γράφουν για να περιγράψουν το φαινόμενο είναι σωστή.
Ένα άλλο σημείο αντιπαράθεσης είναι απάντηση στο εξής ερώτημα:
“κατά την σύνθετη κίνηση του στερεού σώματος ισχύει ένα ΘΜΚΕ ή δύο;”
Μια συνήθης πρακτική είναι να γράψουν ένα ΘΜΚΕ για την μεταφορική κίνηση, ένα για την περιστροφική και με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ένα τρίτο για την σύνθετη κίνηση. Κατά την διαδικασία αυτή, στις εξισώσεις εμφανίζεται το έργο της τριβής και το έργο της ροπής της τριβής. Συνέπεια της συνθήκης κύλισης είναι το γεγονός ότι το αλγεβρικό άθροισμα των δύο παραπάνω έργων είναι μηδέν.
Για την διευκρίνιση των παραπάνω θεωρώ σκόπιμο να παρουσιάσω την άποψή μου για τα παρακάτω:

- Μια μικρή αναφορά στην επαλληλία κινήσεων και ενεργειών.
- Το θεώρημα κίνησης του κέντρου μάζας και μια εξίσωση που προκύπτει από αυτό η οποία θυμίζει ΘΜΚΕ για την μεταφορική κίνηση.
- Μια αναλυτική παρουσίαση για την κινητική ενέργεια ενός στερεού σώματος και το ΘΜΚΕ για ένα στερεό σώμα.
- Μια αναλυτική παρουσίαση για την έννοια στροφορμή και τον νόμο μεταβολής της στροφορμής.

Φιλικά
Ε. Κορφιάτης

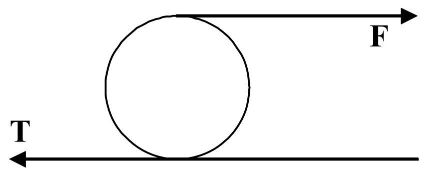
0. Εισαγωγή
Η μηχανική του στερεού σώματος χτίζεται από την μηχανική του υλικού σημείου. Τα φυσικά μεγέθη (κινητική ενέργεια , ορμή, στροφορμή) έχουν οριστεί για υλικό σημείο. Αθροίζοντας στα υλικά σημεία από τα οποία αποτελείται το στερεό σώμα υπολογίζουμε τα αντίστοιχα μεγέθη για το στερεό σώμα.
Τα βασικά θεωρήματα (θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, νόμος μεταβολής της ορμής, νόμος μεταβολής της στροφορμής) εφαρμόζονται για κάθε υλικό σημείο ξεχωριστά. Με πρόσθεση των εξισώσεων που ισχύουν για κάθε υλικό σημείο του στερεού βρίσκουμε την αντίστοιχη εξίσωση για το στερεό σώμα. Κρίσιμο σημείο για την ολοκλήρωση της παραπάνω διαδικασίας είναι το αξίωμα δράσης – αντίδρασης: Οι εσωτερικές δυνάμεις , τα έργα τους και οι ροπές τους μηδενίζονται. Ως αποτέλεσμα των παραπάνω, στις τελικές εξισώσεις εμφανίζονται μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις..

1. Επαλληλία κινήσεων αλλά όχι ενεργειών
Θεωρούμε ένα υλικό σημείο μάζας m, το οποίο μετέχει σε δύο ευθύγραμμες ομαλές κινήσεις. Η μια κίνηση γίνεται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$ και η άλλη με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$.
Υποθέτουμε ότι οι δύο ταχύτητες σχηματίζουν τυχαία γωνία φ.
Η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι το άθροισμα των ταχυτήτων που θα είχε αν εκτελούσε κάθε κίνηση χωριστά (επαλληλία κινήσεων).
$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$
Αν εκτελούσε μόνο την πρώτη κίνηση, θα είχε κινητική ενέργεια $K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2$.
Αν εκτελούσε μόνο την δεύτερη κίνηση, θα είχε κινητική ενέργεια $K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$.
Η κινητική του ενέργεια λόγω της σύνθετης κίνησης είναι :
$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\vec{\upsilon}^2 = \frac{1}{2}m(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2)^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + m\vec{\upsilon}_1 \cdot \vec{\upsilon}_2 \Rightarrow$$
$$K = K_1 + K_2 + m\upsilon_1\upsilon_2\sigma\upsilon\nu\phi$$
Βλέπουμε λοιπόν ότι η κινητική ενέργεια κατά την σύνθετη κίνηση δεν είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών που θα είχε αν εκτελούσε κάθε κίνηση χωριστά. Το παραπάνω είναι συμπτωματικά σωστό μόνο στην περίπτωση που οι δύο ταχύτητες είναι κάθετες μεταξύ τους.

2. Το Θεώρημα κίνησης του κέντρου μάζας.
Για το κέντρο μάζας του στερεού σώματος ισχύει η εξίσωση
$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} \Rightarrow \vec{F}dt = md\vec{\upsilon} \qquad (2.1)$$
όπου $\vec{F}$ η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο στερεό σώμα και $\vec{\upsilon}$, $\vec{a}$ η ταχύτητα και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας αντιστοίχως.
Σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα το κέντρο μάζας μετατοπίζεται κατά $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$.
Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (2.1) με $\vec{\upsilon}$ έχουμε:
$$\vec{F} \cdot \vec{\upsilon}dt = m\vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon} \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = d(\frac{1}{2}m\upsilon^2) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}m\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\alpha\rho\chi}^2 = W} \qquad (2.2)$$
<u>Παρατηρήσεις</u>
- Στην περίπτωση που η δύναμη είναι σταθερή, η σχέση (2.2) μπορεί να παραχθεί με στοιχειώδη μαθηματικά, απαλοίφοντας τον χρόνο από τις εξισώσεις ταχύτητας και μετατόπισης.

- Η σχέση (2.2) είναι μια ορθή μαθηματική σχέση χωρίς φυσικό περιεχόμενο.
- Στην σχέση αυτή η ποσότητα $\frac{1}{2}m\upsilon^2$ δεν είναι η κινητική ενέργεια του στερεού σώματος. (Το στερεό σώμα έχει μια ενιαία και αδιαίρετη κινητική ενέργεια της οποίας η έκφραση έχει συνήθως δύο όρους)
- Κατά τον υπολογισμό του δεύτερου μέλος της (2.2), θεωρούμε ότι **όλες οι δυνάμεις**, που ασκούνται στο στερεό **ασκούνται στο κέντρο μάζας του** και επομένως τα έργα του δεύτερου μέλους της (2.2) πρέπει για όλες τις δυνάμεις να υπολογιστούν κατά μήκος της τροχιάς που διαγράφει το κέντρο μάζας του στερεού.
- Το δεύτερο μέλος της (2.2) δεν είναι η μεταβιβαζόμενη στο στερεό ενέργεια, αλλά μια μαθηματική ποσότητα χωρίς φυσικό περιεχόμενο.
- Η σχέση (2.2) **ισχύει σε οποιαδήποτε κίνηση** στερεού σώματος.
- Η σχέση (2.2) μπορεί να θεωρηθεί ως η ολοκληρωτική μορφή του θεωρήματος κίνησης του κέντρου μάζας.

