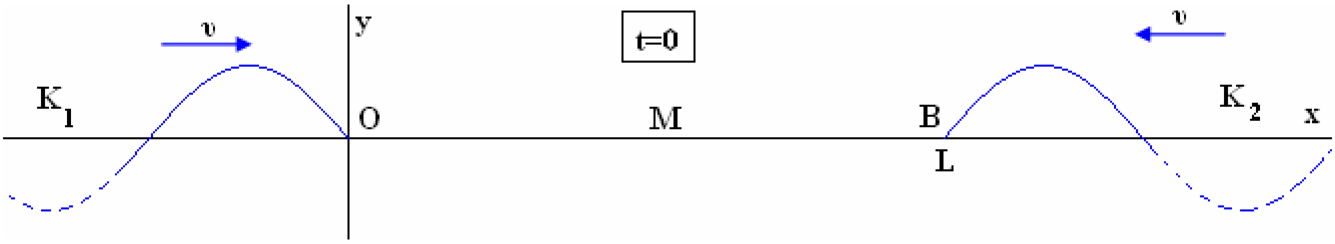
Δύο προβλήματα στα κύματα

Πρόβλημα 1

Δύο αρμονικά κύματα ίδιου πλάτους Α και της ίδιας συχνότητας και διαδίδονται σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο μεγάλου μήκους με αντίθετες ταχύτητες.

Τα στιγμιότυπα των δύο κυμάτων την στιγμή t=0 είναι όπως στο επόμενο σχήμα.

Το σημείο Μ είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΟΒ.



Να υπολογίσετε τις απομακρύνσεις από την θέση ισορροπίας τους των σημείων Ο, Α, Β κάποια χρονική στιγμή t με $t > \frac{L}{\upsilon}$.

Εφαρμογή όταν $OB = L = \frac{3\lambda}{2}$ και $t = \frac{19L}{12\upsilon}$.

<u>1η Λύση</u>

Τα κύματα φτάνουν στο σημείο Μ την χρονική στιγμή $\frac{L}{2\upsilon}$ και στα σημεία Ο, Β την χρονική στιγμή $\frac{L}{\upsilon}$.

Επομένως την χρονική στιγμή $t > \frac{L}{\upsilon}$ τα κύματα έχουν συμβάλει στα σημεία Ο, Μ, Β.

Τα σημεία Ο και Β λειτουργούν ως δευτερογενείς πηγές κυμάτων και το Μ απέχει από αυτά αποστάσεις $r_1 = r_2 = \frac{L}{2}$.

Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο, την στιγμή t=0 τα σημεία Ο και Β βρίσκονται στην θέση ισορροπίας τους κινούμενα κατά την θετική κατεύθυνση.

Επομένως η εξίσωση κίνησής τους είναι $y_O = y_B = A\eta\mu(\omega t)$

Η απομάκρυνση ενός σημείου Σ του ευθυγράμμου τμήματος ΟΒ από την θέση ισορροπίας , που απέχει από τα Ο και Β αποστάσεις r_1 και r_2, του λόγω κάθε κύματος ξεχωριστά είναι :

$y_1 = A\eta\mu(\omega t - kr_1)$ και $y_2 = A\eta\mu(\omega t - kr_2)$

Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας βρίσκουμε ότι:

$$y = y_1 + y_2 = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\eta\mu\left(\omega t - \frac{k(r_1 + r_2)}{2}\right) \quad (1)$$

Επειδή $L=\frac{3\lambda}{2}\Rightarrow kL=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{2}=3\pi$ και $\omega t=\omega\frac{19L}{12\upsilon}=k\upsilon\frac{19L}{12\upsilon}=\frac{19\pi}{4}$

Για το σημεία Ο, Β έχουμε ότι $|r_2-r_1|=L$.

Επομένως $\sigma\upsilon\nu\frac{k(r_2-r_1)}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{kL}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2}=0$

Συνεπώς, τα σημεία Ο και Β κάθε χρονική στιγμή $t>\frac{L}{\upsilon}$ είναι ακίνητα.

