ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Η εξίσωση, η οποία περιγράφει την διάδοση ενός εγκαρσίου κύματος με ταχύτητα υ σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο είναι η

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

όπου u(x,t) η απομάκρυνση, από την θέση ισορροπίας του, την χρονική στιγμή t του σημείου που βρίσκεται στην θέση x.
Εισάγοντας τους συμβολισμούς

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ u_t = \frac{\partial u}{\partial t},\ u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \tag{1.2}$$

Η κυματική εξίσωση γίνεται:

$$u_{xx} - \frac{1}{\upsilon^2} u_{tt} = 0 \tag{1.3}$$

Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή s με διατάσεις μήκους σύμφωνα με την σχέση s=υt.
Η κυματική εξίσωση γίνεται:

$$u_{xx} - u_{ss} = 0 \tag{1.4}$$

1.1. Η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης

Ορίζουμε δύο νέες μεταβλητές ξ και η από τις σχέσεις

$$\xi = x - s \text{ και } \eta = x + s \tag{1.5}$$

Οι τελεστές παραγώγισης $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ $\partial_s = \frac{\partial}{\partial s}$ και γίνονται:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} \Rightarrow \partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta \tag{1.6α}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial \xi}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \eta} \Rightarrow \partial_s = -\partial_\xi + \partial_\eta \tag{1.6β}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1.6) στην (1.4) έχουμε:

$$(\partial_\xi + \partial_\eta)(\partial_\xi + \partial_\eta)u - (-\partial_\xi + \partial_\eta)(-\partial_\xi + \partial_\eta)u = 0 \Rightarrow$$

$$u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Από την σχέση (1.7) έχουμε με άμεση ολοκλήρωση ως προς ξ ότι $\frac{\partial u}{\partial \eta} = g(\eta)$. Από την σχέση αυτή με ολοκλήρωση ως προς η έχουμε ότι

$$\boxed{u = F(\xi) + G(\eta) = F(x - s) + G(x + s)} \tag{1.8}$$

Οι συναρτήσεις F και G είναι αυθαίρετες συναρτήσεις (μιας μεταβλητής), οι οποίες αρκεί να είναι δύο φορές παραγωγίσιμες. Οι συναρτήσεις F και G μπορούν να υπολογιστούν από τις αρχικές συνθήκες.
Ο όρος F(x-s)=F(x-υt) αντιστοιχεί σε ένα κύμα που διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση και ο όρος G(x+υt) σε ένα κύμα που διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση.

2. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ CAUCHY ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΥΜΑΤΙΚΉ ΕΞΊΣΩΣΗ

Πρόβλημα 2.1.

Να βρεθεί λύση της (1.4) στον $\mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε $u(x,0)=\varphi(x)$ και $u_s(x,0)=\Psi(x)$ όπου φ, Ψ :$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνωστές συναρτήσεις δις παραγωγίσιμες.

<u>Λύση</u>

Όπως έχουμε ήδη αποδείξει η λύση της (1.4) έχει την μορφή:

$u(x,s)=F(x-s)+G(x+s)\Rightarrow$

$$u(x,s)=F(x-s)+G(x+s)\Rightarrow u_s(x,s)=-F'(x-s)+G'(x+s)$$

Πρέπει

$$u(x,0)=\varphi(x)\Leftrightarrow F(x)+G(x)=\varphi(x) \qquad (2.1.\alpha)$$

$$u_s(x,0)=\Psi(x)\Leftrightarrow -F'(x)+G'(x)=\Psi(x) \qquad (2.1.\beta)$$

Από την σχέση (2.1.β) έχουμε ολοκληρώνοντας ως προς x ότι:

$$-F(x)+G(x)=\int_0^x \Psi(z)dz+2c \qquad (2.1.\gamma)$$

όπου c αυθαίρετη σταθερά.

Προσθέτοντας τις (2.1.α) και (2.1γ) κατά μέλη έχουμε:

$$G(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)+\int_0^x \Psi(z)dz\right]+c \qquad (2.1\delta)$$

Αφαιρώντας τις (2.1.α) και (2.1.γ) κατά μέλη έχουμε:

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)-\int_0^x \Psi(z)dz\right]-c \qquad (2.1\varepsilon)$$

Συνεπώς,

$$u(x,s)=F(x-s)+G(x+s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-s)-\int_0^{x-s}\Psi(z)dz\right]+\frac{1}{2}\left[\varphi(x+s)+\int_0^{x+s}\Psi(z)dz\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{u(x,s)=F(x-s)+G(x+s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-s)+\varphi(x+s)+\int_{x-s}^{x+s}\Psi(z)dz\right]} \qquad (2.2)$$

Η σχέση (2.2) αποτελεί την λύση του προβλήματος του Cauchy για τις δοθείσες αρχικές συνθήκες.

<u>Σχόλια</u>

Η συνάρτηση φ είναι η $u(x,0)$. Επομένως μας δείχνει τις θέσεις των σημείων του μέσου την χρονική στιγμή 0.

Η συνάρτηση Ψ είναι η $u_s(x,0)$. Επομένως μας δείχνει τις ταχύτητες των σημείων του μέσου την χρονική στιγμή 0.

Είναι σημαντικό ότι οι συναρτήσεις φ, Ψ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις με πεδίο ορισμού <u>όλο το $\mathbb{R}$</u>.

Η σταθερά c που εμφανίζεται ολοκληρώνοντας την σχέση (2.1β) τελικά απαλείφεται στην u.

Αυτό το γεγονός ισχύει σε όλα τα προβλήματα που ακολουθούν. Επομένως μπορούμε να την θέσουμε ίση με μηδέν.

Για να γίνουν κατανοητά κάποια βήματα που θα ακολουθήσουμε στην συνέχεια είναι απαραίτητες οι επόμενες δύο προτάσεις

Πρόταση 2.2.

Έστω u λύση της κυματικής εξίσωσης στον $\mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε u(x,0)=φ(x) και $u_s(x,0)=\Psi(x)$.

Ισχύει ότι:

i) Αν $x_0\in\mathbb{R}$ και οι φ, Ψ είναι περιττές συναρτήσεις στο x_0, τότε $u(x_0,s)=0$

ii) Αν $x_0\in\mathbb{R}$ και οι φ, Ψ είναι άρτιες συναρτήσεις στο x_0, τότε $u_x(x_0,s)=0$

Απόδειξη

i) Το γεγονός ότι οι φ, Ψ είναι περιττές συναρτήσεις στο x_0 σημαίνει ότι $\varphi(x_0-h)=-\varphi(x_0+h)$ και $\Psi(x_0-h)=-\Psi(x_0+h)$ $\forall h\in\mathbb{R}$.

Σύμφωνα με την σχέση (2.2)

$$u(x_0,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x_0-s)+\varphi(x_0+s)+\int_{x_0-s}^{x_0+s}\Psi(z)dz\right]$$

Επειδή η φ είναι περιττή στο x_0, ισχύει ότι $\varphi(x_0-s)+\varphi(x_0+s)=0$. Άρα

$$2u(x_0,s)=\int_{x_0-s}^{x_0+s}\Psi(z)dz=\int_{x_0-s}^{x_0}\Psi(z)dz+\int_{x_0}^{x_0+s}\Psi(z)dz$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα εκτελούμε τον μετασχηματισμό $z=x_0-h$ και στο δεύτερο τον μετασχηματισμό $z=x_0+h$.

$$2u(x_0,s)=-\int_{s}^{0}\Psi(x_0-h)dh+\int_{x_0}^{s}\Psi(x_0+h)dh=\int_{s}^{0}\Psi(x_0+h)dh+\int_{x_0}^{s}\Psi(x_0+h)dh=0$$

ii) Το γεγονός ότι οι φ, Ψ είναι άρτιες συναρτήσεις στο x_0 σημαίνει ότι $\varphi(x_0-h)=\varphi(x_0+h)$ και $\Psi(x_0-h)=\Psi(x_0+h)$ $\forall h\in\mathbb{R}$.

Σύμφωνα με την σχέση (2.2)

$$u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-s)+\varphi(x+s)+\int_{x-s}^{x+s}\Psi(z)dz\right]\Rightarrow$$

$$u_x(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi'(x-s)+\varphi'(x+s)+\psi(x+s)-\psi(x-s)\right]\Rightarrow$$

$$u_x(x_0,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi'(x_0-s)+\varphi'(x_0+s)+\psi(x_0+s)-\psi(x_0-s)\right]=\frac{1}{2}\left[\varphi'(x_0-s)+\varphi'(x_0+s)\right]$$

Επειδή η φ είναι άρτια στο x_0 ισχύει ότι $\varphi(x_0-s)=\varphi(x_0+s)$.

Παραγωγίζοντας ως προς s, έχουμε ότι $-\varphi'(x_0-s)=\varphi'(x_0+s)$.

Άρα $u_x(x_0,s)=0$

Εφαρμογή 2.3.

Θεωρούμε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο μεγάλου μήκους το οποίο εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x'x ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Απομακρύνουμε τα σημεία του μέσου έτσι ώστε να βρίσκονται επί της καμπύλης με εξίσωση $y=e^{-kx^2}$,k>0 και την στιγμή t=0 αφήνουμε το μέσο ελεύθερο να κινηθεί. Να βρεθεί η εξίσωση του παραγόμενου κύματος.

Λύση

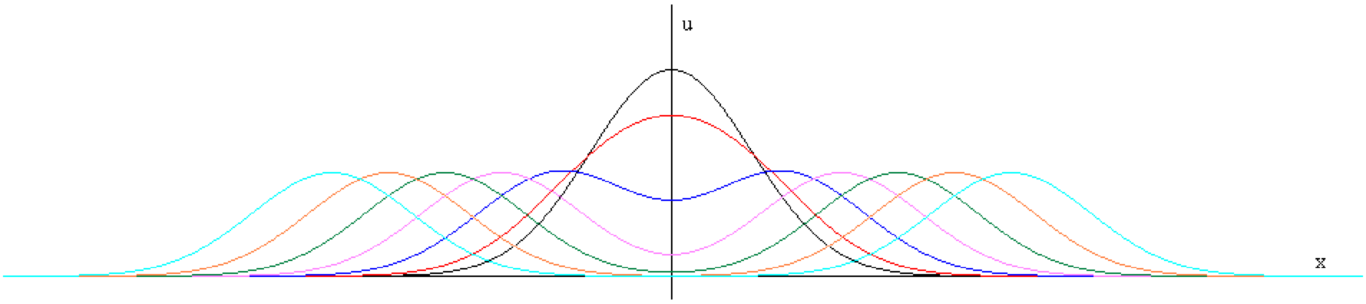
Την στιγμή t=0 όλα τα σημεία του μέσου είναι ακίνητα. Επομένως Ψ(x)=0.

Η συνάρτηση φ έχει εξίσωση $\varphi(x)=e^{-kx^2}$.

Σύμφωνα με την σχέση (2.2) έχουμε:

$$u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-s)+\varphi(x+s)\right]\Rightarrow u(x,s)=\frac{1}{2}\left[e^{-k(x-s)^2}+e^{-k(x+s)^2}\right]$$

Στιγμιότυπα της u για διάφορες χρονικές στιγμές δίνονται στο επόμενο σχήμα

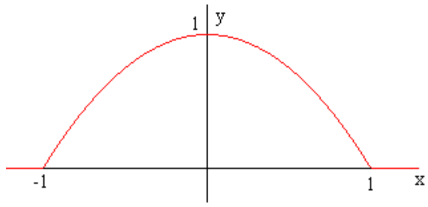


Παρατηρούμε ότι ο αρχικός παλμός ύψους 1 (μαύρη γραμμή) σταδιακά χωρίζεται σε δύο παλμούς ύψους ½ , ο ένας διαδιδόμενος προς τα δεξιά και ο άλλος προς τα αριστερά.

Εφαρμογή 2.4.
Θεωρούμε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο μεγάλου μήκους το οποίο εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x’x ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Απομακρύνουμε τα σημεία του μέσου που βρίσκονται στο διάστημα [-1,1], κατά την διεύθυνση του άξονα y, έτσι ώστε να σχηματίζουν τόξο παραβολής με εξίσωση $y=1-x^2$ και την στιγμή t=0 αφήνουμε το μέσο ελεύθερο να κινηθεί. Να βρεθεί η εξίσωση του παραγόμενου κύματος.