<u>Παράδειγμα 1</u>



Θεωρούμε τον αρχικά ακίνητο τροχό του σχήματος. Στην περιφέρεια του τροχού είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό μη εκτατό νήμα αμελητέας μάζας. Ασκούμε στην άκρη του νήματος μια σταθερή οριζόντια δύναμη F και ο τροχός αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.. Όταν το κέντρο μάζας του τροχού έχει μετατοπιστεί κατά x η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα είναι υ. Από την ολοκληρωτική μορφή του θεωρήματος κίνησης του κέντρου μάζας ισχύει ότι:

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = Fx - Tx$$

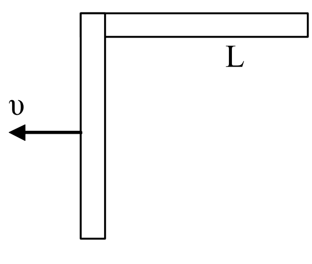
Η παραπάνω εξίσωση είναι απολύτως σωστή. Ποιο είναι όμως το φυσικό περιεχόμενό της;

Ερμηνεύουμε τον όρο $\frac{1}{2}m\upsilon^2$ σαν την κινητική ενέργεια που θα είχε το στερεό αν εκτελούσε μόνο μεταφορική κίνηση.

Τι είναι όμως το γινόμενο Fx; Γνωρίζουμε ότι η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης είναι 2x και επομένως η ενέργεια που προσφέρεται στο στερεό από το αίτιο της δύναμης είναι 2Fx.

Ας παρακάμψουμε τις εννοιολογικές δυσκολίες, τις οποίες συναντάμε κατά την ερμηνεία της παρακάτω εξίσωσης. Άλλωστε μια μαθηματική εξίσωση είναι μια μαθηματική εξίσωση, η οποία απλώς οφείλει να είναι σωστή.

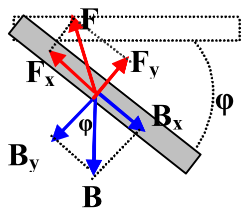
<u>Παράδειγμα 2</u>



Θεωρούμε την λεπτή ομογενή ράβδο, μήκους L του σχήματος. Η ράβδος αφήνεται ελεύθερη από την οριζόντια θέση, να κινηθεί χωρίς τριβές. Ζητάμε την ταχύτητα του κέντρου μάζας της, όταν η ράβδος γίνει κατακόρυφη.
Η σχέση (2.2) ισχύει σε κάθε περίπτωση και επομένως είναι λογικό να γράψουμε την εξίσωση

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = W_B \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = mg\frac{L}{2} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{gL}$$

Η εξίσωση αυτή είναι προφανώς λάθος. Πώς μια σχέση καθολικής ισχύος όπως η (2.2) επιτρέπει τέτοιο λάθος στην συγκεκριμένη περίπτωση;
Όπως εξηγήσαμε στις παρατηρήσεις, για την εφαρμογή της σχέσης (2.2) πρέπει να θεωρήσουμε ότι όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό ασκούνται στο κέντρο μάζας του. Ο υπολογισμός των έργων των δυνάμεων πρέπει να γίνει κατά μήκος της τροχιάς που ακολουθεί το κέντρο μάζας του στερεού.
Επομένως το έργο της δύναμης του άξονα περιστροφής δεν μηδενίζεται.(!!!)
Θεωρώ ότι αξίζει τον κόπο να παρουσιάσω μια σωστή εφαρμογή της (2.2) στο φαινόμενο που εξετάζουμε.



Θεωρούμε μια τυχαία θέση της ράβδου στην οποία έχει στραφεί κατά γωνία φ. Στην ράβδο ασκούνται το βάρος της Β και η δύναμη F από τον άξονα περιστροφής. Για την επιτρόχια συνιστώσα της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας ισχύει ότι:

$$\Sigma F_y = ma_y \Rightarrow B_y - F_y = ma_y \Rightarrow F_y = B_y - m\frac{L}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης έχουμε: (η δύναμη F ασκείται στο άκρο της ράβδου και επομένως δεν έχει ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής).

$$B_y\frac{L}{2} = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow B_y\frac{L}{2} = \frac{1}{3}mL^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow mL\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{3}{2}B_y$$

Επομένως η σχέση για την F_y γίνεται:

$$F_y = B_y - \frac{3}{4}B_y = \frac{1}{4}mg\sigma\upsilon\nu\phi$$

Θεωρούμε μια απειροστή στροφή του στερεού κατά dφ. Το έργο της F_y κατά την στροφή αυτή είναι :

$$dW_{Fy} = -F_y ds = -\frac{1}{4}mg\sigma\upsilon\nu\phi\frac{L}{2}d\phi$$ (η δύναμη F ασκείται στο μέσον της ράβδου).

Συνεπώς το συνολικό έργο της F_y για στροφή κατά π/2 είναι

$$W_{Fy} = -\frac{L}{8}mg\int_0^{\pi/2}\sigma\upsilon\nu d\phi = -\frac{mgL}{8}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα κίνησης του κέντρου μάζας έχουμε:

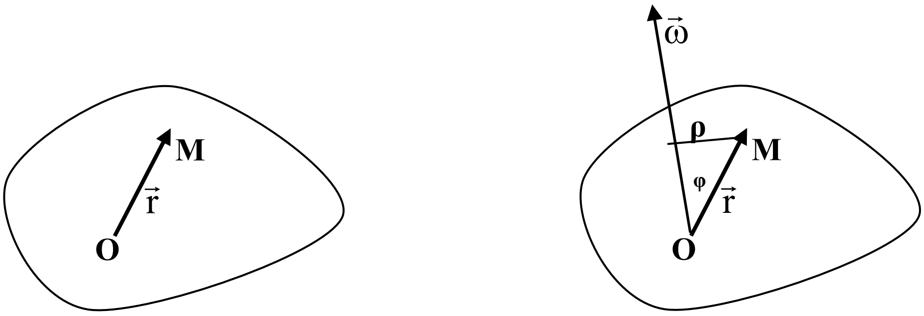
$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = W_B + W_F \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = mg\frac{L}{2} - mg\frac{L}{8} \Rightarrow \upsilon^2 = gL - g\frac{L}{4} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{3gL}{4}}$$

Εφαρμόζοντας το ΘΜΚΕ για την στροφική κίνηση που κάνει η ράβδος, εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς, ότι η ταχύτητα που βρήκαμε είναι η σωστή.

<u>Συμπέρασμα:</u> Η ολοκληρωτική μορφή του θεωρήματος κίνησης του κέντρου μάζας είναι μια σχέση με εννοιολογικές και τεχνικές δυσκολίες κατά την εφαρμογή της. Ακόμη και αν θεωρήσουμε ότι η σχέση αυτή εν δυνάμει είναι γνωστή στον μαθητή, το γεγονός ότι πρέπει να θεωρούμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό ως ασκούμενες στο κέντρο μάζας του, καθιστά επίφοβη την σωστή εφαρμογή της. Προτείνω να μην την χρησιμοποιούμε σε ένα στρεφόμενο στερεό. Για τον μαθητή, η σχέση (2.2) ισχύει για ένα υλικό σημείο ή για ένα στερεό σώμα που εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση.