Αντικαθιστώντας στην σχέση (1) $t=\frac{19L}{12\upsilon}$ και $r_1=r_2=\frac{L}{2}$ έχουμε:

$$y=y_1+y_2=2A\eta\mu\left(\omega t-\frac{kL}{2}\right)=2A\eta\mu\frac{13\pi}{4}=-A\sqrt{2}$$

<u>2η Λύση</u>

Τα κύματα φτάνουν στο σημείο Μ την χρονική στιγμή $\frac{L}{2\upsilon}$ και στα σημεία Ο, Β την χρονική στιγμή $\frac{L}{\upsilon}$.

Επομένως την χρονική στιγμή $t>\frac{L}{\upsilon}$ τα κύματα έχουν συμβάλει στα σημεία Ο, Μ, Β.

Όπως φαίνεται από το στιγμιότυπο, την στιγμή t=0 τα σημεία Ο και Β βρίσκονται στην θέση ισορροπίας τους κινούμενα κατά την θετική κατεύθυνση.

Επομένως η εξίσωση κίνησής τους είναι $y_O=y_B=A\eta\mu(\omega t)$.

Οι εξισώσεις των δύο κυμάτων είναι

$y_1=A\eta\mu(\omega t-kx)$ και $y_2=A\eta\mu[\omega t+k(x-L)]=A\eta\mu(\omega t+kx-kL)$

Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας, για ένα σημείο του μέσου στο οποίο έχουν φθάσει και τα δύο κύματα έχουμε:

$$y=y_1+y_2=A\eta\mu(\omega t-kx)+A\eta\mu(\omega t+kx-kL)\Rightarrow$$

$$y=2A\eta\mu\left(\omega t-\frac{kL}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(kx-\frac{kL}{2}\right) \qquad (2)$$

Επειδή $L=\frac{3\lambda}{2}\Rightarrow kL=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{2}=3\pi$ και $\omega t=\omega\frac{19L}{12\upsilon}=k\upsilon\frac{19L}{12\upsilon}=\frac{19\pi}{4}$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) x=0 έχουμε:

$$y_O=2A\eta\mu\left(\omega t-\frac{kL}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{kL}{2}\right)=2A\eta\mu\left(\omega t-\frac{kL}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) x=L έχουμε:

$$y_B=2A\eta\mu\left(\omega t-\frac{kL}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(kL-\frac{kL}{2}\right)=2A\eta\mu\left(\omega t-\frac{kL}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{kL}{2}\right)=0$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) $x=\frac{L}{2}$ έχουμε:

$$y_M = 2A\eta\mu\left(\omega t - \frac{kL}{2}\right)$$

Την στιγμή $t=\frac{19L}{12\upsilon}$ $y_M = -A\sqrt{2}$.

2ο Πρόβλημα

Θεωρούμε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο μήκους L το οποίο ηρεμεί στο διάστημα [0,L] ενός συστήματος συντεταγμένων. Την στιγμή t=0 τα άκρα Ο και Β του μέσου αρχίζουν ταυτόχρονα να ταλαντώνονται κάθετα στην διεύθυνση του μέσου με εξίσωση y=Αημ(ωt).

Ως αποτέλεσμα της κίνησης των δύο άκρων στο μέσο διαδίδονται κύματα με αντίθετες ταχύτητες.

Έστω Μ το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΟΒ.

Α. Να υπολογίσετε τις απομακρύνσεις από την θέση ισορροπίας τους των σημείων Ο, Α, Β κάποια χρονική στιγμή t με $\frac{3}{2}\frac{L}{\upsilon} < t < 2\frac{L}{\upsilon}$.

Εφαρμογή όταν $OB = L = \frac{3\lambda}{2}$ και $t=\frac{19L}{12\upsilon}$.