<u>Λύση</u>
Την στιγμή t=0 όλα τα σημεία του μέσου είναι ακίνητα. Επομένως Ψ(x)=0.
Η συνάρτηση φ είναι η συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

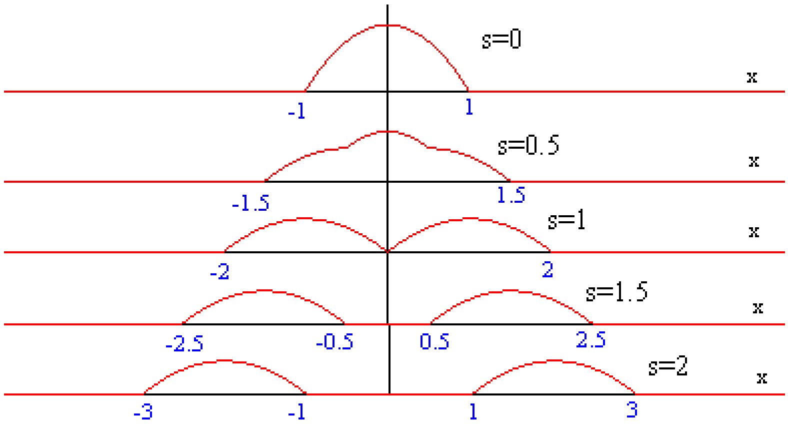
$$\varphi(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$



Η συνάρτηση αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη. Επομένως, φαίνεται ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.2) για να βρούμε την λύση της κυματικής εξίσωσης.
Με μια πρόχειρη ματιά στην (2.2) βλέπουμε ότι η δεν απαιτείται καν η συνέχεια της φ.
Όμως κατά την πορεία της απόδειξης χρησιμοποιήσαμε την παραγωγισιμότητα της φ.
Μπορούμε να κάνουμε μια εξομάλυνση του προβλήματος και να άρουμε τις ενστάσεις των Μαθηματικών ως εξής:
Θεωρούμε μια συνάρτηση προεξοχής $h_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (βλέπε παράρτημα), η οποία είναι ίση με 1 στο διάστημα [-1,1] και 0 έξω από το διάστημα [-1-ε, 1+ε].
Ορίζουμε την συνάρτηση $\varphi_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\varphi_\varepsilon(x)=(1-x^2)h_\varepsilon(x)$
Προφανώς $\varphi_\varepsilon=\varphi$ στο διάστημα [-1,1] και $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(x)$.
Επειδή η φ_ε είναι δύο φορές παραγωγίσιμη μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω και να βρούμε λύση u_ε της κυματικής εξίσωσης. Ορίζουμε ως λύση του φυσικού προβλήματος που θέσαμε τη συνάρτηση u με $u(x,s)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(x,s)$
Σύμφωνα με την σχέση (2.2) έχουμε:

$$u_\varepsilon(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi_\varepsilon(x-s)+\varphi_\varepsilon(x+s)\right]\Rightarrow\boxed{u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-s)+\varphi(x+s)\right]} \qquad (2.3)$$

Ας σχεδιάσουμε στιγμιότυπα της (2.3) όπως προκύπτουν από πρόγραμμα σχεδίασης γραφικών παραστάσεων και στην συνέχεια θα βρούμε την ερμηνεία τους τόσο από μαθηματική όσο και από φυσική σκοπιά.



Ας θεωρήσουμε το στιγμιότυπο για s=1.5

$$u(x,1.5)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-1.5)+\varphi(x+1.5)\right]$$

Με $x<-2.5\Rightarrow x-1.5<-4<-1 \Rightarrow \varphi(x-1.5)=0$ & $x+1.5<-1 \Rightarrow \varphi(x+1.5)=0$. Άρα $u(x,1.5)=0$

Με $x>2.5\Rightarrow x-1.5>1 \Rightarrow \varphi(x-1.5)=0$ & $x+1.5>4>1\Rightarrow \varphi(x+1.5)=0$. Άρα $u(x,1.5)=0$

Με $-0.5<x<0.5\Rightarrow -2<x-1.5<-1$ & $1<x+1.5<2 \Rightarrow \varphi(x-1.5)=0$ & $\varphi(x+1.5)=0$. Άρα $u(x,1.5)=0$

Με $0.5<x<2.5\Rightarrow -1<x-1.5<1$ & $2<x+1.5<4 \Rightarrow \varphi(x-1.5)=1-(x-1.5)^2$ & $\varphi(x+1.5)=0$.

Άρα η γραφική παράσταση της u στο διάστημα [0.5,2.5] είναι ίδια με την γραφική παράσταση της φ έχοντας υποστεί μια μετατόπιση προς τα δεξιά κατά 1.5 και μια σμίκρυνση στον άξονα y με παράγοντα ½.

Με $-2.5<x<-0.5\Rightarrow -4<x-1.5<-2$ & $-1<x+1.5<1 \Rightarrow \varphi(x-1.5)=0$ & $\varphi(x+1.5)=1-(x+1.5)^2$.

Άρα η γραφική παράσταση της u στο διάστημα [-2.5,-0.5] είναι ίδια με την γραφική παράσταση της φ έχοντας υποστεί μια μετατόπιση προς τα αριστερά κατά 1.5 και μια σμίκρυνση στον άξονα y με παράγοντα ½.

Από φυσική σκοπιά έχουμε το εξής:

Μπορούμε να θεωρήσουμε το s ως χρόνο και το κύμα να διαδίδεται με ταχύτητα 1.

Η διαταραχή που δημιουργήσαμε την στιγμή s=0 θα χωριστεί σε δύο παλμούς ύψους ½.

Την χρονική στιγμή s=1.5 το κύμα θα έχει προχωρήσει κατά 1.5.

Επομένως το αριστερό άκρο του παλμού που διαδίδεται προς τα αριστερά θα βρίσκεται στο σημείο -1-1.5=-2.5. Το δεξιό άκρο του ίδιου παλμού θα βρίσκεται στο σημείο 1-1.5=-0.5

Το αριστερό άκρο του παλμού που διαδίδεται προς τα δεξιά θα έχει φτάσει στο σημείο -1+1.5=0.5 και το δεξιό του άκρο στο σημείο 1+1.5=2.5.

<u>Παρατήρηση</u>

Έστω ότι το μέσο εκτείνεται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα και δημιουργούμε μια διαταραχή που περιγράφεται από μια συνάρτηση φ(x), x>0. Θα περίμενε κανείς ότι το κύμα περιγράφεται πάλι από την σχέση (2.2).

Αυτό είναι λάθος. Για παράδειγμα αν ζητήσουμε την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του σημείου που βρίσκεται στην θέση x=1 την χρονική στιγμή 1.5. Στην περίπτωση αυτή θα χρειαστούμε την τιμή φ(1-1.5)=φ(-0.5), την οποία δεν μπορούμε να υπολογίσουμε. Σε μαθηματικό επίπεδο οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι επαρκείς.

Πρόβλημα 2.5.

Να βρεθεί λύση της κυματικής εξίσωσης με $x\geq 0$, $t\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $u(x,0)=0$, $u_s(x,0)=0$ και $u(0,s)=\mu(s)$ όπου $\mu: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνωστή συνάρτηση δις παραγωγίσιμη.

<u>Λύση</u>

Για να είναι συμβιβαστές οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει

$\mu(0)=\mu'(0)=\mu''(0)=0$

Σύμφωνα με την σχέση (1.8) η λύση έχει την μορφή $u(x,s)=F(s-x)+G(s+x)$

Άρα $u_s(x,s)=F'(s-x)+G'(s+x)$

Πρέπει $u(x,0)=0$ και $u_s(x,0)=0$. Επομένως

$F(-x)+G(x)=0$ (2.4α)

$F'(-x)+G'(x)=0$, $x\geq 0$ (2.4.β)

Από την (2.4β) με ολοκλήρωση έχουμε ότι

$-F(-x)+G(x)=0$, $x\geq 0$ (2.4γ)

Από τις (2.4α) και (2.4γ) έχουμε ότι

$G(x)=0$, $F(-x)=0$, $x\geq 0$ 2.4δ)

Από την σχέση (2.4δ) γνωρίζουμε τις τιμές τις F για $s\leq 0$ και τις τιμές της G για $s\geq 0$.

$$F(s)=\begin{cases} ? & s\geq 0 \\ 0 & s<0 \end{cases},\quad G(s)=\begin{cases} 0 & s\geq 0 \\ ? & s<0 \end{cases}$$

Πρέπει επίσης

$u(0,s)=\mu(s)\Rightarrow F(s)+G(s)=\mu(s)$ (2.5)

Η σχέση (2.5) θέλουμε να ισχύει σε όλο το $\mathbb{R}$.

Έστω $s\geq 0\Rightarrow G(s)=0$. Από την (2.5) έχουμε ότι $F(s)=\mu(s)$.

Έστω $s<0\Rightarrow F(s)=0$.

Πρέπει $F(s)+G(s)=\mu(s)\Rightarrow G(s)=\mu(s)\Rightarrow G(s)=\mu(s)$.

Συνεπώς

$$F(s)=\begin{cases} \mu(s) & s\geq 0 \\ 0 & s<0 \end{cases},\quad G(s)=\begin{cases} 0 & s\geq 0 \\ \mu(s) & s<0 \end{cases} \qquad (2.6)$$

$u(x,s)=F(s-x)+G(s+x)=$

$$u(x,s)=F(s-x)+G(s+x)=\begin{cases} \mu(s-x), & s-x\geq 0 \\ 0, & s-x<0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & s+x\geq 0 \\ \mu(s+x), & s+x<0 \end{cases}$$

Θέτουμε

$$\boxed{\mu^+(s)=\begin{cases} \mu(s), & s\geq 0 \\ 0, & s<0 \end{cases}},\ \boxed{\mu^-(s)=\begin{cases} 0, & s\geq 0 \\ \mu(s), & s<0 \end{cases}} \qquad (2.7)$$

Ισχύει ότι

$$\boxed{v(x,s)=\mu^+(s-x)+\mu^-(s+x)} \qquad (2.8)$$

Παρατήρηση

Για $t\geq 0$ ισχύει ότι $\mu^-(s+x)=0$. Επομένως

$$v(x,s)=\mu^+(s-x) \qquad (2.9)$$

Πρόβλημα 2.6.

Να βρεθεί λύση της κυματικής εξίσωσης με $x\geq 0$, $t\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_s(x,0)=\Psi(x)$ και $u(0,s)=0$.

<u>Λύση</u>

Για να είναι συμβιβαστές οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει $\varphi(0)=0$, $\Psi(0)=0$, $\varphi''(0)=0$.

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως και στο πρόβλημα 2.1 κατά λήγουμε στις σχέσεις

$$u(x,s)=F(x-s)+G(x+s) \tag{2.10α}$$

$$F(\xi)=\frac{1}{2}\left[\varphi(\xi)-\int_0^{\xi}\Psi(z)dz\right] \tag{2.10β}$$

$$G(\eta)=\frac{1}{2}\left[\varphi(\eta)+\int_0^{\eta}\Psi(z)dz\right] \tag{2.10γ}$$

Το πεδίο ορισμού των F, G είναι όλο το $\mathbb{R}$. Επειδή το πεδίο ορισμού των φ, Ψ είναι το $\mathbb{R}^+$, οι σχέσεις (2.10) μας δίνουν τις τιμές των F, G μόνο για $\xi,\eta\geq 0$.

Επειδή $\varphi(0)=\Psi(0)=0$ μπορούμε να ορίσουμε τις περιττές τους επεκτάσεις.

$\tilde{\varphi}$, $\tilde{\Psi}$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\tilde{\varphi}(\xi)=\begin{cases}\varphi(\xi) & \xi\geq 0\\ -\varphi(-\xi) & \xi<0\end{cases} \quad \text{και} \quad \tilde{\Psi}(\eta)=\begin{cases}\Psi(\eta) & \eta\geq 0\\ -\Psi(-\eta) & \eta<0\end{cases} \tag{2.11}$$

Πρέπει $u(0,s)=0\Rightarrow$

$$F(-s)+G(s)=0 \ \forall s\geq 0. \tag{2.12}$$

Έστω $\xi<0$. Συνεπώς $\xi=-s$, $s>0$

Από την σχέση (2.12) με $s=-\xi$ έχουμε ότι:

$$F(\xi)+G(-\xi)=0\Rightarrow F(\xi)=-G(-\xi)=\frac{1}{2}\left[-\varphi(-\xi)-\int_0^{-\xi}\Psi(z)dz\right]$$

Ισχύει ότι $\tilde{\varphi}(-\xi)=\varphi(-\xi)\Rightarrow -\tilde{\varphi}(-\xi)=-\varphi(-\xi)\Rightarrow \tilde{\varphi}(\xi)=-\varphi(-\xi)$

Επειδή η ολοκλήρωση γίνεται σε υποσύνολο του $\mathbb{R}^+$, $z>0\Rightarrow \Psi(z)=\tilde{\Psi}(z)$. Συνεπώς

$$F(\xi)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(\xi)-\int_0^{-\xi}\tilde{\Psi}(z)dz\right]$$

Στο ολοκλήρωμα εκτελούμε την αλλαγή $z=-w$. Ισχύει ότι

$$\int_0^{-\xi}\tilde{\Psi}(z)dz=-\int_0^{\xi}\tilde{\Psi}(-w)dw=\int_0^{\xi}\tilde{\Psi}(w)dw$$

Επομένως, $F(\xi)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(\xi)-\int_0^{\xi}\tilde{\Psi}(w)dw\right]$, $\xi<0$ (2.13α)

Άρα η σχέση (2.10β) ισχύει για κάθε $\xi\in\mathbb{R}$.

Έστω $\eta<0\Rightarrow -\eta>0$

Από την (2.12) έχουμε ότι $F(-\eta)+G(\eta)=0\Rightarrow$

$$G(\eta)=-F(-\eta)=\frac{1}{2}\left[-\tilde{\varphi}(-\eta)+\int_0^{-\eta}\tilde{\Psi}(z)dz\right]=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(\eta)+\int_0^{\eta}\tilde{\Psi}(w)dw\right]$$

Άρα η σχέση (2.10γ) ισχύει για κάθε $\eta\in\mathbb{R}$.

$$\boxed{u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-s)+\tilde{\varphi}(x+s)+\int_{x-s}^{x+s}\tilde{\Psi}(z)dz\right]} \tag{2.14}$$

<u>Παρατήρηση</u>
Στην σχέση (2.14) μπορούμε να καταλήγουμε ταχύτερα ως εξής:
Θεωρούμε τις περιττές επεκτάσεις των φ. Ψ.
Ορίζουμε την συνάρτηση

$$v(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-s)+\tilde{\varphi}(x+s)+\int_{x-s}^{x+s}\tilde{\Psi}(z)dz\right]\Rightarrow$$

$$v_s(x,s)=\frac{1}{2}\left[-\tilde{\varphi}'(x-s)+\tilde{\varphi}'(x+s)+\tilde{\Psi}(x+s)+\tilde{\Psi}(x-s)\right]$$

Παρατηρούμε ότι

$$v(0,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(-s)+\tilde{\varphi}(s)+\int_{-s}^{+s}\tilde{\Psi}(z)dz\right]=0$$

$$v(x,0)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x)+\tilde{\varphi}(x)+\int_{x}^{x}\tilde{\Psi}(z)dz\right]=\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)\,,\ x\geq 0$$

$$v_s(x,0)=\frac{1}{2}\left[-\tilde{\varphi}'(x)+\tilde{\varphi}'(x)+\tilde{\Psi}(x)+\tilde{\Psi}(x)\right]=\tilde{\Psi}(x)=\Psi(x)\,,\ x\geq 0.$$

Επομένως η v είναι λύση της κυματικής εξίσωσης, η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.
Επειδή ή λύση, με τις δοθείσες αρχικές συνθήκες είναι μοναδική, είναι η λύση του προβλήματος.