3. Η κινητική ενέργεια του στερεού σώματος

Θεωρούμε την κίνηση ενός στερεού σώματος Σ. Έστω Ο ένα **τυχαίο** σημείο σταθερό επί του στερεού. Η τυχαία απειροστή κίνηση του στερεού μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία δύο απειροστών κινήσεων



α) Μιας απειροστής μεταφορικής κίνησης του στερεού με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του σημείου Ο

β) Μιας απειροστής στροφής **γύρω από το Ο** με γωνιακή ταχύτητα ίση με την γωνιακή ταχύτητα του στερεού

Έστω Μ ένα τυχαίο σημείο του στερεού του οποίου το διάνυσμα θέσης ως προς Ο είναι $\vec{r}$. Η ταχύτητα του σημείου Μ είναι το άθροισμα της ταχύτητας του Ο και της ταχύτητας λόγω περιστροφής γύρω από το Ο. Συνεπώς

$$\vec{\upsilon}_M = \vec{\upsilon}_O + \vec{\omega}\times\vec{r} \tag{3.1}$$

Θεωρούμε ένα υλικό σημείο μάζας m στο σημείο Μ. Η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου είναι:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m(\vec{\upsilon}_O + \vec{\omega}\times\vec{r})^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_O^2 + m\vec{\upsilon}_O\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 \tag{3.2}$$

Με χρήση της ταυτότητας

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$, έχουμε :

$$(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 = (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})(\vec{r}\cdot\vec{r}) - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})(\vec{\omega}\cdot\vec{r}) \Rightarrow \tag{3.3}$$

$$(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2 \Rightarrow$$

$$(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 = \omega^2 r^2 - (\omega r \sigma\upsilon\nu\phi)^2 = \omega^2 r^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\phi) = \omega^2 r^2 \eta\mu^2\phi = \omega^2\rho^2$$

όπου φ η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του Μ με το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας και ρ η απόσταση του Μ από τον άξονα περιστροφής. Προφανώς το ρ είναι η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς που θα διέγραφε το Μ αν το στερεό εκτελούσε μόνο περιστροφική κίνηση.

Η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου στο Μ γίνεται:

$$K_M = \frac{1}{2}m\upsilon_O^2 + m\vec{\upsilon}_O\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 \tag{3.4}$$

Παρατηρούμε ότι, εν γένει, η κινητική ενέργεια του Μ δεν είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών που θα είχε αν το στερεό εκτελούσε κάθε κίνηση χωριστά.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, αν λάβουμε υπ' όψιν την παράγραφο που αναφέρεται στην επαλληλία κινήσεων και ενεργειών. Η ταχύτητα που έχει το σημείο Μ λόγω της μεταφορικής κίνησης του στερεού και η ταχύτητά του λόγω της περιστροφικής δεν είναι πάντα κάθετες μεταξύ τους.

Η κινητική ενέργεια του στερεού είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των στοιχειωδών μαζών του. Κανονικά για να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια του στερεού χρειαζόμαστε ένα τριπλό ολοκλήρωμα, που να εκτείνεται στο χώρο του στερεού. Για λόγους απλοποίησης των μαθηματικών πράξεων ας θεωρήσουμε το στερεό αποτελούμενο από ένα πεπερασμένο πλήθος υλικών σημείων M_1, M_2,…M_N. Η κινητική ενέργεια του στερεού είναι:

$$K=\sum_{i=1}^{N}K_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\upsilon_O^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\rho_i^2\omega^2+\sum_{i=1}^{N}\vec{\upsilon}_O\cdot(\vec{\omega}\times m_i\vec{r}_i)\Rightarrow$$

$$K=\frac{1}{2}\upsilon_O^2\sum_{i=1}^{N}m_i+\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N}m_i\rho_i^2+\vec{\upsilon}_O\cdot(\vec{\omega}\times\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i)$$

Όμως $\sum_{i=1}^{N}m_i=m$, είναι η μάζα του στερεού

$\sum_{i=1}^{N}m_i\rho_i^2=I_{(O)}$ είναι η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το Ο και είναι παράλληλος με το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας

$\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i=m\vec{r}_{cm}$, όπου $\vec{r}_{cm}$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας ως προς Ο.

Συνεπώς

$$\boxed{K=\frac{1}{2}m\upsilon_O^2+\frac{1}{2}I_{(O)}\omega^2+\vec{\upsilon}_O\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_{cm})} \qquad (3.5)$$

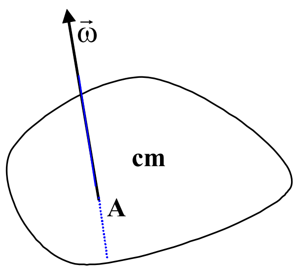
<u>Εφαρμογή 1</u>

Θεωρούμε ένα στερεό σώμα, το οποίο περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο ό άξονα,. που διέρχεται από ένα σημείο Α του στερεού.
Την κίνηση του στερεού μπορούμε να την δούμε με τους εξής δύο τρόπους:

Α΄ τρόπος:

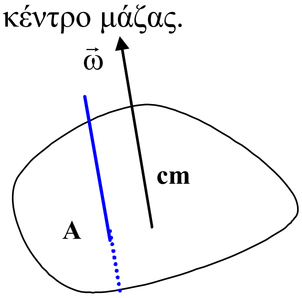
Το στερεό περιστρέφεται γύρω από ένα ακίνητο σημείο του άξονα περιστροφής. Επομένως εκτελεί μόνο στροφική κίνηση.
Θέτοντας Ο=Α στην σχέση (3.5) και λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι υ_A=0 έχουμε:

$$K=\frac{1}{2}I_{(A)}\omega^2 \qquad (3.6)$$



Β τρόπος:

Μια σύνθετη κίνηση η οποία είναι σύνθεση μιας μεταφορικής κίνησης με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας και μιας στροφικής κίνησης γύρω από το κέντρο μάζας.



Θέτοντας Ο=cm στην εξίσωση (3.5) έχουμε:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{(cm)}\omega^2+\vec{\upsilon}_{cm}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_{cm})$$

Όμως στην περίπτωσή μας $\vec{r}_{cm}$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας ως προς κέντρο μάζας και συνεπώς $\vec{r}_{cm}$=0.

Έτσι $K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{(cm)}\omega^2$ (3.7)

Είναι απλή εφαρμογή του θεωρήματος Steiner η επιβεβαίωση του γεγονότος, ότι το δεύτερο μέλος της σχέσης (3.6) είναι ίσο με το δεύτερο μέλος της (3.7).