Β. Να αποδείξετε ότι αν το μήκος L του μέσου είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος τότε το μέσον Μ του ελαστικού μέσου συμπεριφέρεται διαδοχικά ως δεσμός και κοιλία για χρονικά διαστήματα μεγέθους $\frac{L}{\upsilon}$.

1η λύση

Ίδια με του προβλήματος 1

2η λύση

Επειδή τα σημεία Ο και Β **υποχρεώνονται** να ταλαντώνονται με εξίσωση y=Αημ(ωt), τα κύματα φτάνοντας στα σημεία αυτά **ανακλώνται**.

Θεωρούμε μια τυχαία χρονική στιγμή $\frac{3L}{2\upsilon} < t < 2\frac{L}{\upsilon}$

Επομένως το κύμα που ξεκίνησε από το Ο πέρασε από το Μ, ανακλάστηκε στο Β, πέρασε ξανά από το Μ και δεν έχει φτάσει ακόμη στο Ο.

Ομοίως το κύμα που ξεκίνησε από το Β πέρασε από το Μ, ανακλάστηκε στο Ο, πέρασε ξανά από το Μ και δεν έχει φτάσει ακόμη στο Β.

Θέτουμε $\mathbf{K_1}$ το κύμα που ξεκίνησε από το Ο και $\mathbf{K_3}$ το κύμα που προκύπτει από την ανάκλαση του K_1 στο Β.

Θέτουμε $\mathbf{K_2}$ το κύμα που ξεκίνησε από το Β και $\mathbf{K_4}$ το κύμα που προκύπτει από την ανάκλαση του K_2 στο Ο.

Θεωρούμε ένα τυχαίο Σ του ευθυγράμμου τμήματος ΟΒ, που απέχει από τα Ο και Β αποστάσεις r_1, r_2 αντιστοίχως.

Το K_1 φτάνει στο Β την στιγμή $\frac{L}{\upsilon}$. Επομένως, το κύμα K_3 την στιγμή t έχει διαδοθεί σε απόσταση

$$R_2 = \upsilon(t-\frac{L}{\upsilon}) = \upsilon t - L$$

Το K_2 φτάνει στο Ο την στιγμή $\frac{L}{\upsilon}$. Επομένως, το κύμα K_4 την στιγμή t έχει διαδοθεί σε απόσταση

$$R_1 = \upsilon(t-\frac{L}{\upsilon}) = \upsilon t - L$$

Τα 4 κύματα συνυπάρχουν για σημεία Σ τέτοια ώστε $r_1 < R_1$ και $r_2 < R_2$ δηλαδή $2L - \upsilon t < r_{1,2} < \upsilon t - L$.

Η εξίσωση του K_1 είναι $y_1(r_1, t) = A\eta\mu(\omega t - kr_1)$

Το σημείο Β λόγω του K_1 θα είχε εξίσωση ταλάντωσης: $y_{1B}(t) = y_1(L, t) = A\eta\mu(\omega t - kL)$.

Επειδή το σημείο Β πρέπει να έχει εξίσωση κίνησης Αημ(ωt), η εξίσωση κίνησης του Β λόγω του ανακλώμενου κύματος είναι:

$$y_{3B}(t) = -y_{1B}(t) = -A\eta\mu(\omega t - kL)$$

Το σημείο Σ (όσον αφορά στην διάδοση του K_3) υστερεί χρονικά του Β κατά $\frac{r_2}{\upsilon}$.

Επομένως η εξίσωση κίνησης του σημείου Σ λόγω του K_3 είναι

$$y_3(r_2, t) = y_{3B}(t - \frac{r_2}{\upsilon}) \Rightarrow y_3(r_2, t) = -A\eta\mu(\omega t - kr_2 - kL)$$

Η εξίσωση του K_2 είναι $y_2(r_2, t) = A\eta\mu(\omega t - kr_2)$

Το σημείο Ο λόγω του K_2 θα είχε εξίσωση ταλάντωσης: $y_{2O}(t) = y_2(L, t) = A\eta\mu(\omega t - kL)$.