Πρόβλημα 2.7.
Να βρεθεί λύση της κυματικής εξίσωσης στον τόπο $T=\{(x,s)\in\mathbb{R}^2$, με $x\geq 0$, $t\in\mathbb{R}\}$, τέτοια ώστε
$u(x,0)=\varphi(x)$, $u_s(x,0)=\Psi(x)$ και $u(0,s)=\mu(s)$ όπου
$\varphi, \Psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ και $\mu:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνωστές συναρτήσεις δις παραγωγίσιμες.

<u>Σκέψεις</u>
Γι να είναι συμβιβαστές οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει
$\varphi(0)=\mu(0)$, $\Psi(0)=\mu'(0)$, $\varphi''(0)=\mu''(0)$
Στα προβλήματα 2.5 και 2.6 βρήκαμε λύσεις v_2, v_1 της κυματικής εξίσωσης στον τόπο
$\{(x,s)\in\mathbb{R}^2,\ x\geq 0,\ t\in\mathbb{R}\}$ με
$v_2(x,0)=0$, $v_{2s}(x,0)=0$, $v_2(0,s)=\mu(s)$.
$v_1(x,0)=\varphi(x)$, $v_{2s}(x,0)=\Psi(x)$, $v_2(0,s)=0$.
Μια πρώτη σκέψη είναι ότι το άθροισμα v_1+v_2 είναι η λύση του προβλήματος.
Όμως η λύση του προβλήματος 2.5 προϋποθέτει ότι $\mu(0)=\mu'(0)=\mu''(0)=0$
και η λύση του προβλήματος 2.6 προϋποθέτει ότι $\varphi(0)=0$, $\Psi(0)=0$, $\varphi''(0)=0$.
Οι αρχικές συνθήκες που έχουμε στην διάθεσή μας δεν μας επιτρέπουν να εφαρμόσουμε την αρχική σκέψη.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια λύση w της κυματικής εξίσωσης.
Θέτουμε v=u-w. Τότε οι αρχικές συνθήκες για την v είναι:
$v(x,0)=u(x,0)-w(x,0)$
$v_s(x,0)=u_s(x,0)-w_s(x,0)$
$v(0,s)=u(0,s)-w(0,s)$
Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε κατάλληλα την w ώστε οι αρχικές συνθήκες για την v να είναι σύμφωνες με τις απαιτήσεις των προβλημάτων 2.5 και 2.6.

<u>Λύση</u>

Γι να είναι συμβιβαστές οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει
$$\varphi(0)=\mu(0),\ \Psi(0)=\mu'(0),\ \varphi''(0)=\mu''(0) \tag{2.15}$$
Σύμφωνα με την σχέση (1.8) η συνάρτηση w με $w(x,s)=\mu(0)+\mu'(0)(s-x)+\frac{1}{2}\mu''(0)(s-x)^2$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης .
Επειδή η κυματική εξίσωση είναι γραμμική, λύση της είναι και η συνάρτηση v=u-w.
Οι αρχικές συνθήκες για την v γίνονται:
$v(x,0)=u(x,0)-w(x,0)=\varphi_1(x)$
$v_s(x,0)=u_s(x,0)-w_s(x,0)=\Psi_1(x)$
$v(0,s)=u(0,s)-w(0,s)=\mu_1(s)$
Επειδή οι φ,Ψ, μ είναι γνωστές συναρτήσεις γνωστές είναι και οι φ_1, Ψ_1, μ_1
Κάνοντας χρήση των σχέσεων (2.15) δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι:
$$\varphi_1(0)=\varphi_1''(0)=\psi_1(0)=\mu_1(0)=\mu_1'(0)=\mu_1''(0)=0$$
Έστω $\tilde{\varphi}_1$ και $\tilde{\Psi}_1$ οι περιττές επεκτάσεις των φ_1 και ψ_1 αντιστοίχως
Σύμφωνα με το πρόβλημα 2.6 η συνάρτηση
$$v_1(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}_1(x-s)+\tilde{\varphi}_1(x+s)+\int_{x-s}^{x+s}\tilde{\Psi}_1(z)dz\right]$$
είναι λύση της κυματικής εξίσωσης στον τόπο T που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες
$v_1(x,0)=\varphi_1(x)$, $v_{1s}(x,0)=\Psi_1(x)$, $v_1(0,s)=0$
Θέτουμε $v_2=v-v_1$. Οι αρχικές συνθήκες για την v_2 είναι:
$v_2(x,0)=0$, $v_{2s}(x,0)=0$, $v_2(0,s)=\mu_1(s)$
Σύμφωνα με το πρόβλημα 2.5, $v_2(x,s)=\mu_1^+(s-x)+\mu_1^-(s+x)$ όπου
$$\mu_1^+(s)=\begin{cases}\mu_1(s), & s\ge 0\\ 0, & s<0\end{cases},\ \mu_1^-(s)=\begin{cases}0, & s\ge 0\\ \mu_1(s), & s<0\end{cases}$$
Η u είναι το άθροισμα των w, v_1, v_2
Ας δούμε αναλυτικότερα τις v_1, v_2
Ισχύει ότι $v_1=v_1^+ + v_1^-$ και $v_2=v_2^+ + v_2^-$
$$v_1^+(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}_1(x-s)+\int_{x-s}^{0}\tilde{\Psi}_1(z)dz\right],\ v_1^-(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}_1(x+s)+\int_{0}^{x+s}\tilde{\Psi}_1(z)dz\right]$$
$$v_2^+(x,s)=\mu_1^+(s-x),\ v_2^-(x,s)=\mu_1^-(s+x)$$

Α) Για τις v_1^+, v_2^+ θέτουμε ξ=s-x

<u>Περίπτωση Α.1</u> s-x≥0
$$\tilde{\varphi}_1(x-s)=\tilde{\varphi}_1(-\xi)=-\tilde{\varphi}_1(\xi)=-\varphi(\xi)+w(\xi,0)$$

$$\int_{x-s}^{0}\tilde{\Psi}_1(z)dz=\int_{-\xi}^{0}\tilde{\Psi}_1(z)dz=-\int_{\xi}^{0}\tilde{\Psi}_1(-z')dz'=\int_{\xi}^{0}\tilde{\Psi}_1(z')dz'=\int_{\xi}^{0}\Psi_1(z)dz=\int_{\xi}^{0}\Psi(z)dz-\int_{\xi}^{0}w_s(z,0)dz$$

Επομένως

$$v_1^+(x,s)=\frac{1}{2}\left[-\varphi(\xi)+w(\xi,0)+\int_{\xi}^{0}\Psi(z)dz-\int_{\xi}^{0}w_s(z,0)dz\right]$$

$$v_2^+(x,s)=\mu_1^+(s-x)=\mu_1^+(\xi)=\mu_1(\xi)=\mu(\xi)-w(0,\xi)$$

$$v^+(x,s)=\frac{1}{2}\left[-\varphi(s-x)+w(s-x,0)+\int_{s-x}^{0}\Psi(z)dz-\int_{s-x}^{0}w_s(z,0)dz\right]+\mu(s-x)-w(0,s-x)$$

Περίπτωση Α.2 s-x<0

$$\tilde{\varphi}_1(x-s)=\tilde{\varphi}_1(-\xi)=\varphi(-\xi)-w(-\xi,0)$$

$$\int_{x-s}^{0}\tilde{\Psi}_1(z)dz=\int_{-\xi}^{0}\tilde{\Psi}_1(z)dz=\int_{-\xi}^{0}\Psi(z)dz-\int_{-\xi}^{0}w_s(z,0)dz$$

Επομένως

$$v_1^+(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(-\xi)-w(-\xi,0)+\int_{-\xi}^{0}\Psi(z)dz-\int_{-\xi}^{0}w_s(z,0)dz\right]$$

$$v_2^+(x,s)=\mu_1^+(s-x)=\mu_1^+(\xi)=0$$

$$v^+(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-s)-w(x-s,0)+\int_{x-s}^{0}\Psi(z)dz-\int_{x-s}^{0}w_s(z,0)dz\right]$$

Β) Για τις v_1^- , v_2^- θέτουμε η=s+x

Περίπτωση Β.1 s+x≥0

$$\tilde{\varphi}_1(x+s)=\tilde{\varphi}_1(\eta)=\varphi_1(\eta)=\varphi(\eta)-w(\eta,0)$$

$$\int_{0}^{x+s}\tilde{\Psi}_1(z)dz=\int_{0}^{\eta}\tilde{\Psi}_1(z)dz=\int_{0}^{\eta}\Psi_1(z)dz=\int_{0}^{\eta}\Psi(z)dz-\int_{0}^{\eta}w_s(z,0)dz$$

$$v_1^-(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(\eta)-w(\eta,0)+\int_{0}^{\eta}\Psi(z)dz-\int_{0}^{\eta}w_s(z,0)dz\right]$$

$$v_2^-(x,s)=\mu_1^-(s+x)=\mu_1^-(\eta)=0$$

$$v^-(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(s+x)-w(s+x,0)+\int_{0}^{s+x}\Psi(z)dz-\int_{0}^{s+x}w_s(z,0)dz\right]$$

Περίπτωση Β.2 s+x<0

$$\tilde{\varphi}_1(x+s)=\tilde{\varphi}_1(\eta)=-\varphi_1(-\eta)=-\varphi(-\eta)+w(-\eta,0)$$

$$\int_{0}^{x+s}\tilde{\Psi}_1(z)dz=\int_{0}^{\eta}\tilde{\Psi}_1(z)dz=-\int_{0}^{-\eta}\tilde{\Psi}_1(-z')dz'=\int_{0}^{-\eta}\tilde{\Psi}_1(z')dz'=\int_{0}^{-\eta}\Psi_1(z)dz=\int_{0}^{-\eta}\Psi(z)dz-\int_{0}^{-\eta}w_s(z,0)dz$$

$$v_1^-(x,s)=\frac{1}{2}\left[-\varphi(-\eta)+w(-\eta,0)+\int_{0}^{-\eta}\Psi(z)dz-\int_{0}^{-\eta}w_s(z,0)dz\right]$$

$$v_2^-(x,s)=\mu_1^-(s+x)=\mu_1^-(-\eta)=\mu_1^-(\eta)=\mu(\eta)-w(0,\eta)$$

$$v^-(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(s+x)-w(s+x,0)+\int_0^{s+x}\Psi(z)dz-\int_0^{s+x}w_s(z,0)dz\right]$$

$$v^-(x,s)=\frac{1}{2}\left[-\varphi(-s-x)+w(-s-x,0)+\int_0^{-s-x}\Psi(z)dz-\int_0^{-s-x}w_s(z,0)dz\right]+\mu(s+x)-w(0,s+x)$$

Συνοψίζοντας έχουμε:

<u>Περίπτωση Α.1</u> s-x≥0

$$v^+(x,s)=\frac{1}{2}\left[-\varphi(s-x)+w(s-x,0)+\int_{s-x}^{0}\Psi(z)dz-\int_{s-x}^{0}w_s(z,0)dz\right]+\mu(s-x)-w(0,s-x)$$

<u>Περίπτωση Α.2</u> s-x<0

$$v^+(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-s)-w(x-s,0)+\int_{x-s}^{0}\Psi(z)dz-\int_{x-s}^{0}w_s(z,0)dz\right]$$

<u>Περίπτωση Β.1</u> s+x≥0

$$v^-(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(s+x)-w(s+x,0)+\int_0^{s+x}\Psi(z)dz-\int_0^{s+x}w_s(z,0)dz\right]$$

<u>Περίπτωση Β.2</u> s+x<0

$$v^-(x,s)=\frac{1}{2}\left[-\varphi(-s-x)+w(-s-x,0)+\int_0^{-s-x}\Psi(z)dz-\int_0^{-s-x}w_s(z,0)dz\right]+\mu(s+x)-w(0,s+x)$$

Θα αποδείξουμε ότι η παρουσία του w είναι τυπική: Στην ουσία δεν συνεισφέρει στην u.

Έστω στο w ένας όρος της μορφής $w(x,s)=(s-x)^a \Rightarrow w_s(x,s)=a(s-x)^{a-1}$

$w(x,0)=(-x)^a,\ w(0,s)=s^a$

Έστω s-x>0 και s+x >0

Ο όρος αυτός συνεισφέρει στην v^+ κατά

$$\frac{1}{2}\left[w(\xi,0)-\int_\xi^0 w_s(z,0)dz\right]-w(0,\xi)=\frac{1}{2}\left[(-\xi)^a-a\int_\xi^0(-z)^{a-1}dz\right]-\xi^a=\frac{1}{2}\left[(-\xi)^a+a\int_{-\xi}^{0}\tilde{z}^{a-1}d\tilde{z}\right]-\xi^a=$$

$$\frac{1}{2}\left[(-\xi)^a+a\int_{-\xi}^{0}\tilde{z}^{a-1}d\tilde{z}\right]-\xi^a=\frac{1}{2}\left[(-\xi)^a-(-\xi)^a\right]-\xi^a=-\xi^a=-(s-x)^a$$

και στην v^- κατά

$$\frac{1}{2}\left[-w(s+x,0)-\int_0^{s+x}w_s(z,0)dz\right]=\frac{1}{2}\left[-(-\eta)^a-a\int_0^{\eta}(-z)^{a-1}dz\right]=\frac{1}{2}\left[-(-\eta)^a+a\int_0^{-\eta}(z)^{a-1}dz\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[-(-\eta)^a+(-\eta)^a\right]=0$$

Επομένως η συνεισφορά στην u είναι

$(s-x)^a-(s-x)^a=0$

Την ίδια απόδειξη μπορούμε για τις υπόλοιπες περιπτώσεις προσήμου των s-x, s+x καθώς επίσης και για w της μορφής $(s+x)^a$.