Εφαρμογή 2

Θεωρούμε την ελεύθερη κίνηση ενός στερεού στην οποία δεν υπάρχει φυσικός άξονας περιστροφής αλλά νοητός. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο άξονας περιστροφής διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο του στερεού. Η κινητική ενέργεια του στερεού τότε θα δίνεται από την σχέση (3.5).
Αν θεωρήσουμε ότι η περιστροφή γίνεται γύρω από το κέντρο μάζας του στερεού τότε $\vec{r}_{cm}$=0. Συνεπώς

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{(cm)}\omega^2 \qquad (3.8)$$

Σχόλια

A) Ο πρώτος όρος είναι η κινητική ενέργεια που θα είχε το στερεό αν εκτελούσε μόνο μεταφορική κίνηση με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του. Ο δεύτερος είναι η κινητική ενέργεια που θα είχε το στερεό αν περιστρεφόταν γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.
B) Η σχέση (3.8) δεν είναι προφανής διότι εν γένει ισχύει η αρχή επαλληλίας των κινήσεων αλλά όχι και των ενεργειών.

4. Το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ενός στερεού σώματος

Κάθε υλικό σημείο του στερεού δέχεται δύο ειδών δυνάμεις.

- Τις δυνάμεις που δέχεται από τα υπόλοιπα μέρη του στερεού ($\vec{F}_{(\varepsilon\sigma)}$)
- Τις δυνάμεις που δέχεται από το περιβάλλον του στερεού ($\vec{F}_{(\varepsilon\xi)}$)

Σε μια κίνηση του στερεού, το έργο των δυνάμεων της πρώτης κατηγορίας εκφράζει την ενέργεια που μεταβιβάζεται από τα υπόλοιπα υλικά σημεία του στερεού στο συγκεκριμένο υλικό σημείο. Το έργο των δυνάμεων της δεύτερης κατηγορίας, εκφράζει το έργο που μεταβιβάζεται στο στερεό από το περιβάλλον του.
Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε για κάθε υλικό σημείο του στερεού, έχουμε:

$$\Delta K_i = W_{i(\varepsilon\sigma)} + W_{i(\varepsilon\xi)} \qquad (4.1)$$

Για την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του στερεού ισχύει ότι:

$$\Delta K = \sum_{i=1}^{N}\Delta K_i = \sum_{i=1}^{N}W_{i(\varepsilon\sigma)} + \sum_{i=1}^{N}W_{i(\varepsilon\xi)}$$

Υποθέτοντας ότι οι εσωτερικές δυνάμεις υπακούουν στο αξίωμα δράσης- αντίδρασης, εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $\sum_{i=1}^{N}W_{i(\varepsilon\sigma)} = 0$ και ως εκ τούτου

$$\Delta K = \sum_{i=1}^{N}W_{i(\varepsilon\xi)} \qquad (4.2)$$

Για να βρούμε το έργο μιας εξωτερικής δύναμης, θεωρούμε μια απειροστή κίνηση του στερεού, βρίσκουμε την στοιχειώδη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης, υπολογίζουμε το στοιχειώδες έργο της δύναμης και τέλος ολοκληρώνουμε στις στοιχειώδεις μετατοπίσεις.

Ως παράδειγμα εφαρμογής της παραπάνω διαδικασίας θα υπολογίσουμε το έργο του βάρους ενός στερεού σώματος στο ομογενές πεδίο βαρύτητας.
Το έργο του βάρους, είναι το άθροισμα των έργων των βαρών των στοιχειωδών μαζών του.
Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Ο σταθερό επί του στερεού.
Η ταχύτητα ενός σημείου Μ δίνεται από την σχέση (3.1)

$$\vec{\upsilon}_M = \vec{\upsilon}_O + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Η απειροστή μετατόπιση του σημείου Μ σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα dt είναι:

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon}_M dt = \vec{\upsilon}_O dt + \vec{\omega}dt\times\vec{r}$$

Το έργο του βάρους του υλικού σημείου που βρίσκεται στο Μ είναι:

$$dW = m\vec{g}\cdot d\vec{r} = m\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}_O dt + m\vec{g}\cdot(\vec{\omega}dt\times\vec{r})$$

Το έργο όλως των βαρών των υλικών σημείων από τα οποία αποτελείται το στερεό είναι:

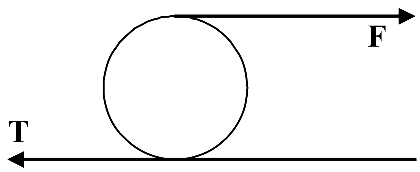
$$dW = \sum_{i=1}^{N} dW_i = \vec{g}\cdot\vec{\upsilon}_O dt\sum_{i=1}^{N} m_i + \vec{g}\cdot(\vec{\omega}dt\times\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i) = m\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}_O dt + \vec{g}\cdot(\vec{\omega}dt\times m\vec{r}_{cm}) \Rightarrow$$

$$dW = m\vec{g}\cdot(\vec{\upsilon}_O + \vec{\omega}\times\vec{r}_{cm})dt = m\vec{g}\cdot\vec{\upsilon}_{cm}dt = m\vec{g}\cdot d\vec{R}_{cm}$$

Αποδείξαμε το διαισθητικά αναμενόμενο: Το έργο του βάρους είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο του βάρους του στερεού και της μετατόπισης του κέντρου μάζας του.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τον αρχικά ακίνητο τροχό του σχήματος. Στην περιφέρεια του τροχού είναι τυλιγμένο πολλές φορές λεπτό μη εκτατό νήμα αμελητέας μάζας. Ασκούμε στην άκρη του νήματος μια σταθερή οριζόντια δύναμη F και ο τροχός αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει..



Θεωρούμε μια απειροστή μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού κατά dx. Επειδή η ταχύτητα του σημείου εφαρμογής της τριβής είναι μηδέν το έργο της τριβής είναι μηδενικό.
Το σημείο εφαρμογής της δύναμης F μετατοπίζεται κατά 2dx και συνεπώς το στοιχειώδες έργο της F είναι 2F.dx. Επειδή η δύναμη F είναι σταθερή σε μια μετατόπιση το κέντρου μάζας του τροχού κατά x το έργο της F θα είναι 2Fx
Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισχύει ότι:
K=2Fx
Η παραπάνω σχέση είναι προφανής, λόγω της αρχής διατήρησης της ενέργειας:
Η κινητική ενέργεια που απέκτησε το στερεό (ενιαία και αδιαίρετη) είναι ίση με την ενέργεια που προσφέρθηκε στο στερεό από το αίτιο της δύναμης F.