Επειδή το σημείο Ο πρέπει να έχει εξίσωση κίνησης Αημ(ωt), η εξίσωση κίνησης του Ο λόγω του ανακλώμενου κύματος είναι:

$$y_{4O}(t) = -y_{2O}(t) = -A\eta\mu(\omega t - kL)$$

Το σημείο Σ (όσον αφορά στην διάδοση του K_4) υστερεί χρονικά του Ο κατά $\frac{r_1}{\upsilon}$.

Επομένως η εξίσωση κίνησης του σημείου Σ λόγω του K_4 είναι

$$y_4(r_1, t) = y_{4O}(t - \frac{r_1}{\upsilon}) \Rightarrow y_4(r_1, t) = -A\eta\mu(\omega t - kr_1 - kL)$$

Επομένως για σημεία τέτοια ώστε $2L - \upsilon t < r_{1,2} < \upsilon t - L$ συνυπάρχουν 4 κύματα με εξισώσεις

$$y_1(r_1, t) = A\eta\mu(\omega t - kr_1),\quad y_2(r_2, t) = A\eta\mu(\omega t - kr_2),$$

$y_3(r_2,t) = -A\eta\mu(\omega t - kr_2 - kL)$, $y_4(r_1,t) = -A\eta\mu(\omega t - kr_1 - kL)$

Στο σημείο Ο υπάρχουν τα κύματα K_1, K_2, K_4. Άρα

$$y_O = y_1 + y_2 + y_4 = A\eta\mu(\omega t) + A\eta\mu(\omega t - kL) - A\eta\mu(\omega t - kL) = A\eta\mu(\omega t) = A\eta\mu(\frac{19\pi}{4}) = \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Στο σημείο Β υπάρχουν τα κύματα K_1, K_2, K_3. Άρα

$$y_B = y_1 + y_2 + y_3 = A\eta\mu(\omega t - kL) + A\eta\mu(\omega t) - A\eta\mu(\omega t - kL) = A\eta\mu(\omega t) = \frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Η εξίσωση ταλάντωσης ενός σημείου Σ με $2L - \upsilon t < r_{1,2} < \upsilon t - L$ είναι

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \Rightarrow$$

$$y = A\eta\mu(\omega t - kr_1) + A\eta\mu(\omega t - kr_2) - A\eta\mu(\omega t - kr_2 - kL) - A\eta\mu(\omega t - kr_1 - kL) \qquad (4)$$

Μετατρέποντας τα αθροίσματα των ημιτόνων σε γινόμενα έχουμε:

$$y = 2A\eta\mu\left(\omega t - \frac{kr_1 + kr_2}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{kr_2 - kr_1}{2} - 2A\eta\mu\left(\omega t - \frac{kr_1 + kr_2}{2} - kL\right)\sigma\upsilon\nu\frac{kr_2 - kr_1}{2} \Rightarrow$$

$$y = 2A\sigma\upsilon\nu\frac{kr_2 - kr_1}{2}\left[\eta\mu\left(\omega t - \frac{kr_1 + kr_2}{2}\right) - \eta\mu\left(\omega t - \frac{kr_1 + kr_2}{2} - kL\right)\right] \Rightarrow$$

$$y = 4A\sigma\upsilon\nu\frac{kr_2 - kr_1}{2}\eta\mu\frac{kL}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\omega t - \frac{kr_1 + kr_2 + kL}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y = 4A\sigma\upsilon\nu\frac{kr_2 - kr_1}{2}\eta\mu\frac{kL}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\omega t - kL\right) \qquad (4\alpha)$$

Αντικαθιστώντας $r_1 = r_2 = \frac{L}{2}$ και $t = \frac{19L}{12\upsilon}$ έχουμε:

$$y_M = 4A\eta\mu\frac{3\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{4} = -2A\sqrt{2}$$