Μπορούμε λοιπόν να παραγνωρίσουμε το γεγονός ότι οι φ, Ψ δεν ικανοποιούν την συνθήκη φ(0)=0 και Ψ(0)=0, να θεωρήσουμε τις περιττές επεκτάσεις τους στο $\mathbb{R}$ και να εφαρμόσουμε τις σχέσεις ?????.

Έστω $\tilde{\varphi}$ και $\tilde{\Psi}$ οι «περιττές επεκτάσεις» των φ και Ψ

$$\tilde{\varphi}(z)=\begin{cases}\varphi(z) & z\geq 0\\ -\varphi(-z) & z<0\end{cases},\quad \tilde{\Psi}(z)=\begin{cases}\Psi(z) & z\geq 0\\ -\Psi(-z) & z<0\end{cases}$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\mu^{\pm}$ ως εξής:

$$\mu^{+}(z)=\begin{cases}\mu(z) & z>0\\ 0 & z\leq 0\end{cases} \text{ και } \mu^{-}(z)=\begin{cases}0 & z\geq 0\\ \mu(z) & z<0\end{cases}$$

Η u δίνεται από την σχέση:

$$u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-s)+\tilde{\varphi}(x+s)+\int_{x-s}^{x+s}\tilde{\Psi}(z)dz\right]+\mu^{+}(s-x)+\mu^{-}(s+x)$$

<u>Σχόλιο</u>

Επειδή φ(0), Ψ(0) , μ(0) δεν είναι μηδέν απαιτείται προσοχή ο κλάδος για τον οποίο ισχύει το «ίσον». Σε αντίθετη περίπτωση οι τιμές της u για x=s και x=-s δεν θα υπολογιστούν σωστά.

Εφαρμογή 2.8.

Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο μεγάλου μήκους εκτείνεται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα ενός συστήματος συντεταγμένων. Απομακρύνουμε τα σημεία του μέσου κατά την διεύθυνση του άξονα y έτσι ώστε να βρίσκονται στην καμπύλη με εξίσωση $y=Ae^{\frac{-k^2x^2}{2}}$. Την στιγμή t=0 αφήνουμε το μέσο ελεύθερο να κινηθεί και αρχίζουμε να ταλαντώνουμε το σημείο x=0 με εξίσωση y=Acos(ωt) όπου ω=kυ.

Να βρείτε την εξίσωση του παραγόμενου κύματος

<u>Λύση</u>

Έχουμε ότι $\varphi(x)=Ae^{\frac{-k^2x^2}{2}}$, Ψ(x)=0, μ(s)=Acos(ks)

Ισχύει ότι φ(0)=A=μ(0), $\varphi''(0)=-k^2A=\mu''(0)$, $\Psi(0)=0=\mu'(0)$.

Επομένως οι αρχικές συνθήκες είναι συμβιβαστές.

$$u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-s)+\tilde{\varphi}(x+s)+\int_{x-s}^{x+s}\tilde{\Psi}(z)dz\right]+\mu^{+}(s-x)+\mu^{-}(s+x)$$

Επειδή $\mu^{-}(s+x)=0$ και $\Psi(z)=0$

$$u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-s)+\tilde{\varphi}(x+s)\right]+\mu^{+}(s-x)$$

$$\mu^{+}(s)=\begin{cases}A\cos(ks) & s>0\\ 0 & s\leq 0\end{cases}$$

<u>Περίπτωση 1: x-s≥0⇒s-x≤0</u>

$\mu^{+}(s-x)=0$ και $\tilde{\varphi}(x-s)=\varphi(x-s)$

$$u(x,s)=\frac{A}{2}\left[e^{\frac{-k^2}{2}(x-s)^2}+e^{\frac{-k^2}{2}(x+s)^2}\right]$$

<u>Περίπτωση 2: : x-s<0⇒s-x>0</u>

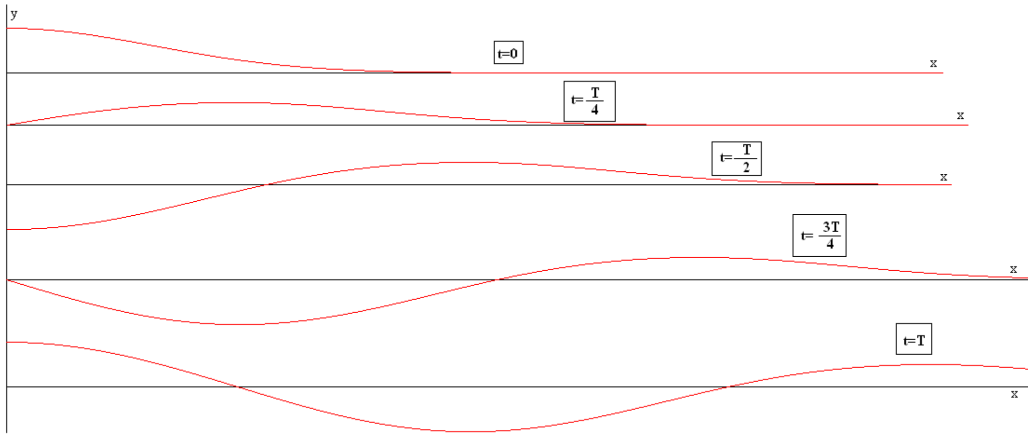
$\mu^{+}(s-x)=A\cos(ks-kx)$, $\tilde{\varphi}(x-s)=-\varphi(s-x)$

$$u(x,s)=\frac{A}{2}\left[-e^{\frac{-k^2}{2}(x-s)^2}+e^{\frac{-k^2}{2}(x+s)^2}\right]+A\cos(ks-kx)$$

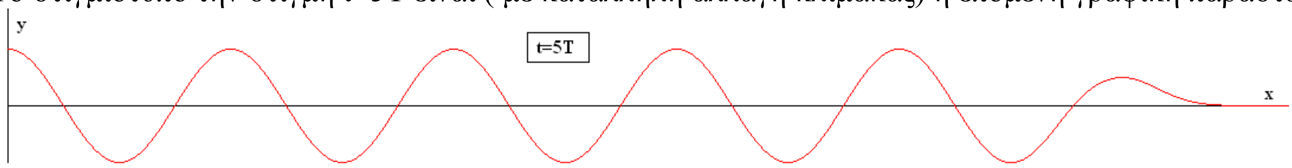
Τελικά

$$u(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[e^{\frac{-k^2(x-s)^2}{2}}+e^{\frac{-k^2(x+s)^2}{2}}\right] & \text{όταν }\ x-s\geq 0\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left[-e^{\frac{-k^2(x-s)^2}{2}}+e^{\frac{-k^2(x+s)^2}{2}}\right]+\cos(ks-kx) & \text{όταν }\ x-s<0\end{cases}$$

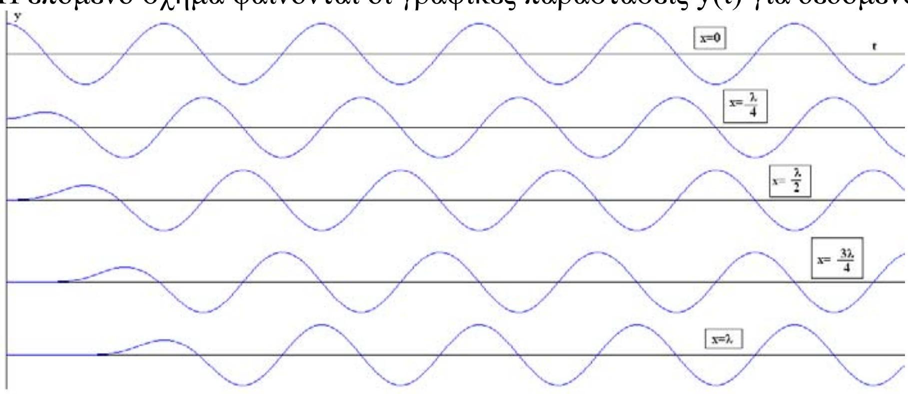
Στο επόμενο σχήμα φαίνονται στιγμιότυπα του κύματος τις χρονικές στιγμές , $0,\frac{T}{4},\frac{T}{2},\frac{3T}{4},T$



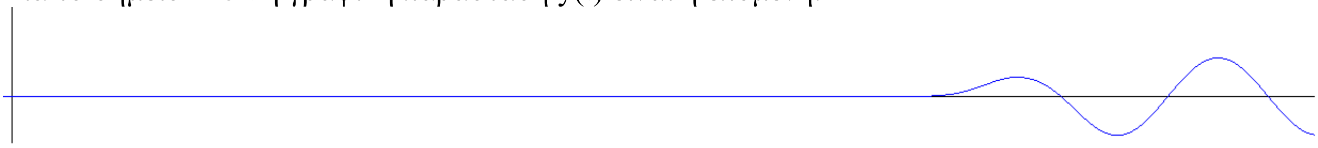
Το στιγμιότυπο την στιγμή t=5T είναι (με κατάλληλη αλλαγή κλίμακας) η επόμενη γραφική παράσταση.



Είναι σαφές ότι το κύμα έχει διαδοθεί κατά 5 μήκη κύματος.
Η μορφή της γραφικής παράστασης ερμηνεύεται ως εξής:
Για μεγάλα t και μικρά x, οι εκθετικοί όροι τείνουν στο μηδέν, με αποτέλεσμα να επικρατήσει ο τριγωνομετρικός όρος.
Για μεγάλα x και πεπερασμένο t, ισχύει ο «πάνω τύπος». Επειδή οι εκθετικοί όροι τείνουν στο μηδέν η απομάκρυνση y τείνει στο μηδέν.
Η επόμενο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις y(t) για δεδομένο x.



Για το σημείο x=5λ η γραφική παράσταση y(t) είναι η επόμενη.



Για μικρές χρονικές στιγμές s<x, ισχύει ο «πάνω τύπος». Επειδή το x είναι μεγάλο, οι εκθετικοί όροι τείνουν στο μηδέν

Για μεγάλες χρονικές στιγμές, ισχύει ο «κάτω τύπος». Οι εκθετικοί όροι μηδενίζονται και επικρατεί ο τριγωνομετρικός όρος.

Εφαρμογή 2.9.

Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο μεγάλου μήκους εκτείνεται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα ενός συστήματος συντεταγμένων. Την χρονική στιγμή t=0 το άκρο O του σχοινιού αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση y=Αημ(ωt). Να βρεθεί η εξίσωση του παραγόμενου κύματος.

<u>Λύση</u>

Στο πρόβλημα αυτό ο μαθηματικός «φρικάρει».

Ποιες είναι οι αρχικές συνθήκες:

μ(s)=Αημ(ks), φ(x)=0, $\Psi(x)=\begin{cases} kA & x=0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$

Ισχύει ότι $\varphi(0)=0=\mu(0)$, $\mu'(0)=kA=\Psi(0)$, $\mu''(0)=\varphi''(0)$

Επομένως, με κάποια έννοια οι αρχικές συνθήκες είναι συμβιβαστές.

Ας παραβλάψουμε προς το παρόν το πρόβλημα της ασυνέχειας της Ψ και ας εφαρμόσουμε τα συμπεράσματα του προβλήματος 2.7.

$$u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-s)+\tilde{\varphi}(x+s)+\int_{x-s}^{x+s}\tilde{\Psi}(z)dz\right]+\mu^{+}(s-x)+\mu^{-}(s+x)$$

Ισχύει ότι $\tilde{\varphi}=0$

Επειδή η Ψ είναι μηδέν παντού εκτός του σημείου x=0 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\tilde{\Psi}=0$.

$$\mu^{+}(s)=\begin{cases} \sin(ks) & s>0 \\ 0 & s\le 0 \end{cases}, \quad \mu^{-}(s)=\begin{cases} 0 & s>0 \\ \sin(ks) & s\le 0 \end{cases}$$

Συνεπώς,

$u(x,s)=\mu^{+}(s-x)+\mu^{-}(s+x)$.

Επειδή $s+x\ge 0 \Rightarrow \mu^{-}(s+x)=0$. Άρα

$$u(x,s)=\mu^{+}(s-x)=\begin{cases} \sin(ks-kx) & s>x \\ 0 & s\le x \end{cases}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Αν η μαθηματική μας παιδεία δεν μας επιτρέπει τις αλχημείες της λύσης που δώσαμε τότε θα πρέπει να γίνουμε λίγο ποιο προσεκτικοί.

Θεωρούμε μια συνάρτηση $h_\varepsilon : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι

- δύο φορές παραγωγίσιμη
- ίση με 1 στο διάστημα [-ε,ε]
- ίση με μηδέν εκτός του διαστήματος [-2ε,2ε]
- $h_\varepsilon(x)\in[0,1]$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση $\Psi_\varepsilon : [0,+\infty) \to\mathbb{R}$ με $\Psi_\varepsilon(x)=kAh_\varepsilon(x)$ είναι μια εξομάλυνση της Ψ.

Η συνεισφορά της Ψ_ε είναι της μορφής $\int_0^\xi \Psi_\varepsilon(z)dz = kA\int_0^\xi h_\varepsilon(z)dz$.

Επειδή η h_ε είναι ίση με μηδέν εκτός του διαστήματος [-2ε,2ε]

$$\int_0^\xi \Psi_\varepsilon(z)dz = kA\int_0^\xi h_\varepsilon(z)dz \le kA\int_0^{2\varepsilon} h_\varepsilon(z)dz \le kA\int_0^{2\varepsilon} dz = 2\varepsilon kA .$$

Στο όριο που το $\varepsilon\to 0$ η συνεισφορά της Ψ_ε μηδενίζεται.

Πρόβλημα 2.10.

Να βρεθεί λύση της κυματικής εξίσωσης στο τόπο $\{(x,t): 0\le x\le L,\ t\ge 0\}$ τέτοια ώστε $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_s(x,0)=\Psi(x)$, $u(0,s)=0$, $u(L,s)=0$.