5. Η ορμή και ο νόμος μεταβολής της ορμής ενός στερεού σώματος

Θεωρούμε και πάλι ένα σταθερό επί του στερεού σημείο Ο.
Η ορμή ενός υλικού σημείου που βρίσκεται στο σημείο Μ είναι:

$$\vec{p}_M = m\vec{\upsilon}_M = m(\vec{\upsilon}_O + \vec{\omega}\times\vec{r}) = m\vec{\upsilon}_O + \vec{\omega}\times m\vec{r}$$

Η ορμή του στερεού σώματος είναι

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = (\sum_{i=1}^{N} m_i)\vec{\upsilon}_O + \vec{\omega}\times\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = m\vec{\upsilon}_O + \vec{\omega}\times m\vec{r}_{cm} = m(\vec{\upsilon}_O + \vec{\omega}\times\vec{r}_{cm}) = m\vec{\upsilon}_{cm} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{\upsilon}_{cm}} \qquad (5.1)$$

Για κάθε υλικό σημείο του στερεού ισχύει ο νόμος μεταβολής της ορμής:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_{(\varepsilon\xi)} + \vec{F}_{(\varepsilon\sigma)}$$

Συνεπώς για το στερεό σώμα ισχύει ότι:

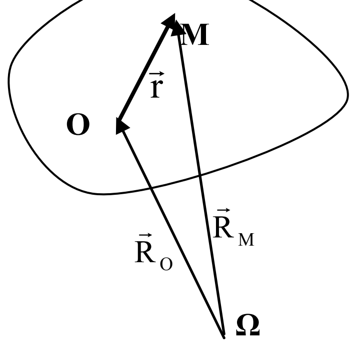
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} F_{i(\varepsilon\xi)} + \sum_{i=1}^{N} F_{i(\varepsilon\sigma)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} F_{i(\varepsilon\xi)}} \qquad (5.2)$$

6. Η στροφορμή και ο νόμος μεταβολής της στροφορμής ενός στερεού σώματος

6α. Η στροφορμή

Την στροφορμή του στερεού σώματος μπορούμε να την υπολογίσουμε είτε ως προς ένα ακίνητο σημείο του χώρου είτε ως προς ένα σταθερό επί του στερεού σημείο. Οι εξισώσεις που προκύπτουν έχουν απλούστερη μορφή στην δεύτερη περίπτωση.
Η στροφορμή ως προς Ο ενός υλικού σημείου, που βρίσκεται στο Μ είναι



$$\vec{L}_M = \vec{r} \times \vec{p}_M = m\vec{r} \times \vec{\upsilon}_M = m\vec{r} \times [\vec{\upsilon}_O + (\vec{\omega} \times \vec{r})] = m\vec{r} \times \vec{\upsilon}_O + m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (6.1)$$

Θέτοντας $\vec{L}_{M(\mu\varepsilon\tau)} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon}_O$ και (6.2.α)

$$\vec{L}_{M(\sigma\tau\rho)} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (6.2.\beta)$$

Η (6.1) γίνεται $\vec{L}_M = \vec{L}_{M(\mu\varepsilon\tau)} + \vec{L}_{M(\sigma\tau\rho)}$ (6.2.γ)

Ο πρώτος όρος είναι η στροφορμή του Μ ως προς Ο λόγω της μεταφορικής κίνησης του στερεού και ο δεύτερος λόγω της στροφικής κίνησης

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας : $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

η σχέση (6.2.β) γίνεται:

$$\vec{L}_{M(\sigma\tau\rho)} = m(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - m(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} \qquad (6.3)$$

Η πρώτη παρατήρηση που έχουμε να κάνουμε είναι ότι η στροφορμή ως προς το σημείο Ο, λόγω της περιστροφικής κίνησης, δεν είναι παράλληλη με την γωνιακή ταχύτητα. Αυτό μπορούμε να το δούμε και παραστατικά αν θεωρήσουμε ένα υλικό σημείο που κινείται σε ένα κύκλο και το σημείο Ο είναι τυχόν σημείο του άξονα περιστροφής διαφορετικό από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.
Για να μπορέσουμε να αθροίσουμε τις στροφορμές των υλικών σημείων του στερεού είναι απαραίτητο να μετασχηματίσουμε την (6.3) σε ποιο βολική μορφή.
Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Ο, σταθερό επί του στερεού.

Αν (x,y,z) οι συντεταγμένες του σημείου Μ και (ω_x, ω_y ω_z) οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας τότε:

$\vec{r}\cdot\vec{r} = x^2 + y^2 + z^2$ και $\vec{\omega}\cdot\vec{r} = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$

Για την x συνιστώσα της στροφορμής (λόγω περιστροφής) του Μ έχουμε

$$L_{x(\sigma\tau\rho)} = m(\vec{r}\cdot\vec{r})\omega_x - m(\vec{\omega}\cdot\vec{r})x = m(x^2 + y^2 + z^2)\omega_x - m(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)x \Rightarrow$$

$$L_{x(\sigma\tau\rho)} = m(y^2 + z^2)\omega_x - m\,x\,y\,\omega_y - m\,x\,z\,\omega_z \qquad (6.4\alpha)$$

Ομοίως

$$L_{y(\sigma\tau\rho)} = m(z^2 + x^2)\omega_y - m\,y\,z\,\omega_z - m\,y\,x\,\omega_x \qquad (6.4\beta)$$

$$L_{z(\sigma\tau\rho)} = m(x^2 + y^2)\omega_z - m\,z\,x\,\omega_x - m\,z\,y\,\omega_y \qquad (6.4\gamma)$$

Οι τελευταίες σχέσεις μπορούν να εκφραστούν με την βοήθεια πινάκων:

$$\begin{bmatrix} L_{x(\sigma\tau\rho)} \\ L_{y(\sigma\tau\rho)} \\ L_{z(\sigma\tau\rho)} \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \qquad (6.5)$$

Ο πίνακας $I = m\begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}$ ονομάζεται τανυστής ροπής αδράνειας ως προς το σημείο Ο.

Παρατηρήσεις

- Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα είναι οι ροπές αδράνειας ως προς τους άξονες x,y,z . Τα μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα ονομάζονται γινόμενα αδράνειας
- Ο πίνακας Ι είναι συμμετρικός

Θεωρώντας την παράσταση ενός διανύσματος με πίνακα στήλη, η σχέση (6.5) μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$L_{M(\sigma\tau\rho)} = I_M\omega \qquad (6.6)$$

Η στροφορμή του στερεού σώματος, λόγω περιστροφής, είναι το άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών μαζών του.

$$L_{(\sigma\tau\rho)} = \sum_{i=1}^{N} L_{i(\sigma\tau\rho)} = (\sum_{i=1}^{N} I_i)\omega \Rightarrow$$

$$\boxed{L_{(\sigma\tau\rho)} = I\omega} \qquad (6.7)$$

Όπου Ι ο τανυστής ροπής αδράνειας του στερεού ως προς Ο.

$$I = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^{N} m_i(y_i^2 + z_i^2) \end{bmatrix} \qquad (6.8)$$

Η συνολική στροφορμή του στερεού λόγω της μεταφορικής κίνησης είναι

$$\vec{L}_{(\mu\varepsilon\tau)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{i(\mu\varepsilon\tau)} = (\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i) \times \vec{\upsilon}_O = m\vec{r}_{cm} \times \vec{\upsilon}_O$$

Επομένως η συνολική στροφορμή του στερεού ως προς Ο είναι

$$\vec{L} = \vec{L}_{(\mu\varepsilon\tau)} + \vec{L}_{(\sigma\tau\rho)} \Rightarrow$$

$$\vec{L} = m\vec{r}_{cm} \times \vec{\upsilon}_O + I\omega \tag{6.9}$$

<u>6β. Σχέση κινητικής ενέργειας(περιστροφής) και στροφορμής(περιστροφής)</u>

Μπορούμε να αποδείξουμε μια ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής και της στροφορμής λόγω περιστροφής