Παρατηρήσεις

- Τα δύο παραπάνω προβλήματα φαίνονται ίδια αλλά στην πραγματικότητα είναι ριζικά διαφορετικά.
  Το γεγονός ότι, στο πρόβλημα 2, στα σημεία Ο και Β υπάρχουν διεγέρτες, οι οποίοι εξαναγκάζουν τα Ο και Β σε συγκεκριμένη κίνηση, αλλάζει δραματικά την συμπεριφορά του μέσου.
- Βλέπουμε ότι η λύση 1 «εξαφανίζει τις πηγές». Συνεπώς είναι λάθος. Η σωστή λύση είναι η λύση 2.
- Από την (4α) συμπεραίνουμε ότι αν $\eta\mu\frac{kL}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{kL}{2} = n\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = 2n\pi \Leftrightarrow L = n\lambda$ τότε για το χρονικό διάστημα $\left(\frac{3}{2}\frac{L}{\upsilon}, \frac{5}{2}\frac{L}{\upsilon}\right)$ το μέσον Μ συμπεριφέρεται ως δεσμός.

Αυτό μπορεί να δικαιολογηθεί απλούστερα ως εξής:

Το σημείο Β λόγω του K_1 θα είχε εξίσωση ταλάντωσης:

$y_{1B}(t) = y_1(L,t) = A\eta\mu(\omega t - kL) = A\eta\mu(\omega t)$.

Επειδή το σημείο Β πρέπει να έχει εξίσωση κίνησης Αημ(ωt), η εξίσωση κίνησης του Β λόγω του ανακλώμενου κύματος είναι: $y_{3B}(t) = -y_{1B}(t) = -A\eta\mu(\omega t)$.

Συνεπώς τα κύματα K_2 και K_3, εκεί που συνυπάρχουν βρίσκονται σε αντίθεση φάσης.

Άρα αλληλοαναιρούνται. Το ίδιο συμβαίνει με τα K_1 και K_4.

Στο χρονικό διάστημα $\left(\frac{3}{2}\frac{L}{\upsilon}, \frac{5}{2}\frac{L}{\upsilon}\right)$ συνυπάρχουν 4 κύματα. Άρα το Μ συμπεριφέρεται ως δεσμός.

- Στο θέμα Γ των πανελλαδικών εξετάσεων του 2011 ζητούσαν την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου Μ συναρτήσει του χρόνου για χρονικό διάστημα από 0 έως $5\frac{L}{\upsilon}$.

  Επομένως από την χρονική στιγμή $4.5\frac{L}{\upsilon}$ έως την στιγμή $5\frac{L}{\upsilon}$ η εξίσωση κίνησης του Μ καθορίζεται από 10 κύματα!!!
- Στο παράρτημα που ακολουθεί δίνεται η λύση του προβλήματος 2 για τυχαία χρονική στιγμή σε «κλειστή μορφή» με την οποία είναι δυνατή η απόδειξη του Β ερωτήματος.

Παράρτημα

Θεωρούμε το επόμενο μαθηματικό πρόβλημα:

Να βρεθεί u(x,s) λύση της κυματικής εξίσωσης $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0$ στο σύνολο $\{(x,s): 0\le x\le L,\ s\in\mathbb{R}\}$ με αρχικές συνθήκες

$$u(x,0)=\Phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial s}(x,0)=\Psi(x),\ u(0,s)=\mu_1(s),\ u(L,s)=\mu_2(s),\ x\in[0,L],\ s\in\mathbb{R}.$$

Η απάντηση για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι:

Θέτουμε $\mu_{1,2}^{+}(z)=\begin{cases}\mu_{1,2}(z) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$ και $\mu_{1,2}^{-}(z)=\begin{cases}0 & z>0\\ \mu_{1,2}(z) & z\le 0\end{cases}$

Η u(x,s) δίνεται από την σχέση

$$u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\Phi}(x-s)+\tilde{\Phi}(x+s)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-s}^{x+s}\tilde{\Psi}(z)dz+$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[\mu_1^{+}(s-x-2jL)-\mu_1^{+}(s+x-2jL-2L)\right]+\sum_{j=0}^{\infty}\left[\mu_1^{-}(s+x+2jL)-\mu_1^{-}(s-x+2jL+2L)\right]$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left[\mu_2^{+}(s+x-2jL-L)-\mu_2^{+}(s-x-2jL-L)\right]+\sum_{j=0}^{\infty}\left[\mu_2^{-}(s-x+2jL+L)-\mu_2^{-}(s+x+2jL+L)\right] \quad (5)$$

Φαινομενικά τα παραπάνω αθροίσματα έχουν άπειρους όρους.