Λύση

Για να είναι συμβιβαστές οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει

$$\varphi(0)=\varphi(L)=0,\ \Psi(0)=\Psi(L)=0,\ \varphi''(0)=\varphi''(L)=0 \qquad (2.16)$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως και στο πρόβλημα 2.1 κατά λήγουμε στις σχέσεις

$$u(x,s) = F(x-s)+G(x+s) \qquad (2.17\alpha)$$

$$F(\xi) = \frac{1}{2}\left[\varphi(\xi) - \int_0^\xi \Psi(z)dz\right] \qquad (2.17\beta)$$

$$G(\eta) = \frac{1}{2}\left[\varphi(\eta) + \int_0^\eta \Psi(z)dz\right] \qquad (2.17\gamma)$$

Οι σχέσεις 2.17β και 2.17γ ισχύουν για $\xi,\eta\in[0,L]$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις φ_1, Ψ_1 περιττές επεκτάσεις των φ, ψ στο [-L,0].

Στην συνέχεια επεκτείνουμε τις φ_1, Ψ_1 περιοδικά στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 2L. Έστω $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ οι προκύπτουσες συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές με περίοδο 2L και περιττές στο σημείο x=0.

Λόγω των σχέσεων (2.16) οι συναρτήσεις αυτές είναι καλά ορισμένες και συνεχείς.

Επομένως, στο διάστημα [0,L]

$$F(\xi) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(\xi) - \int_0^\xi \tilde{\Psi}(z)dz\right] \qquad (2.18\alpha)$$

$$G(\eta) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(\eta) + \int_0^\eta \tilde{\Psi}(z)dz\right] \qquad (2.18\beta)$$

Πρέπει για κάθε $s\ge 0$, $u(0,s)=0$. Συνεπώς,

$$F(-s)+G(s)=0 \qquad (2.19\alpha)$$

Έστω $\xi\in[-L,0]\Rightarrow -\xi\in[0,L]$

Εφαρμόζουμε την σχέση (2.19α) για $s=-\xi$.

$$F(\xi)+G(-\xi)=0 \Rightarrow F(\xi) = -G(-\xi) = \frac{1}{2}\left[-\tilde{\varphi}(-\xi) - \int_0^{-\xi}\tilde{\Psi}(z)dz\right] = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(\xi) - \int_0^\xi \tilde{\Psi}(z)dz\right]$$

Άρα η σχέση (2.18α) ισχύει για $\xi\in[-L,L]$.

Πρέπει για κάθε $s\ge 0$, $u(L,s)=0$. Συνεπώς,

$$F(L-s)+G(L+s)=0 \qquad (2.19\beta)$$

Έστω $\eta\in[L,2L]$. Θέτουμε $s=\eta-L\in[0,L]$.

Ισχύει ότι $L-s=2L-\eta\in[0,L]$.

Εφαρμόζουμε την σχέση (2.19β).

$$F(2L-\eta)+G(\eta)=0 \Rightarrow G(\eta)=\frac{1}{2}\left[-\tilde{\varphi}(2L-\eta)+\int_0^{2L-\eta}\tilde{\Psi}(z)dz\right]$$

Επειδή η $\tilde{\varphi}$ είναι περιοδική με περίοδο 2L και περιττή έχουμε:

$$-\tilde{\varphi}(2L-\eta)=-\tilde{\varphi}(-\eta)=\tilde{\varphi}(\eta)$$

Για το ολοκλήρωμα θέτουμε z=2L-w

$$\int_0^{2L-\eta}\tilde{\Psi}(z)dz=-\int_{2L}^{\eta}\tilde{\Psi}(2L-w)dw=-\int_{2L}^{\eta}\tilde{\Psi}(-w)dw=\int_{2L}^{\eta}\tilde{\Psi}(w)dw$$

Επειδή η $\tilde{\Psi}$ είναι περιοδική με περίοδο 2L και περιττή ισχύει ότι $\int_0^{2L}\tilde{\Psi}(w)dw=0$

Συνεπώς $G(\eta)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(\eta)+\int_0^{\eta}\tilde{\Psi}(z)dz\right]$

Αποδείξαμε ότι η σχέσεις (2.18) ισχύουν όταν ξ∈[-L,L], η∈[0,2L]

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε m φυσικό, οι σχέσεις (2.18) ισχύουν όταν ξ∈[-mL,L] και η∈[0,(m+1)L].
Για m=1 η πρόταση έχει ήδη αποδειχθεί.
Έστω ότι ισχύει για m=k. Δηλαδή οι σχέσεις (2.18) ισχύουν για ξ∈[-kL,L] και η∈[0,(k+1)L]
Θα την αποδείξουμε για m=k+1, δηλαδή για ξ∈[-(k+1)L,L] και η∈[0,(k+2)L].
Έστω ξ∈[-(k+1)L,0]⇒-ξ∈[0,(k+1)L]
Από την (2.19α) με s=-ξ προκύπτει η ισχύς της (2.18α)
Έστω η∈[(k+1)L,(k+2)L]
Θέτουμε s=η-L∈[kL,(k+1)L] και ξ=L-s=2L-η∈[-kL,-(k-1)L]
Από την (2.19β) έχουμε:

$$F(L-s)+G(L+s)=0 \Rightarrow G(\eta)=-F(2L-\eta)=\frac{1}{2}\left[-\tilde{\varphi}(2L-\eta)+\int_0^{2L-\eta}\tilde{\Psi}(z)dz\right]\Rightarrow$$

$$G(\eta)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(\eta)+\int_0^{-\eta}\tilde{\Psi}(z)dz\right]=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(\eta)+\int_0^{\eta}\tilde{\Psi}(z)dz\right]$$

Τελικά οι σχέσεις (2.18) ισχύουν για κάθε ξ∈ℝ με ξ≤L και η≥0.

Ισχύει ότι x+s≥0. Άρα το G(x+s) δίνεται από την (2.18β).
x-s≤L-s≤L. Άρα το G(x-s) δίνεται από την (2.18α).
Τελικά

$$\boxed{u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-s)+\tilde{\varphi}(x+s)+\int_{x-s}^{x+s}\tilde{\Psi}(z)dz\right]} \qquad (2.20)$$

Παρατηρήσεις

1) Έστω ότι αναζητούμε λύση της κυματικής εξίσωσης στο τόπο {(x,s) : 0≤x≤L, s∈ℝ}

Από την προηγούμενη ανάλυση η G δίνεται από την σχέση (2.18β) για κάθε η≥0 και η F από την σχέση (2.18α) για κάθε ξ<0.

Οι σχέσεις (2.19) ισχύουν τώρα για κάθε s∈ℝ.

Από την σχέση (2.19α) έχουμε ότι F(s)+G(-s)=0.
Επειδή η (2.18α) ισχύει στο [0,L] η (2.18β) ισχύει στο [-L,0].

Από την σχέση (2.19β) έχουμε ότι F(L+s)+G(L-s)=0.

Η σχέση αυτή μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την ισχύ των (2.18$^{\alpha}$) και (2.18β) σε όλο το $\mathbb{R}$.

2) Στην λύση (2.20) μπορούμε να καταλήξουμε ευκολότερα ως εξής:

Ορίζουμε τις επεκτάσεις των φ και Ψ στο $\mathbb{R}$ όπως και πριν.

Θεωρούμε την συνάρτηση που δίνεται από την (2.20). Εύκολα αποδεικνύεται ότι η u ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες. Επειδή η λύση με τις δοθείσες αρχικές συνθήκες είναι μοναδική, η λύση δίνεται από την (2.20).

Εφαρμογή 2.11.

Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο μήκους L ισορροπεί στο διάστημα [0,L] ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων με τα άκρα του στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία.

Απομακρύνουμε τα σημεία του σχοινιού από την θέση ισορροπίας τους ώστε να βρεθούν στην καμπύλη με εξίσωση $y = A\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ και την στιγμή t=0 αφήνουμε το μέσο ελεύθερο να κινηθεί.

Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης των σημείων του μέσου συναρτήσει του χρόνου

<u>Λύση</u>

Ισχύει ότι $\varphi(x) = A\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ και Ψ(x)=0.

Ισχύουν οι σχέσεις (2.16) και επομένως οι αρχικές συνθήκες είναι συμβιβαστές

Οι περιττές περιοδικές επεκτάσεις των φ και ψ έχουν τους ίδιους τύπους με αυτές.

Επομένως, από την σχέση (2.20) έχουμε ότι:

$$y(x,s) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-s) + \varphi(x+s) + \int_{x-s}^{x+s}\Psi(z)dz\right] = \frac{A}{2}\left[\sin\left(\pi\frac{x-s}{L}\right) + \sin\left(\pi\frac{x+s}{L}\right)\right] \Rightarrow$$

$$y(x,s) = A\sin\left(\pi\frac{2x}{2L}\right)\cos\left(\pi\frac{2s}{2L}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi \upsilon t}{\lambda}\right) = A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Εφαρμογή 2.12.

Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο μήκους L ισορροπεί στο διάστημα [0,L] ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων με τα άκρα του στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία.

Απομακρύνουμε τα σημεία του σχοινιού από την θέση ισορροπίας τους ώστε να βρεθούν στην παραβολή με εξίσωση $y = Ax(L-x)$ και την στιγμή t=0 αφήνουμε το μέσο ελεύθερο να κινηθεί.

Να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης των σημείων του μέσου συναρτήσει του χρόνου

<u>Λύση</u>

Ισχύει ότι φ(x)=Ax(L-x), $0 \le x \le L$ και Ψ(x)=0.

φ(0)=0 και $\varphi''(0) = -2$. Τυπικά δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την σχέση (2.20).

Θεωρούμε μια συνάρτηση $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0,1]$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \ge \varepsilon \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi_\varepsilon : [0,L] \to \mathbb{R}$ με $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) g_\varepsilon(x) g_\varepsilon(L-x)$

Ισχύει ότι $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)$. Για την φ_ε ισχύουν οι σχέσεις (2.16). Επομένως μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα για την φ_ε βρίσκοντας μια συνάρτηση $u_\varepsilon(x,s)$ και να πάρουμε το όριο όταν $\varepsilon \to 0$.

Προφανώς η u δίνεται από την (2.20).

$$u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-s)+\tilde{\varphi}(x+s)\right]$$

Πρόβλημα 2.13.

Να βρεθεί λύση της κυματικής εξίσωσης στο σύνολο $\{(x,t): 0\le x\le L,\ t\in\mathbb{R}\}$ τέτοια ώστε $u(x,0)=0$, $u_s(x,0)=0$, $u(0,s)=\mu(s)$, $u(L,s)=\rho(s)$.

<u>Λύση</u>

Για να είναι συμβιβαστές οι αρχικές συνθήκες πρέπει

$\mu(0)=\rho(0)=\mu'(0)=\rho'(0)=\mu''(0)=\rho''(0)=0$,

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως και στο πρόβλημα 2.5 καταλήγουμε στις σχέσεις

$$u(x,s)=F(s-x)+G(s+x) \tag{2.21α}$$

$$F(\xi)=\begin{cases} ? & \xi>0 \\ 0 & -L\le\xi\le 0\end{cases},\quad G(\eta)=\begin{cases} 0 & \eta\ge 0 \\ ? & \eta<0\end{cases} \tag{2.21β}$$

Πρέπει επίσης

$$u(0,s)=\mu(s)\Rightarrow F(s)+G(s)=\mu(s),\ s\in\mathbb{R} \tag{2.22α}$$

$$u(L,s)=\rho(s)\Rightarrow F(s-L)+G(s+L)=\rho(s),\ s\in\mathbb{R} \tag{2.22β}$$

Από τις σχέσεις (2.22) θα ορίσουμε τις F, G για κάθε ξ, η.

Έστω $\xi\in[0,L]\Rightarrow G(\xi)=0$. Από την σχέση (2.22α) έχουμε ότι $F(\xi)=\mu(\xi)$.

Έστω $\eta\in[-L,0]\Rightarrow F(\eta)=0$. Από την σχέση (2.22α) έχουμε ότι $G(\eta)=\mu(\eta)$.

Επομένως

$$F(\xi)=\begin{cases} \mu(\xi) & \xi>0 \\ 0 & -L\le\xi\le 0\end{cases},\quad G(\eta)=\begin{cases} 0 & \eta\ge 0 \\ \mu(\eta) & \eta<0\end{cases} \tag{2.21β}$$

Έστω $\eta\in[L,2L]$. Θέτουμε $s=\eta-L\in[0,L]$ και $\xi=s-L=\eta-2L\in[-L,0]\Rightarrow F(s-L)=0$.

Από την σχέση (2.22β) έχουμε ότι $G(\eta)=\rho(\eta-L)$.

Από την σχέση (2.22α) έχουμε ότι $F(\eta)=\mu(\eta)-\rho(\eta-L)$.

Μέχρι το σημείο αυτό έχουμε αποδείξει ότι

$$F(\xi)=\begin{cases} 0 & \xi\in[-L,0] \\ \mu(\xi) & \xi\in[0,L] \\ \mu(\xi)-\rho(\xi-L) & \xi\in[L,2L]\end{cases}\qquad G(\eta)=\begin{cases} \mu(\eta) & \eta\in[-L,0] \\ 0 & \eta\in[0,L] \\ \rho(\eta-L) & \eta\in[L,2L]\end{cases}$$

Επαγωγικά μπορούμε να ορίσουμε τις F, G σε όλο το $\mathbb{R}$.