Η στροφορμή (λόγω περιστροφής) και η κινητική ενέργεια (λόγω περιστροφής) του υλικού σημείου που βρίσκεται στην θέση Μ δίνονται από τις σχέσεις (6.3) και (3.2):

$$\vec{L}_M = m[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}]$$

$$K_{M(\sigma\tau\rho)} = \frac{1}{2}m(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 = \frac{1}{2}m[(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})(\vec{r}\cdot\vec{r}) - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})(\vec{\omega}\cdot\vec{r})] = \frac{1}{2}m\vec{\omega}\cdot[(\vec{r}\cdot\vec{r})\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{r}]$$ Ε

πομένως $K_{M(\sigma\tau\rho)} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L}_M$

Αθροίζοντας τις κινητικές ενέργειες των στοιχειωδών μαζών του στερεού βρίσκουμε ότι: και για ολόκληρο το στερεό ισχύει ότι:

$$K_{(\sigma\tau\rho)} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L}_{(\sigma\tau\rho)} \Rightarrow \tag{6.10}$$

$$K_{(\sigma\tau\rho)} = \frac{1}{2}(\omega_x L_{x(\sigma\tau\rho)} + \omega_y L_{y(\sigma\tau\rho)} + \omega_z L_{z(\sigma\tau\rho)}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_{x(\sigma\tau\rho)}\\ L_{y(\sigma\tau\rho)}\\ L_{z(\sigma\tau\rho)}\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\omega^T L \Rightarrow$$

$$K_{(\sigma\tau\rho)} = \frac{1}{2}\omega^T I\omega \tag{6.11}$$

Όπου ω^T ο πίνακας γραμμή που αντιστοιχεί στο διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας. Βλέπουμε δηλαδή ότι οι σχέσεις που ισχύουν για την στροφορμή και την κινητική ενέργεια ενός περιστρεφομένου στερεού, σε επίπεδο Λυκείου, διατηρούνται ουσιαστικά αμετάβλητες. Η μόνη αλλαγή που πρέπει να κάνουμε, είναι να αντικαταστήσουμε τον αριθμό Ι με τον πίνακα Ι.

<u>6γ. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής</u>

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σημείου Μ (ως προς Ο) είναι:

$$\frac{d\vec{L}_{M(O)}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}_M + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}_M}{dt}$$

Όμως $\frac{d\vec{p}_M}{dt} = \vec{F}_M$

Το διάνυσμα $\vec{r}$ είναι ένα σταθερό επί του στερεού διάνυσμα το οποίο μεταβάλλεται με τον χρόνο, επειδή τόσο το σημείο Ο όσο και το σημείο Μ κινούνται.

Θεωρούμε ένα σταθερό στο χώρο σημείο Ω. Ισχύει ότι

$$\vec{r} = \vec{R}_M - \vec{R}_O \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}_M}{dt} - \frac{d\vec{R}_O}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}_M - \vec{\upsilon}_O$$

Συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σημείου Μ γίνεται:

$$\frac{d\vec{L}_{M(O)}}{dt} = m(\vec{\upsilon}_M - \vec{\upsilon}_O)\times\vec{\upsilon}_M + \vec{r}\times\vec{F}_M = m\vec{\upsilon}_M\times\vec{\upsilon}_M + m\vec{\upsilon}_M\times\vec{\upsilon}_O + \vec{r}\times\vec{F}_M \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_{M(O)}}{dt} = \vec{p}_M\times\vec{\upsilon}_O + \vec{\tau}_{M(O)} \tag{6.12}$$

όπου $\vec{\tau}_{M(O)}$ η συνισταμένη ροπή ως προς Ο που δέχεται το σημείο Μ.

Παρατηρούμε ότι λόγω της κίνησης του σημείου Ο, στην σχέση (6.2) υπάρχει ο επιπλέον όρος $\vec{p}_M \times \vec{\upsilon}_O$.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής κάθε υλικού σημείου του στερεού δίνεται από την σχέση (6.12.α)

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{p}_i \times \vec{\upsilon}_O + \vec{\tau}_i = \vec{p}_i \times \vec{\upsilon}_O + \vec{\tau}_{i(\varepsilon\sigma)} + \vec{\tau}_{i(\varepsilon\xi)}$$

Επομένως για τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του στερεού έχουμε:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = (\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i) \times \vec{\upsilon}_O + \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i(\varepsilon\sigma)} + \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i(\varepsilon\xi)} = \vec{p} \times \vec{\upsilon}_O + \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i(\varepsilon\xi)} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{\upsilon}_{cm} \times \vec{\upsilon}_O + \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i(\varepsilon\xi)} \qquad (6.13)$$

Συνοψίζοντας, για την τυχαία κίνηση ενός στερεού σώματος ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boxed{\vec{L} = m\vec{r}_{cm} \times \vec{\upsilon}_O + I\omega} \quad \text{και} \qquad (6.14)$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{\upsilon}_{cm} \times \vec{\upsilon}_O + \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i(\varepsilon\xi)}} \qquad (6.15)$$

Με

$$\boxed{I = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^{N} m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^{N} m_i (y_i^2 + z_i^2) \end{bmatrix}} \qquad (6.16)$$

Παρατηρήσεις

- Αν το Ο είναι ένα σημείο του στερεού το οποίο είναι συνεχώς ακίνητο τότε $\upsilon_O=0$ και οι παραπάνω σχέσεις γίνονται:

  $$\vec{L} = I\omega \ \text{ και } \ \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i(\varepsilon\xi)}$$

- Αν το Ο είναι το κέντρο μάζας του στερεού, τότε $\vec{r}_{cm} = 0$, και $\vec{\upsilon}_{cm} \times \vec{\upsilon}_O = \vec{\upsilon}_{cm} \times \vec{\upsilon}_{cm} = 0$. Επομένως πάλι

  $$\vec{L} = I\omega \ \text{ και } \ \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\tau}_{i(\varepsilon\xi)}$$

- Έστω ότι το στερεό περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα (άξονας z). Θεωρούμε ένα σημείο Ο του στερεού το οποίο βρίσκεται επί του άξονα. Τότε

  $$L = I\omega = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{13}\omega \\ I_{23}\omega \\ I_{33}\omega \end{bmatrix}$$

  Η z συνιστώσα της στροφορμής είναι η στροφορμή ως προς τον άξονα και I_{33} είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα. Συνεπώς $L_{(\alpha\xi)}=I_{(\alpha\xi)}\omega$

Για την z συνιστώσα της στροφορμής ισχύει η σχέση:

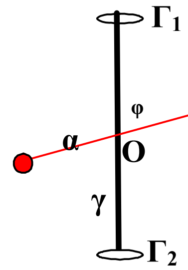
$$\frac{dL_z}{dt}=\Sigma\tau_z \Rightarrow I_{(\alpha\xi)}\alpha_{\gamma\omega\nu}=\Sigma\tau_{(\alpha\xi)}$$