Όμως για μεγάλες τιμές του j τα ορίσματα των $\mu_{1,2}^{+}$ γίνονται αρνητικά και τα ορίσματα των $\mu_{1,2}^{-}$ γίνονται θετικά. Επομένως $\mu_{1,2}^{+}(..)=\mu_{1,2}^{-}(..)=0$

Συγκεκριμένα, αν $|s|\le(N+1)2L$, τότε $\sum_{j=0}^{\infty}...=\sum_{j=0}^{N}...$

Οι συναρτήσεις $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ έχουν πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και προκύπτουν από τις Φ, Ψ ως εξής:

Έστω Φ_1, Ψ_1 οι περιττές επεκτάσεις των Φ, Ψ στο [-L,L]. Οι $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Psi}$ είναι οι περιοδικές επεκτάσεις των Φ_1, Ψ_1 στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 2L.

Η κυματική εξίσωση για ένα Φυσικό είναι: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$

Ορίζουμε μια χρονική μεταβλητή s με διαστάσεις μήκους μέσω της σχέσης s=υt.

Η κυματική εξίσωση γίνεται $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=0$

Εφαρμογή της σχέσης (5) στο πρόβλημα 2.

Επειδή το μέσο αρχικά είναι ακίνητο στο διάστημα [0,L] ισχύει ότι $\tilde{\Phi}(z)=0,\ \tilde{\Psi}(z)=0$

Επειδή τα σημεία O και B αρχίζουν να ταλαντώνονται την στιγμή t=0, ισχύει ότι $\mu_{1,2}^{-}=0$.

$\mu_{1,2}(s)=A\eta\mu(\omega t)=A\eta\mu(k\upsilon t)=A\eta\mu(ks)$

Για χρονικές στιγμές $t<\frac{2L}{\upsilon}\Rightarrow s<2L(0+1)$ έχουμε ότι N=0. Άρα $\sum_{j=0}^{\infty}...=\sum_{j=0}^{0}...$

Η σχέση (5) γίνεται:

$$u(x,s)=\mu_1^{+}(s-x)-\mu_1^{+}(s+x-2L)+\mu_2^{+}(s+x-L)-\mu_2^{+}(s-x-L) \qquad (6)$$

Εφαρμόζοντας την σχέση (6) για το σημείο x=0 και μια χρονική στιγμή t με $\frac{3L}{2\upsilon}<t<\frac{2L}{\upsilon}$ έχουμε:

$$u(0,s)=\mu_1^{+}(s)-\mu_1^{+}(s-2L)+\mu_2^{+}(s-L)-\mu_2^{+}(s-L)=\mu_1^{+}(s)-\mu_1^{+}(s-2L)$$

Ισχύει ότι:

- $s>0\Rightarrow\mu_1^{+}(s)=\mu_1(s)=A\eta\mu(ks)$
- $s-2L<0\Rightarrow\mu_1^{+}(s-2L)=0$

Επομένως $u(0,\frac{19L}{12})=A\eta\mu(\frac{19\pi}{4})=\frac{A\sqrt{2}}{2}$

Εφαρμόζοντας την σχέση (6) για το σημείο x=L και μια χρονική στιγμή t με $\frac{3L}{2\upsilon}<t<\frac{2L}{\upsilon}$ έχουμε:

$$u(L,s)=\mu_1^{+}(s-L)-\mu_1^{+}(s-L)+\mu_2^{+}(s)-\mu_2^{+}(s-2L)=\mu_2^{+}(s)-\mu_2^{+}(s-2L)\Rightarrow$$

$$u(L,\frac{19L}{12})=\mu_2\left(\frac{19L}{12}\right)=\frac{A\sqrt{2}}{2}$$

Μια χρονική στιγμή t με $\frac{3L}{2\upsilon}<t<\frac{2L}{\upsilon}$ και ένα σημείο στην θέση x με