Επομένως η λύση είναι μοναδική.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις μ^+, μ^-, ρ^+, ρ^- : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\mu^+(s)=\begin{cases} \mu(s) & s\ge 0 \\ 0 & s<0\end{cases},\quad \rho^+(s)=\begin{cases} \rho(s) & s\ge 0 \\ 0 & s<0\end{cases},\quad \mu^-(s)=\begin{cases} 0 & s\ge 0 \\ \mu(s) & s<0\end{cases},\quad \rho^-(s)=\begin{cases} 0 & s\ge 0 \\ \rho(s) & s<0\end{cases} \tag{2.23α}$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$p(x,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\mu^+(s-x-2mL)-\mu^+(s+x-2mL-2L)+\mu^-(s+x+2mL)-\mu^-(s-x+2mL+2L)\right] \tag{2.23β}$$

$$q(x,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\rho^+(s+x-2mL-L)-\rho^+(s-x-2mL-L)+\rho^-(s-x+2mL+L)-\rho^-(s+x+2mL+L)\right] \tag{2.23γ}$$

Τα παραπάνω αθροίσματα δεν είναι αθροίσματα απείρων όρων. Για δεδομένα x, s τα αθροίσματα αυτά είναι πεπερασμένα. Ας θεωρήσουμε ως παράδειγμα το $\sum_{m=0}^{\infty}\mu^{+}(s-x-2mL)$.

Για μεγάλες τιμές του m, το όρισμα της συνάρτησης μ^+ γίνεται αρνητικό. Επομένως η τιμή της μ^+ είναι μηδέν.

Θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα p+q είναι λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

Ισχύει ότι:

$$p(x,0)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\mu^{+}(-x-2mL)-\mu^{+}(x-2mL-2L)+\mu^{-}(x+2mL)-\mu^{-}(-x+2mL+2L)\right]$$

Όταν $x\in[0,L]$ κάθε όρος του αθροίσματος είναι μηδέν. Επομένως p(x,0)=0.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $p_s(x,0)=0$, $q(x,0)=0$, $q_s(x,0)=0$.

$$p(0,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\mu^{+}(s-2mL)-\mu^{+}(s-2mL-2L)+\mu^{-}(s+2mL)-\mu^{-}(s+2mL+2L)\right]\Rightarrow$$

$$p(0,s)=\mu^{+}(s)+\mu^{-}(s)+\sum_{m=1}^{\infty}\mu^{+}(s-2mL)+\sum_{m=1}^{\infty}\mu^{-}(s+2mL)+\sum_{m=0}^{\infty}\left[-\mu^{+}(s-2mL-2L)-\mu^{-}(s+2mL+2L)\right]=$$

$$=\mu^{+}(s)+\mu^{-}(s)+\sum_{m=0}^{\infty}\left[\mu^{+}(s-2mL-2L)+\mu^{-}(s+2mL+2L)-\mu^{+}(s-2mL-2L)-\mu^{-}(s+2mL+2L)\right]\Rightarrow$$

$$p(0,s)=\mu^{+}(s)+\mu^{-}(s)=\mu(s)$$

$$p(L,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\mu^{+}(s-L-2mL)-\mu^{+}(s-2mL-L)+\mu^{-}(s+L+2mL)-\mu^{-}(s+2mL+L)\right]=0$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι q(0,s)=0 και q(L,s)=μ(s).

Συνεπώς η συνάρτηση u με u=p+q είναι η λύση του προβλήματος.

Παρατήρηση

Για $s\geq 0$ έχουμε ότι:

$s+x+2mL\geq 0\Rightarrow \mu^{-}(s+x+2mL)=0$

$s-x+2mL+2L\geq 0-L+0+2L=L\Rightarrow \mu^{-}(s-x+2mL+2L)=0$

$s-x+2mL+L\geq 0-L+0+L=0\Rightarrow \rho^{-}(s-x+2mL+L)=0$

$s+x+2mL+L\geq 0\Rightarrow \rho^{-}(s+x+2mL+L)=0$

Επομένως

$$p(x,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\mu^{+}(s-x-2mL)-\mu^{+}(s+x-2mL-2L)\right] \qquad (2.24\beta)$$

$$q(x,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\rho^{+}(s+x-2mL-L)-\rho^{+}(s-x-2mL-L)\right] \qquad (2.24\gamma)$$

Πρόβλημα 2.14.

Να βρεθεί λύση της κυματικής εξίσωσης στο τόπο $\{(x,t): 0\leq x\leq L,\ t\geq 0\}$ τέτοια ώστε $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_s(x,0)=\Psi(x)$, $u(0,s)=\mu(s)$, $u(L,s)=\rho(s)$.

<u>Λύση</u>

Για να είναι συμβιβαστές οι αρχικές συνθήκες πρέπει

$$\varphi(0)=\mu(0),\ \varphi''(0)=\mu''(0),\ \Psi(0)=\mu'(0) \qquad (2.25\alpha)$$

$$\varphi(L)=\rho(0),\ \varphi''(L)=\rho''(0),\ \Psi(L)=\rho'(0) \qquad (2.25\beta)$$

Η πορεία επίλυσης ακολουθεί την ίδια τακτική με το πρόβλημα 2.7.
Θεωρούμε μια συνάρτηση

$$w(x,s)=\alpha+\beta(s-x)+\gamma(s+x)+\frac{\delta}{2}(s-x)^2+\frac{\varepsilon}{2}(s+x)^2+\frac{\zeta}{6}(s-x)^3+\frac{\eta}{6}(s+x)^3 \tag{2.26}$$

Θέτουμε v=u-w
Οι νέες συναρτήσεις αρχικών συνθηκών είναι οι :

$$\varphi_n(x)=\varphi(x)-w(x,0),\ \Psi_n(x)=\Psi(x)-w_s(x,0),\ \mu_n(s)=\mu(s)-w(0,s),\ \rho_n(s)=\rho(s)-w(L,s)$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχουν α, β, γ, δ, ε,ζ, η τέτοια

$$\varphi_n(0)=\varphi_n(L)=\varphi_n''(0)=\varphi_n''(L)=\Psi_n(0)=\Psi_n(L)=0 \tag{2.27α}$$

$$\mu_n(0)=\mu_n'(0)=\mu_n''(0)=\rho(0)=\rho'(0)=\rho''(0)=0 \tag{2.27β}$$

Επομένως οι συνοριακές συνθήκες για την v γίνονται:

$$v(x,0)=\varphi_n(x),\ v_s(x,0)=\Psi_n(x),\ v(0,s)=\mu_n(s),\ v(L,s)=\rho_n(s) \tag{2.28}$$

Θα βρούμε την v ως άθροισμα δύο συναρτήσεων v_1 και v_2 οι οποίες ικανοποιούν τις εξής αρχικές συνθήκες

$$v_1(x,0)=\varphi_n(x),\ v_{1s}(x,0)=\Psi_n(x),\ v(0,s)=0,\ v(L,s)=0 \tag{2.29α}$$

$$v_2(x,0)=0,\ v_{2s}(x,0)=0,\ v_2(0,s)=\mu_n(s),\ v_2(L,s)=\rho_n(s) \tag{2.29β}$$

Η συμβιβαστότητα των αρχικών συνθηκών για τις v_1, v_2 εξασφαλίζεται από τις σχέσεις (2.27). Αυτός άλλωστε είναι και ο λόγος εισαγωγής της w.
Σύμφωνα με την σχέση (2.20) έχουμε ότι $v_1=v_1^+ + v_1^-$ όπου

$$v_1^+(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}_n(x-s)+\int_{x-s}^{0}\tilde{\Psi}_n(z)dz\right] \tag{2.29γ}$$

$$v_1^-(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}_n(x+s)+\int_{0}^{x+s}\tilde{\Psi}_n(z)dz\right] \tag{2.29δ}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (2.24) $v_2=v_2^+ + v_2^-$ όπου

$$v_2^+(x,s)=\sum_{m=0}^{\infty}\mu_n^+(s-x-2mL)-\sum_{m=0}^{\infty}\rho_n^+(s-x-2mL-L) \tag{2.29ε}$$

$$v_2^-(x,s)=-\sum_{m=0}^{\infty}\mu_n^+(s+x-2mL-2L)+\sum_{m=0}^{\infty}\rho_n^+(s+x-2mL-L) \tag{2.29στ}$$

Α) Για τις v_1^+, v_2^+ θέτουμε ξ=s-x

<u>Περίπτωση Α.1:</u>

$$\boxed{(2N-1)L\le\xi<2NL}\Rightarrow -2NL<-\xi\le -2NL+L\Rightarrow 0<2NL-\xi\le L$$

$$\tilde{\varphi}_n(x-s)=\tilde{\varphi}_n(-\xi)=\tilde{\varphi}_n(-\xi+2NL)=\varphi_n(-\xi+2NL)=\varphi(-\xi+2NL)-w(-\xi+2NL,0)$$

$$\int_{x-s}^{0}\tilde{\Psi}_n(z)dz=\int_{-\xi}^{0}\tilde{\Psi}_n(z)dz=\int_{-\xi}^{0}\tilde{\Psi}_n(z+2NL)dz=\int_{-\xi+2NL}^{2NL}\tilde{\Psi}_n(z)dz=\int_{-\xi+2NL}^{0}\tilde{\Psi}_n(z)dz\Rightarrow$$

$$\int_{x-s}^{0}\tilde{\Psi}_n(z)dz=\int_{-\xi+2NL}^{0}\Psi(z)dz-\int_{-\xi+2NL}^{0}w_s(z)dz$$

Άρα

$$v_1^+(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi(-\xi+2NL)+\int_{-\xi+2NL}^{0}\Psi(z)dz-w(-\xi+2NL,0)-\int_{-\xi+2NL}^{0}w_s(z,0)dz\right]$$

Για να μην είναι μηδενική η ποσότητα $\mu_n^+(s-x-2mL)$ πρέπει

2mL<s-x<2NL⇒m<N⇒$\boxed{m \le N-1}$.

Για να μην είναι μηδενική η ποσότητα $\rho_n^+(s-x-2mL-L)$ πρέπει

2mL<s-x-L<2NL-L⇒ $m < N-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{m \le N-1}$

Επομένως.

$$v_2^+(x,s)=\sum_{m=0}^{N-1}\mu_n^+(s-x-2mL)-\sum_{m=0}^{N-1}\rho_n^+(s-x-2mL-L)$$

Περίπτωση Α.2:

$\boxed{(2N)L \le \xi < (2N+1)L} \Rightarrow -2NL-L < -\xi \le -2NL \Rightarrow -L < -\xi+2NL \le 0 \Rightarrow 0 \le \xi-2NL < L$

$$\tilde{\varphi}_n(x-s)=\tilde{\varphi}_n(-\xi)=\tilde{\varphi}_n(-\xi+2NL)=-\tilde{\varphi}_n(\xi-2NL)=-\varphi(\xi-2NL)+w(\xi-2NL,0)$$

$$\int_{x-s}^{0}\tilde{\Psi}_n(z)dz=\int_{-\xi}^{0}\tilde{\Psi}_n(z)dz=\int_{-\xi}^{0}\tilde{\Psi}_n(z+2NL)dz=\int_{-\xi+2NL}^{2NL}\tilde{\Psi}_n(z)dz=\int_{-\xi+2NL}^{0}\tilde{\Psi}_n(z)dz\Rightarrow$$

$$\int_{x-s}^{0}\tilde{\Psi}_n(z)dz=\int_{\xi-2NL}^{0}\tilde{\Psi}_n(z')dz'=\int_{\xi-2NL}^{0}\Psi(z)dz-\int_{\xi-2NL}^{0}w_s(z,0)dz$$

$$v_1^+(x,s)=\frac{1}{2}\left[-\varphi(\xi-2NL)+\int_{\xi-2NL}^{0}\Psi(z)dz+w(\xi-2NL,0)-\int_{\xi-2NL}^{0}w_s(z,0)dz\right]$$

Για να μην είναι μηδενική η ποσότητα $\mu_n^+(s-x-2mL)$ πρέπει

2mL<s-x<2NL+L⇒ $m < N+\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{m \le N}$.

Για να μην είναι μηδενική η ποσότητα $\rho_n^+(s-x-2mL-L)$ πρέπει

2mL<s-x-L<2NL+L-L⇒m<N⇒$\boxed{m \le N-1}$.

Επομένως

$$v_2^+(x,s)=\sum_{m=0}^{N}\mu_n^+(s-x-2mL)-\sum_{m=0}^{N-1}\rho_n^+(s-x-2mL-L)$$

Β) Για τις v_1^-, v_2^- θέτουμε ξ=η+x

Περίπτωση Β.1:

$\boxed{(2N-1)L \le \eta < 2NL} \Rightarrow -2NL < -\eta \le -2NL+L \Rightarrow 0 < 2NL-\eta \le L$

$$\tilde{\varphi}_n(x+s)=\tilde{\varphi}_n(\eta)=\tilde{\varphi}_n(\eta-2NL)=-\tilde{\varphi}_n(-\eta+2NL)=-\varphi(-\eta+2NL)+w(-\eta+2NL,0)$$

$$\int_{0}^{x+s}\tilde{\Psi}_n(z)dz=\int_{0}^{\eta}\tilde{\Psi}_n(z)dz=\int_{0}^{\eta}\tilde{\Psi}_n(z-2NL)dz=\int_{-2NL}^{\eta-2NL}\tilde{\Psi}_n(z)dz=\int_{0}^{\eta-2NL}\tilde{\Psi}_n(z)dz\Rightarrow$$

$$\int_{0}^{x+s}\tilde{\Psi}_n(z)dz=-\int_{0}^{2NL-\eta}\tilde{\Psi}_n(-z')dz'=\int_{0}^{2NL-\eta}\tilde{\Psi}_n(z')dz'=\int_{0}^{2NL-\eta}\Psi_n(z)dz-\int_{0}^{2NL-\eta}w_s(z,0)dz$$

Άρα

$$v_1^-(x,s)=\frac{1}{2}\left[-\varphi(2NL-\eta)+\int_{0}^{2NL-\eta}\Psi_n(z)dz+w(2NL-\eta,0)-\int_{0}^{2NL-\eta}w_s(z,0)dz\right]$$

Για να μην είναι μηδενική η ποσότητα $\mu_n^+(s+x-2mL-2L)$ πρέπει

2mL<s+x-2L<2NL-2L$\Rightarrow$m<N-1$\Rightarrow \boxed{m \le N-2}$.