- Θεωρούμε την ελεύθερη κίνηση ενός στερεού, που κινείται έτσι ώστε η κατεύθυνση του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας να παραμένει σταθερή. Θεωρώντας ότι το σημείο Ο είναι το κέντρο μάζας του, μπορούμε να καταλήξουμε με τον ίδιο τρόπο όπως και πριν στον θεμελιώδη νόμο για την στροφική κίνηση

$$\frac{dL_z}{dt}=\Sigma\tau_z \Rightarrow I_{(\alpha\xi)}\alpha_{\gamma\omega\nu}=\Sigma\tau_{(\alpha\xi)}$$

<u>Παράδειγμα 1</u>

Θεωρούμε δύο όμοιες μικρές σφαίρες μάζας m η κάθε μια, οι οποίες συνδέονται με αβαρή ράβδο μήκους 2α. Το σύστημα των δύο σφαιρών περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το μέσον της ράβδου. Η ράβδος σχηματίζει με τον άξονα περιστροφής γωνία φ. Ο άξονας στερεώνεται σε δύο σημεία Γ_1 και Γ_2 που απέχουν από το μέσον Ο της ράβδου απόσταση γ, με τέτοιο τρόπο ώστε να περιστρέφεται χωρίς τριβές, όπως στο σχήμα.



Ζητάμε να υπολογισουμε:

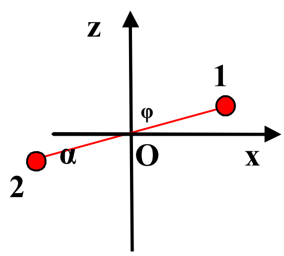
α) Την στροφορμή της ράβδου ως προς το σημείο Ο.

β) Την στροφορμή της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής.

γ) Τις δυνάμεις που δέχεται ο άξονας από τα δύο στηρίγματα.

<u>Λύση</u>

α) Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων το οποίο περιστρέφεται μαζί με την ράβδο, με αρχή το σημείο Ο, άξονα z τον άξονα περιστροφής και επίπεδο xz το επίπεδο που ορίζει ο άξονας περιστροφής και η ράβδος.



Οι συντεταγμένες της πρώτης σφαίρας είναι:

x_1=α ημφ , y_1=0, z_1=α συνφ

Επομένως, ο τανυστής ροπής αδράνειας είναι:

$$I_1=m\begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}=m\begin{bmatrix} \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\phi & 0 & -\alpha^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi \\ 0 & \alpha^2 & -yz \\ -\alpha^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi & 0 & \alpha^2\eta\mu^2\phi \end{bmatrix}$$

Ομοίως $I_2=I_1$ και συνεπώς ο τανυστής αδράνειας του συστήματος είναι: $I=2I_1$

$$I_1=2m\begin{bmatrix} \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\phi & 0 & -\alpha^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ -\alpha^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi & 0 & \alpha^2\eta\mu^2\phi \end{bmatrix}$$

Οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας είναι $\omega_x=\omega_y=0$ και $\omega_z=\omega$

Επομένως από την σχέση (6.7) έχουμε :

$$L=I\omega=2m\begin{bmatrix} \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\phi & 0 & -\alpha^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ -\alpha^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi & 0 & \alpha^2\eta\mu^2\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}=2m\begin{bmatrix} -\alpha^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\omega \\ 0 \\ \alpha^2\eta\mu^2\phi\omega \end{bmatrix}=\sigma\tau\alpha\theta$$

β) Η στροφορμή του συστήματος στον άξονα περιστροφής είναι η προβολή της στροφορμής, ως προς τυχαίο σημείο του άξονα περιστροφής, στον άξονα περιστροφής,. Στην περίπτωσή μας είναι η z συνιστώσα της στροφορμής και επομένως είναι $L_z=2ma^2\eta\mu^2\varphi\omega$=σταθερό

γ) Η z συνιστώσα της (6.9) είναι:

$$\frac{dL_z}{dt}=\sum\tau_z \Rightarrow \sum\tau_z=0$$

Όμως οι ροπές ως προς τον άξονα, όλων των δυνάμεων, που ασκούνται στο σύστημα είναι ταυτοτικά μηδέν. Επομένως η παραπάνω εξίσωση είναι κενή περιεχομένου. Είναι αναμενόμενο, η έννοια της στροφορμής ως προς άξονα και της ροπής ως προς άξονα να μην μπορούν να περιγράψουν πλήρως το φαινόμενο. Η εξίσωση (6.9) είναι μια διανυσματική εξίσωση και ως εκ τούτου τρεις αλγεβρικές εξισώσεις.

Έστω $\vec{F}_3$ και $\vec{F}_4$ οι δυνάμεις που ασκούνται στα $Γ_1$ και $Γ_2$, των οποίων τα διανύσματα θέσης ως προς Ο είναι $\vec{r}_3$ και $\vec{r}_4$. Θέτουμε $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ τα διανύσματα θέσης των δύο σφαιρών.

Η σχέση (6.9) γίνεται

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum\vec{\tau} \Rightarrow 0=m\vec{r}_1\times g+m\vec{r}_2\times g+\vec{r}_3\times\vec{F}_3+\vec{r}_4\times\vec{F}_4$$

Όμως $\vec{r}_1+\vec{r}_2=0$. Επομένως έχουμε:

$$\vec{r}_3\times\vec{F}_3+\vec{r}_4\times\vec{F}_4=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \gamma\\ F_{3x} & F_{3y} & F_{3z}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & -\gamma\\ F_{4x} & F_{4y} & F_{4z}\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$-\gamma\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j}\\ F_{3x} & F_{3y}\end{vmatrix}+\gamma\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j}\\ F_{4x} & F_{4y}\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j}\\ F_{4x}-F_{3x} & F_{4y}-F_{3y}\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$\vec{i}(F_{4y}-F_{3y})-\vec{j}(F_{4x}-F_{3x})=0\Rightarrow F_{4x}=F_{3x}$ κα $F_{4y}=F_{3y}$

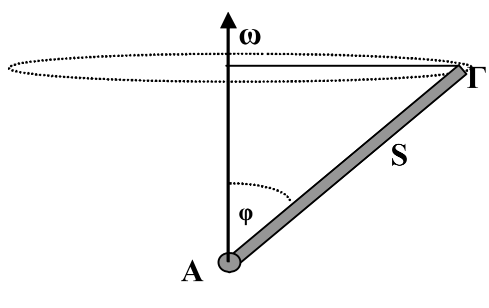
Επειδή το κέντρο μάζας του συστήματος είναι ακίνητο πρέπει

$$\Sigma\vec{F}=0\Rightarrow\vec{F}_3+\vec{F}_4+2m\vec{g}=0\Rightarrow(F_{3x}+F_{4x})\vec{i}+(F_{3y}+F_{4y})\vec{j}+(F_{3z}+F_{4z}-2mg)\vec{k}=0\Rightarrow$$

$$2F_{3x}\vec{i}+2F_{3y}\vec{j}+(F_{3z}+F_{4z}-2mg)\vec{k}=0$$

Επομένως $F_{3x}=F_3y=F_{4x}=F_4y=0$ και $F_{3z}+F_{4z}=2mg$

Παράδειγμα 2

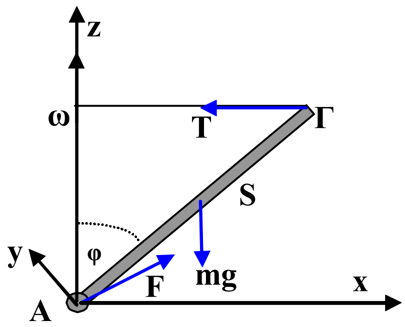


Θεωρούμε την λεπτή ομογενή ράβδο του σχήματος μήκους S και μάζας μ, η οποία στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα . Ο άξονας σχηματίζει με την ράβδο γωνία φ. Στο άνω άκρος της Γ η ράβδος στερεώνεται στον άξονα με οριζόντιο νήμα. Στο κάτω άκρο στερεώνεται με τον άξονα, χωρίς τριβές, με ελεύθερη άρθρωση (μπαλάκι). Ζητάμε να βρούμε την τάση του νήματος και την δύναμη της άρθρωσης.