$2L-\upsilon t<x<\upsilon t-L\Leftrightarrow 2L-s<x<s-L$ έχουμε:

$$u(x,s)=\mu_1^{+}(s-x)-\mu_1^{+}(s+x-2L)+\mu_2^{+}(s+x-L)-\mu_2^{+}(s-x-L)$$

- Ισχύει ότι: $x<s-L\Rightarrow s-x>L>0\Rightarrow s-x-L>0$.

  $\mu_1^{+}(s-x)=\mu_1(s-x)=A\sin(ks-kx)$ και $\mu_2^{+}(s-x-L)=\mu_2(s-x-L)=A\sin(ks-kx-kL)$.

- Ισχύει ότι $2L-s<x\Rightarrow s+x>2L\Rightarrow s+x-L>0$ και $s+x-2L>0$.

  $\mu_1^{+}(s+x-2L)=A\eta\mu(ks+kx-2kL)$ και $\mu_2^{+}(s+x-L)=A\eta\mu(ks+kx-kL)$

Άρα $u(x,s)=A\eta\mu(\omega t-kx)-A\eta\mu(\omega t+kx-2kL)+A\eta\mu(\omega t+kx-kL)-A\eta\mu(\omega t-kx-kL)$ (7)

Ισχύει ότι $\omega t-kx=\omega t-kr_1$ και $\omega t+kx=\omega t+k(L-r_2)=\omega t-kr_2+kL$

Η σχέση (7) γίνεται:

$$u(x,t)=A\eta\mu(\omega t-kr_1)-A\eta\mu(\omega t-kr_2-kL)+A\eta\mu(\omega t-kr_2)-A\eta\mu(\omega t-kr_1-kL)$$

σε πλήρη συμφωνία με την (4).

Β) Επειδή $L=m\lambda \Rightarrow kL=2m\pi$

Τα κύματα K_1, K_2 φτάνουν στο σημείο Μ την «χρονική στιγμή» $t=\dfrac{L}{2\upsilon}$.

Τα κύματα K_3, K_4 φτάνουν στο σημείο Μ την χρονική στιγμή $t=\dfrac{3L}{2\upsilon}$.

Στο χρονικό διάστημα $(\dfrac{L}{2\upsilon},\dfrac{3L}{2\upsilon})$ τα κύματα δρουν σε φάση και το Μ συμπεριφέρεται σαν κοιλία.

Στο χρονικό διάστημα $(\dfrac{3L}{2\upsilon},\dfrac{5L}{2\upsilon})$ στο σημείο Μ δρουν τα κύματα K_1, K_2, K_3, K_4.

Όπως έχουμε ήδη αποδείξει, αν το μήκος της χορδής είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος τότε τα K_2, K_3 είναι σε αντίθεση φάσης όπως και τα K_1, K_4. Άρα το Μ είναι ακίνητο.

Στο χρονικό διάστημα $(\dfrac{3L}{2\upsilon},\dfrac{5L}{2\upsilon})$ στο σημείο Μ προστίθενται δύο ακόμη κύματα τα οποία δρουν σε φάση με αποτέλεσμα το Μ να συμπεριφέρεται σαν κοιλία.

Στο χρονικό διάστημα $(\dfrac{5L}{2\upsilon},\dfrac{7L}{2\upsilon})$ στο σημείο Μ δρουν 8 κύματα τα οποία αλληλοαναιρούνται με αποτέλεσμα το Μ να συμπεριφέρεται σαν δεσμός κ.τ.λ.