Για να μην είναι μηδενική η ποσότητα $\rho_n^+(s+x-2mL-L)$ πρέπει

2mL<s+x-L<2NL-L$\Rightarrow m < N-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{m \le N-1}$.

Επομένως

$$v_2^-(x,s) = -\sum_{m=0}^{N-2}\mu_n^+(s+x-2mL-2L) + \sum_{m=0}^{N-1}\rho_n^+(s+x-2mL-L)$$

Περίπτωση Β.2:

$\boxed{(2N)L \le \eta < (2N+1)L} \Rightarrow -2NL-L < -\eta \le -2NL \Rightarrow -L < -\eta+2NL \le 0 \Rightarrow 0 \le \eta-2NL < L$

$$\tilde{\varphi}_n(x+s) = \tilde{\varphi}_n(\eta) = \tilde{\varphi}_n(\eta-2NL) = \varphi_n(\eta-2NL) - w(\eta-2NL,0)$$

$$\int_0^{x+s}\tilde{\Psi}_n(z)dz = \int_0^{\eta}\tilde{\Psi}_n(z)dz = \int_0^{\eta}\tilde{\Psi}_n(z-2NL)dz = \int_{-2NL}^{\eta-2NL}\tilde{\Psi}_n(z)dz = \int_0^{\eta-2NL}\tilde{\Psi}_n(z)dz \Rightarrow$$

$$\int_0^{x+s}\tilde{\Psi}_n(z)dz = -\int_0^{2NL-\eta}\tilde{\Psi}_n(-z')dz' = \int_0^{\eta-2NL}\Psi_n(z)dz - \int_0^{\eta-2NL}w_s(z,0)dz$$

$$v_1^-(x,s) = \frac{1}{2}\left[\varphi_n(\eta-2NL) + \int_0^{\eta-2NL}\Psi(z)dz - w(\eta-2NL,0) - \int_0^{\eta-2NL}w_s(z,0)dz\right]$$

Για να μην είναι μηδενική η ποσότητα $\mu_n^+(s+x-2mL-2L)$ πρέπει

2mL<s+x-2L<2NL-L$\Rightarrow m < N-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{m \le N-1}$.

Για να μην είναι μηδενική η ποσότητα $\rho_n^+(s+x-2mL-L)$ πρέπει

2mL<s+x-L<2NL+L-L$\Rightarrow$m<N$\Rightarrow \boxed{m \le N-1}$.

Επομένως

$$v_2^-(x,s) = -\sum_{m=0}^{N-1}\mu_n^+(s+x-2mL-2L) + \sum_{m=0}^{N-1}\rho_n^+(s+x-2mL-L)$$

Δεν είναι δύσκολο αλλά χρονοβόρο να αποδείξουμε ότι η συνεισφορά των όρων με α, β, γ, δ, ε, ζ, η είναι μηδενική.

Επομένως στο τελικό αποτέλεσμα αντί να θεωρήσουμε τις φ_n, Ψ_n, μ_n, ρ_n μπορούμε να θεωρήσουμε τις φ, Ψ, μ, ρ.

Άρα

Περίπτωση Α.1:

$(2N-1)L \le s-x < 2NL$,

$$u^+(x,s) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-s+2NL) + \int_{x-s+2NL}^{0}\Psi(z)dz\right] + \sum_{m=0}^{N-1}\mu(s-x-2mL) - \sum_{m=0}^{N-1}\rho(s-x-2mL-L) \qquad (2.30\alpha)$$

Περίπτωση Α.2:

$(2N)L \le s-x < (2N+1)L$

$$u^{+}(x,s)=\frac{1}{2}\left[-\varphi(s-x-2NL)+\int_{s-x-2NL}^{0}\Psi(z)dz\right]+\sum_{m=0}^{N}\mu(s-x-2mL)-\sum_{m=0}^{N-1}\rho(s-x-2mL-L) \quad (2.30\beta)$$

Περίπτωση Β.1:
$(2N-1)L \le s+x < 2NL$

$$u^{-}(x,s)=\frac{1}{2}\left[-\varphi(2NL-s-x)+\int_{0}^{2NL-s-x}\Psi_n(z)dz\right]-\sum_{m=0}^{N-2}\mu(s+x-2mL-2L)+\sum_{m=0}^{N-1}\rho(s+x-2mL-L) \quad (2.30\gamma)$$

Περίπτωση Β.2:
$(2N)L \le s+x < (2N+1)L$

$$u^{-}(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi_n(s+x-2NL)+\int_{0}^{s+x-2NL}\Psi(z)dz\right]-\sum_{m=0}^{N-1}\mu(s+x-2mL-2L)+\sum_{m=0}^{N-1}\rho(s+x-2mL-L) \quad (2.30\delta)$$

Παρατηρήσεις
1)Θα αποδείξουμε ότι η w δεν συνεισφέρει τελικά στην u στην περίπτωση που $w(x,s)=(s-x)^a$, $(2N-1)L \le s-x < (2N)L$, $(2M)L \le s+x < (2M+1)L$.
Στην περίπτωση αυτή $w_s(x,s)=a(s-x)^{a-1}$, $w(x,0)=(-x)^a$, $w_s(x,0)=a(-x)^{a-1}$, $w(0,s)=s^a$, $w(L,s)=(s-L)^a$.
Ας δούμε την συνεισφορά της w στους διάφορους όρους της u.
Στην v_1^+

$$\frac{1}{2}\left[-(\xi-2NL)^a-a\int_{-\xi+2NL}^{0}(-z)^{a-1}dz\right]=\frac{1}{2}\left[-(\xi-2NL)^a+a\int_{\xi-2NL}^{0}\tilde{z}^{a-1}d\tilde{z}\right]=-(\xi-2NL)^a=-(s-x-2NL)^a$$

Στην v_2^+

$$\sum_{m=0}^{N-1}\mu_n^+(\xi-2mL)-\sum_{m=0}^{N-1}\rho_n^+(\xi-2mL-L)=-\sum_{m=0}^{N-1}(\xi-2mL)^a+\sum_{m=0}^{N-1}(\xi-2mL-2L)^a=$$

$$=-\sum_{m=0}^{N-1}(\xi-2mL)^a+\sum_{m=0}^{N-1}(\xi-2mL-2L)^a=-\xi^a-\sum_{m=1}^{N-1}(\xi-2mL)^a+\sum_{m=0}^{N-2}(\xi-2mL-2L)^a+(\xi-2NL)^a=$$

$$-\xi^a+(\xi-2NL)^a=-(s-x)^a+(s-x-2NL)^a$$

Στην v_1^-

$$\frac{1}{2}\left[-w(\eta-2ML,0)-\int_{0}^{\eta-2ML}w_s(z,0)dz\right]=-\frac{1}{2}\left[(2ML-\eta)^a+a\int_{0}^{\eta-2ML}(-z)^{a-1}dz\right]=$$

$$-\frac{1}{2}\left[(2ML-\eta)^a-a\int_{0}^{2ML-\eta}\tilde{z}^{a-1}d\tilde{z}\right]=-\frac{1}{2}\left[(2ML-\eta)^a-(2ML-\eta)^a\right]=0$$

Στην v_2^-

$$\sum_{m=0}^{M-1}(\eta-2mL-2L)^a-\sum_{m=0}^{M-1}(\eta-2mL-2L)^a=0$$

Επομένως η συνεισφορά στην u είναι

$(s-x)^a-(s-x-2NL)^a-(s-x)^a+(s-x-2NL)^a=0$
Ομοίως αποδεικνύεται και στις υπόλοιπες περιπτώσεις.
Το ίδιο μπορούμε να αποδείξουμε όταν $w(x,s)=(s+x)^a$.
Συνεπώς η w που ορίζεται από την (2.26) τελικά δεν συνεισφέρει στην u.
2) Ας υποθέσουμε ότι s-x=2NL
Εύκολα φαίνεται ότι είτε χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.30α) είτε την σχέση (2.30β) το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.
Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την u(x,s) από τις σχέσεις 2.29 χρησιμοποιώντας αντί των $\tilde{\varphi}_n$, $\tilde{\Psi}_n$, μ_n^+, ρ_n^+ τις $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\Psi}$, μ^+, ρ^+, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην περιττή επέκταση των φ, ψ και στον ορισμό των μ^+, ρ^+.
Συγκεκριμένα πρέπει $\tilde{\varphi}(0)=\varphi(0)$, $\tilde{\Psi}(0)=\Psi(0)$, $\mu^+(0)=0$, $\rho^+(0)=0$.

Εφαρμογή 2.15.
Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο μήκους L ισορροπεί στο διάστημα [0,L] ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων με τα άκρο x=L στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο.
Την στιγμή t=0 το άκρο x=0 αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση y=Asin(ωt) με αποτέλεσμα στο μέσο να διαδοθεί κύμα με ταχύτητα υ.
Έστω $k=\dfrac{\omega}{\upsilon}$ ο κυματικός αριθμός που αντιστοιχεί στην κυκλική συχνότητα ω.
I) Να βρεθεί η εξίσωση του παραγόμενου κύματος.
II) Να γίνει εφαρμογή για $L=(2a+1)\dfrac{\lambda}{4}$, a≥0 ακέραιος
III) Να γίνει εφαρμογή για $L=a\dfrac{\lambda}{2}$, a≥0 ακέραιος
IV) Να εξετασθεί κάτω από ποιες προϋποθέσεις η κίνηση ενός σημείου του μέσου είναι περιοδική και να βρεθεί η περίοδος της κίνησης.

Λύση
Το πλάτος Α είναι μια πολλαπλασιαστική σταθερά και μπορεί να θεωρηθεί ίσο με 1.
I)Στο πρόβλημα που εξετάζουμε ισχύει ότι:
$$\varphi(x)=0,\ \Psi(x)=\begin{cases}k, x=0\\ 0, x\neq 0\end{cases},\ \mu(s)=\sin(ks),\ \rho(s)=0$$
Ισχύει ότι
$\varphi(0)=0=\mu(0)$, $\varphi''(0)=0=\mu''(0)$, $\Psi(0)=k=\mu'(0)$
$\varphi(L)=0=\rho(0)$, $\varphi''(L)=0=\rho''(0)$, $\Psi(L)=0=\rho'(0)$
Άρα οι αρχικές συνθήκες είναι συμβιβαστές. Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (2.30) έχουμε:

Περίπτωση Α.1:
$(2N-1)L\leq s-x<2NL$,
$$u^+(x,s)=\sum_{m=0}^{N-1}\mu(s-x-2mL)=\sum_{m=0}^{N-1}\sin(ks-kx-2kmL) \quad (2.31\alpha)$$
$$u^+(x,s)=\frac{\sin(kNL)}{\sin(kL)}\sin\left[ks-kx-kNL+kL\right]$$

Περίπτωση Α.2:

$(2N)L \le s - x < (2N+1)L$

$$u^{+}(x,s) = \sum_{m=0}^{N} \mu(s - x - 2mL) = \sum_{m=0}^{N} \sin(ks - kx - 2kmL) \qquad (2.31\beta)$$

$$u^{+}(x,s) = \frac{\sin(kNL + kL)}{\sin(kL)} \sin\left[ks - kx - kNL\right]$$

Περίπτωση Β.1:

$(2N-1)L \le s + x < 2NL$

$$u^{-}(x,s) = -\sum_{m=0}^{N-2} \mu(s + x - 2mL - 2L) = -\sum_{m=0}^{N-2} \sin(ks + kx - 2kmL - 2kL) \qquad (2.31\gamma)$$

$$u^{-}(x,s) = -\frac{\sin(kNL - kL)}{\sin(kL)} \sin\left[ks + kx - kNL\right]$$

Περίπτωση Β.2:

$(2N)L \le s + x < (2N+1)L$

$$u^{-}(x,s) = -\sum_{m=0}^{N-1} \mu(s + x - 2mL - 2L) = -\sum_{m=0}^{N-1} \sin(ks + kx - 2kmL - 2kL) \qquad (2.31\delta)$$

$$u^{-}(x,s) = -\frac{\sin(kNL)}{\sin(kL)} \sin\left[ks + kx - kNL - kL\right]$$

Υπονοείται ότι στα παραπάνω αθροίσματα, αν το άνω όριο του αθροίσματος είναι αρνητικός τότε το αντίστοιχο άθροισμα είναι μηδέν. Συνεπώς πριν αντικαταστήσουμε στους τελικούς τύπους θα πρέπει να ελέγξουμε αν το πάνω όριο του αθροίσματος είναι αρνητικός ή όχι.

Η μέθοδος υπολογισμού των αθροισμάτων παρατίθεται στο παράρτημα ΙΙ.

Για να καταλάβουμε το φυσικό περιεχόμενο των σχέσεων (2.31) ας παρακολουθήσουμε την εξέλιξη του φαινομένου βήμα - βήμα.

1) Θεωρούμε χρονική στιγμή s με s≤L

- 1.α. Έστω x με x>s (ούτε το προσπίτον ούτε το ανακλώμενο κύμα έχουν φτάσει στο σημείο x).

  Άρα -L≤s-x<0. Αντικαθιστώντας στην (2.31α) με N=0 έχουμε ότι $u^{+}(x,s) = +\sum_{m=0}^{-1} \mu(s - x - 2mL) = 0$.

  Ισχύει ότι 0<s+x<2L

  - Αν 0<s+x<L, τότε από την (2.31δ) με N=0 έχουμε ότι $u^{-}(x,s) = -\sum_{m=0}^{-1} \mu(s + x - 2mL - 2L) = 0$.
  - Αν L<s+x<2L τότε από την (2.31γ) με N=1 έχουμε ότι $u^{-}(x,s) = -\sum_{m=0}^{-1} \mu(s + x - 2mL - 2L) = 0$.

Το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο διότι στο σημείο x δεν έχει φτάσει ούτε το προσπίπτον ούτε το ανακλώμενο κύμα.