Λύση

Οι δυνάμεις που ασκούνται στην ράβδο είναι : το βάρος της , η δύναμη Τ από το νήμα και η δύναμη F από την άρθρωση.

Οι άγνωστοι του προβλήματος είναι το μέτρο της τάσης και οι τρεις συνιστώσες της δύναμης F.



Οι εξισώσεις του προβλήματος είναι : μια από την κίνηση του κέντρου μάζας και 3 από τον νόμο μεταβολής της στροφορμής

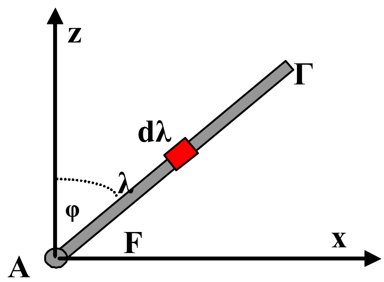
Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων, το οποίο περιστρέφεται μαζί με την ράβδο. Ο άξονας z είναι ο άξονας περιστροφής και η ράβδος βρίσκεται στο επίπεδο xz όπως στο σχήμα.

Για να υπολογίσουμε την στροφορμή της ράβδου ως προς το σημείο A χρειαζόμαστε τον αντίστοιχο τανυστή αδράνειας.

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα της ράβδου μήκους dλ, που απέχει από το άκροA της ράβδου απόσταση λ. Οι συντεταγμένες του σημείου αυτού είναι:

x=λημφ, y=0, z=λσυνφ

Ο στοιχειώδης τανυστής αδράνειας είναι:



$$dI = dm\begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} = dm\begin{bmatrix} \lambda^2\sigma\upsilon\nu^2\phi & 0 & -\lambda^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ -\lambda^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi & 0 & \lambda^2\eta\mu^2\phi \end{bmatrix}$$

Επειδή η ράβδος είναι ομογενής η μάζα είναι ανάλογη του μήκους.

Συνεπώς $dm = \frac{m}{S}d\lambda$

Αντικαθιστώντας στον στοιχειώδη τανυστή αδράνειας έχουμε:

$$dI = \frac{m}{S}\begin{bmatrix} \lambda^2\sigma\upsilon\nu^2\phi d\lambda & 0 & -\lambda^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi d\lambda \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ -\lambda^2\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi d\lambda & 0 & \lambda^2\eta\mu^2\phi d\lambda \end{bmatrix}$$

Ο συνολικός τανυστής αδράνειας είναι το άθροισμα (ολοκλήρωμα) τωνστοιχειωδών τανυστών αδράνειας και ως εκ τούτου.

$$I = \int dI = \frac{m}{S}\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu^2\phi\int_0^S \lambda^2 d\lambda & 0 & -\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\int_0^S \lambda^2 d\lambda \\ 0 & \int_0^S \lambda^2 d\lambda & 0 \\ -\eta\mu\phi\sigma\upsilon\nu\phi\int_0^S \lambda^2 d\lambda & 0 & \eta\mu^2\phi\int_0^S \lambda^2 d\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$I=\frac{m}{S}\frac{1}{3}S^2\begin{bmatrix}συν^2φ & 0 & -ημφσυνφ\\ 0 & 1 & 0\\ -ημφσυνφ & 0 & ημ^2φ\end{bmatrix}\Rightarrow I=\frac{1}{3}mS^2\begin{bmatrix}συν^2φ & 0 & -ημφσυνφ\\ 0 & 1 & 0\\ -ημφσυνφ & 0 & ημ^2φ\end{bmatrix}$$

Οι συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας είναι $ω_x=ω_y=0$ και $ω_z=ω$.
Επομένως στο διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας αντιστοιχεί ο πίνακας στήλη

$$ω=\begin{bmatrix}0\\0\\ω\end{bmatrix}$$

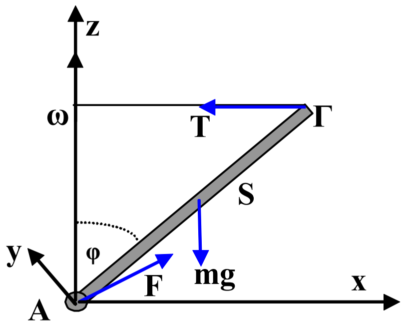
Η στροφορμή της ράβδου ως προς Α είναι :

$$L=Iω\Rightarrow L=\frac{1}{3}mS^2\begin{bmatrix}συν^2φ & 0 & -ημφσυνφ\\ 0 & 1 & 0\\ -ημφσυνφ & 0 & ημ^2φ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\ω\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$L=\frac{1}{3}mS^2\begin{bmatrix}-ημφσυνφω\\ 0\\ ημ^2φω\end{bmatrix}=\text{σταθερή}\Rightarrow\frac{d\vec{L}}{dt}=0$$

Από τον νόμο μεταβολής της στροφρμής έχουμε ότι

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=Σ\vec{τ}\Rightarrow Σ\vec{τ}=0 \text{ (ροπές ως προς Α)}$$



Η ροπή της F ως προς Α είναι μηδενική Η ροπή της Τ έχει μέτρο TSσυνφ και έχει την κατεύθυνση του αρνητικού ημιάξονα y. Η ροπή του βάρους έχει μέτρο $\frac{mgSημφ}{2}$ και κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα y. Επομένως

$$\frac{mgSημφ}{2}=TSσυνφ\Rightarrow T=\frac{mgεφφ}{2}$$

Το κέντρο μάζας της ράβδου εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R=\frac{Sημφ}{2}$.

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας είναι: $\vec{a}_{cm}=\begin{bmatrix}-ω^2R\\0\\0\end{bmatrix}$

Από το θεώρημα κίνησης του κέντρου μάζας έχουμε:

$$ΣF=m\vec{a}_{cm}\Rightarrow\vec{F}+\vec{T}+m\vec{g}=m\vec{a}_{cm}\Rightarrow\vec{F}+\begin{bmatrix}-T\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\-mg\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-ω^2R\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} + m\begin{bmatrix} -\omega^2 R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{mg\varepsilon\phi\phi - \omega^2 S\eta\mu\phi}{2} \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}$$