Εικάζουμε λοιπόν ότι στο χρονικό διάστημα $\left((4n+1)\dfrac{L}{2\upsilon},(4n+3)\dfrac{L}{2\upsilon}\right)$ το Μ συμπεριφέρεται σαν κοιλία και στο χρονικό διάστημα $\left((4n+3)\dfrac{L}{2\upsilon},(4n+5)\dfrac{L}{2\upsilon}\right)$ ως δεσμός.

Επειδή $\mu_1=\mu_2=\mu$ η σχέση (5) γίνεται:

$$u(x,s)=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\mu^+(s-x-2jL)-\mu^+(s+x-2jL-2L)\right]+\sum_{j=0}^{\infty}\left[\mu^+(s+x-2jL-L)-\mu^+(s-x-2jL-L)\right]$$

Θεωρούμε μια τυχαία «χρονική στιγμή» s με $(4n+1)\dfrac{L}{2}<s<(4n+3)\dfrac{L}{2}<2(n+1)L$

Επομένως

$$u(x,s)=\sum_{j=0}^{n}\left[\mu^+(s-x-2jL)-\mu^+(s+x-2jL-2L)\right]+\sum_{j=0}^{n}\left[\mu^+(s+x-2jL-L)-\mu^+(s-x-2jL-L)\right]$$

Με $x=\dfrac{L}{2}$ έχουμε:

$$u(\frac{L}{2},s)=2\sum_{j=0}^{n}\left[\mu^+\left(s-2jL-\frac{L}{2}\right)-\mu^+\left(s-2jL-\frac{3L}{2}\right)\right] \tag{8}$$

Για j≤(n+1) ισχύει ότι:

$$s-2jL-\frac{3L}{2}>(4n+1)\frac{L}{2}-2(n-1)L-\frac{3L}{2}=\frac{L}{2}+2L-\frac{3L}{2}=L>0$$

Επομένως,

$$\mu^{+}\left(s-2jL-\frac{L}{2}\right)=\mu\left(s-2jL-\frac{L}{2}\right)=A\eta\mu(\omega t-2jkL-\frac{kL}{2})=A\eta\mu(\omega t-4m\pi-m\pi)$$

$$\mu^{+}\left(s-2jL-\frac{3L}{2}\right)=\mu\left(s-2jL-\frac{3L}{2}\right)=A\eta\mu(\omega t-2jkL-\frac{3kL}{2})=A\eta\mu(\omega t-4m\pi-3m\pi)\Rightarrow$$

$$\mu^{+}\left(s-2jL-\frac{3L}{2}\right)=A\eta\mu(\omega t-4m\pi-m\pi)$$

Άρα $2\sum_{j=0}^{n-1}\left[\mu^{+}\left(s-2jL-\frac{L}{2}\right)-\mu^{+}\left(s-2jL-\frac{3L}{2}\right)\right]=0$

Με j=n ισχύει ότι:

$$s-2jL-\frac{L}{2}>(4n+1)\frac{L}{2}-2nL-\frac{L}{2}=\frac{L}{2}-\frac{L}{2}=0\,.$$

Αρα $\mu^{+}\left(s-2nL-\frac{L}{2}\right)=A\eta\mu(\omega t-m\pi)$

$$s-2nL-\frac{3L}{2}=s-2nL-\frac{3L}{2}<(4n+3)\frac{L}{2}-2nL-\frac{3L}{2}=0$$

Επομένως $\mu^{+}\left(s-2nL-\frac{3L}{2}\right)=0$

Από την σχέση (8) έχουμε ότι: $u(x,s)=2A\eta\mu(\omega t-m\pi)$

Άρα το Μ συμπεριφέρεται ως κοιλία με πλάτος 2Α.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι στο χρονικό διάστημα $\left((4n+3)\frac{L}{2\upsilon},(4n+5)\frac{L}{2\upsilon}\right)$, το σημείο Μ συμπεριφέρεται ως δεσμός.

korfiatis@sch.gr