- 1.β. Έστω x με x≤s (το προσπίπτον κύμα έχει φτάσει στο σημείο x αλλά όχι το ανακλώμενο).
  Άρα 0≤s-x<L. Αντικαθιστώντας στην (2.31β) με N=0 έχουμε ότι

$$u^{+}(x,s)=\sum_{m=0}^{0}\mu(s-x-2mL)=\mu(s-x)=\sin(ks-kx).$$

Για το s+x ισχύουν τα ίδια με την περίπτωση 1.α. Επομένως $u^{-}(x,s)=0$

2) Έστω s χρονική στιγμή με L≤s<2L.

Την στιγμή αυτή το ανακλώμενο κύμα έχει διαδοθεί κατά s-L.
Επομένως έχει φτάσει στο σημείο L-(s-L)=2L-s
Ισχύει ότι 0≤s-x<2L.

- Αν 0≤s-x<L, τότε από την (2.31β) με N=0 έχουμε ότι

$$u^{+}(x,s)=\sum_{m=0}^{0}\mu(s-x-2mL)=\mu(s-x)=\sin(ks-kx)$$

- Αν L≤s-x<2L, τότε από την (2.31α) με N=1 έχουμε ότι

$$u^{+}(x,s)=\sum_{m=0}^{0}\mu(s-x-2mL)=\sin(ks-kx)$$

- 2.α. Θεωρούμε τυχόν x με x<2L-s (στο σημείο αυτό έχει φτάσει το προσπίπτον αλλά όχι το ανακλώμενο).
  Ισχύει ότι L≤s+x<2L. Από την σχέση (2.31γ) με N=1 έχουμε ότι

$$u^{-}(x,s)=-\sum_{m=0}^{-1}\mu(s+x-2mL-2L)=0.$$

- 2.β. Θεωρούμε τυχόν x με x≥2L-s (στο σημείο αυτό έχει φτάσει και το προσπίπτον και το ανακλώμενο).
  Ισχύει ότι 2L≤s+x<3L. Από την σχέση (2.31δ) με N=1 έχουμε ότι

$$u^{-}(x,s)=-\sum_{m=0}^{0}\mu(s+x-2mL-2L)=-\mu(s+x-2L)\Rightarrow$$

$$u^{-}(x,s)=-\sin(ks+kx-2kL) \qquad (2.32)$$

Πράγματι:
Ειδικά για το σημείο x=L έχουμε ότι: $u^{+}(L,s)=\sin(ks-kL)$.

$$u^{-}(L,s)=-\sin(ks+kL-2kL)=-\sin(ks-kL)=-u^{+}(L,s).$$

Θεωρούμε το σημείο x=L σαν δευτερογενή πηγή κυμάτων.
Ένα σημείο με τετμημένη x>2L-s απέχει από το σημείο x=L απόσταση L-s.
Άρα το κύμα που οφείλεται στο ανακλώμενο κύμα θα έχει εξίσωση:

$$=-\sin\left(ks-k(L-x)-kL\right)=-\sin\left(ks-kL+kx-kL\right)=-\sin\left(ks+kx-2kL\right)$$

3) Έστω χρονική στιγμή s με 2L≤s<3L.

Ισχύει ότι 2L≤s+x<4L.

- Αν 2L≤s+x<3L, τότε από την (2.31δ) με N=1 έχουμε ότι:

$$u^{-}(x,s)=-\sum_{m=0}^{0}\mu(s+x-2mL-2L)=-\sin(ks+kx-2kL).$$

- Αν 3L≤s+x<4L, τότε από την (2.31γ) με N=2 έχουμε ότι:

$$u^{-}(x,s)=-\sum_{m=0}^{0}\mu(s+x-2mL-2L)=-\sin(ks+kx-2kL)$$

Ισχύει ότι L≤s-x<3L.

- 3α. Έστω ότι L≤s-x<2L. Από την (2.31α) με N=1 έχουμε: $u^{+}(x,s)=\sum_{m=0}^{0}\mu(s-x-2mL)=\sin(ks-kx)$

- 3β. 2L≤s-x<3L. Από την (2.31β) με N=1 έχουμε:

$$u^{+}(x,s)=\sum_{m=0}^{1}\mu(s-x-2mL)=\sin(ks-kx)+\sin(ks-kx-2kL) \tag{2.33}$$

Ο πρώτος όρος της (2.33) ήταν αναμενόμενος. Πως προκύπτει ο δεύτερος;
Το σημείο x=0 λόγω του ανακλώμενου κύματος έχει εξίσωση $-\sin(ks+0-2kL)$.
Φτάνοντας στο σημείο x=0 το ανακλώμενο κύμα υφίσταται μεταβολή φάσης κατά π.
Επομένως το σημείο x=0 λόγω της ανάκλασης του κύματος που προέρχεται από το σημείο x=L έχει εξίσωση $\sin(ks-2kL)$.
Συμπεριφερόμενο ως δευτερογενής πηγή δημιουργεί κύμα με εξίσωση $\sin(ks-kx-2kL)$.
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η εξίσωση κύματος που περιγράφεται από τις σχέσεις (2.31) αποτελείται από το αρχικό κύμα και τις διαδοχικές ανακλάσεις του στα δύο άκρα του μέσου.

Τις σχέσεις (2.32), (2.33) μπορούμε να τις αισθανθούμε ως φυσικοί με τον εξής τρόπο:

- Για την (2.32) : $\sin(ks+kx-2kL)=\sin\big(k(s-L)-k(L-x)\big)$.

  Ο όρος s-L υπάρχει διότι το κύμα αυτό άρχισε να παράγεται την στιγμή L.
  Ο όρος L-x υπάρχει διότι το σημείο αυτό απέχει L-x από την «πηγή».
- Για την (2.33): $\sin(ks-kx-2kL)=\sin\big(k(s-2L)-kx\big)$.

  Ο όρος s-2L υπάρχει διότι το κύμα αυτό άρχισε να παράγεται την στιγμή 2L.
  Ο όρος x υπάρχει διότι το σημείο αυτό απέχει x από την «πηγή».

Ας προσπαθήσουμε να προβλέψουμε την εξίσωση του κύματος για μια μεγάλη τιμή του s.
Έστω x σημείο του μέσου. Αριθμούμε τα κύματα που επιδρούν στο σημείο x αρχίζοντας την αρίθμηση από το 0 για το κύμα που οφείλεται στην πρωτογενή πηγή. Σημειώνουμε τις χρονικές στιγμές που φτάνουν τα κύματα στο σημείο αυτό.

Τάξη κύματος	Χρονική στιγμή έναρξης	Χρονική στιγμή άφιξης στο σημείο x
0	0	x
1	L	L+L-x
2	2L	2L+x
3	3L	3L+L-x
4	4L	4L+x
5	5L	5L+L-x

Θεωρούμε τυχαία χρονική στιγμή s με 4L≤s<5L.
Θεωρούμε x τέτοιο ώστε να έχει φτάσει το 4^o κύμα. Επομένως s≥4L+x.
Προφανώς 3L+L-x=4L-x<4L+x<s.
Άρα στο σημείο x έχει φτάσει το τρίτο κύμα.
Εικάζουμε ότι

$$u^{+}(x,s)=\sin(ks-kx)+\sin\big(k(s-2L)-kx\big)+\sin\big(k(s-4L)-kx\big)\Rightarrow$$

$$u^{+}(x,s)=\sin(ks-kx)+\sin\big(ks-kx-2kL\big)+\sin\big(ks-kx-4kL\big)$$

$$u^{-}(x,s)=-\sin\big(k(s-L)-k(L-x)\big)-\sin\big(k(s-3L)-k(L-x)\big)\Rightarrow$$

$$u^{-}(x,s) = -\sin\left(ks + kx - 2kL\right) - \sin\left(ks + kx - 4kL\right)$$

Πράγματι:

Ισχύει ότι 4L≤s-x<5L

Από την (2.31β) με N=2 έχουμε ότι

$$u^{+}(x,s) = \sum_{m=0}^{2} \mu(s - x - 2mL) = \sin(ks - kx) + \sin(ks - kx - 2kL) + \sin(ks - kx - 4kL)$$

4L≤s+x<6L

Αν 4L≤s+x<5L, τότε από την (2.31δ) με N=2 έχουμε:

$$u^{-}(x,s) = -\sum_{m=0}^{1} \mu(s + x - 2mL - 2L) = -\sin(ks + kx - 2kL) - \sin(ks + kx - 4kL)$$

Αν 5L≤s+x<6L, τότε από την (2.31γ) με N=3 έχουμε:

$$u^{-}(x,s) = -\sum_{m=0}^{1} \mu(s + x - 2mL - 2L) = -\sin(ks + kx - 2kL) - \sin(ks + kx - 4kL)$$

II) Έστω ότι $L = (2a+1)\dfrac{\lambda}{4} \Rightarrow 2kL = 2\dfrac{2\pi}{\lambda}(2a+1)\dfrac{\lambda}{4} \Rightarrow 2kL = (2a+1)\pi$

Θεωρούμε το άθροισμα

$$u^{+}(x,s) = \sum_{m=0}^{A} \sin(ks - kx - 2kmL) = \sum_{m=0}^{A} \sin(ks - kx - 2am\pi - m\pi) = \sum_{m=0}^{A} (-1)^{m} \sin(ks - kx)\ ,\ A \geq 0$$

Αν ο ακέραιος Α είναι άρτιος τότε το παραπάνω άθροισμα αρχίζει από + και καταλήγει σε + (Α+1 όροι).

Επομένως $u^{+}(x,s) = \sin(ks - kx)$

Αν ο ακέραιος Α είναι περιττός τότε το παραπάνω άθροισμα αρχίζει από + και καταλήγει σε -.

Επομένως $u^{+}(x,s) = 0$

$$u^{-}(x,s) = -\sum_{m=0}^{A} \sin(ks + kx - 2kmL - 2kL) = -\sum_{m=0}^{A} \sin(ks + kx - 2am\pi - m\pi - 2a\pi - \pi) \Rightarrow$$

$$u^{-}(x,s) = \sum_{m=0}^{A} \sin(ks + kx - m\pi) = \sum_{m=0}^{A} (-1)^{m} \sin(ks + kx)$$

Αν ο Α είναι άρτιος τότε $u^{-}(x,s) = \sin(ks + kx)$.

Αν ο Α είναι περιττός τότε $u^{-}(x,s) = 0$

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα

<u>*Περίπτωση Α.1:*</u> $(2N-1)L \leq s - x < 2NL$

$$u^{+}(x,s) = \sum_{m=0}^{N-1} \sin(ks - kx - 2kmL)$$

$$u^{+}(x,s) = \begin{cases} \sin(ks - kx) & \text{αν } N-1 \geq 0 \ \text{ άρτιος} \\ 0 & \text{αν N-1<0 } \ \text{ άρτιος} \\ 0 & \text{αν N-1 περιττός} \end{cases}$$

<u>*Περίπτωση Α.2:*</u> $(2N)L \leq s - x < (2N+1)L$

$$u^{+}(x,s)=\sum_{m=0}^{N}\sin(ks-kx-2kmL)$$

$$u^{+}(x,s)=\begin{cases}\sin(ks-kx) & \text{αν } N\geq 0 \text{ άρτιος}\\ 0 & \text{αν } N<0 \text{ άρτιος}\\ 0 & \text{αν } N \text{ περιττός}\end{cases}$$

Περίπτωση Β.1: $(2N-1)L\leq s+x<2NL$

$$u^{-}(x,s)=-\sum_{m=0}^{N-2}\sin(ks+kx-2kmL-2kL)$$

$$u^{-}(x,s)=\begin{cases}\sin(ks+kx) & \text{αν } N-2\geq 0 \text{ άρτιος}\\ 0 & \text{αν } N-2<0 \text{ άρτιος}\\ 0 & \text{αν N-2 περιττός}\end{cases}$$

Περίπτωση Β.2: $(2N)L\leq s+x<(2N+1)L$

$$u^{-}(x,s)=-\sum_{m=0}^{N-1}\sin(ks+kx-2kmL-2kL)$$

$$u^{-}(x,s)=\begin{cases}\sin(ks+kx) & \text{αν } N-1\geq 0 \text{ άρτιος}\\ 0 & \text{αν } N-1<0 \text{ άρτιος}\\ 0 & \text{αν N-1 περιττός}\end{cases}$$

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι συναρτήσεις $u^{\pm}(x,s)$ έχουν χρονική περίοδο 4L.
Ισχύει δηλαδή ότι $u^{\pm}(x,s+4L)=u^{\pm}(x,s)$, s≥4L
III)
Όταν $L=a\dfrac{\lambda}{2}\Leftrightarrow 2kL=2a\pi$.
Έστω ότι $(2N-1)L\leq s-x<2NL$ τότε

$$u^{+}(x,s)=\sum_{m=0}^{N-1}\sin(ks-kx-2kmL)=\sum_{m=0}^{N-1}\sin(ks-kx-2am\pi)=\sum_{m=0}^{N-1}\sin(ks-kx)=N\sin(ks-kx).$$

Από σχέσεις (2.31), έχουμε για τις διάφορες περιπτώσεις:

Περίπτωση Α.1:
$(2N-1)L\leq s-x<2NL$,
$u^{+}(x,s)=N\sin(ks-kx)$
Περίπτωση Α.2:
$(2N)L\leq s-x<(2N+1)L$
$u^{+}(x,s)=(N+1)\sin(ks-kx)$
Περίπτωση Β.1:
$(2N-1)L\leq s+x<2NL$
$u^{-}(x,s)=-(N-1)\sin(ks+kx)$
Περίπτωση Β.2:
$(2N)L\leq s+x<(2N+1)L$

$u^{-}(x,s) = -N\sin(ks+kx)$

Αυτό σημαίνει ότι καθώς περνάει ο χρόνος το πλάτος της ταλάντωσης συνεχώς αυξάνεται!

III) Το τελευταίο ερώτημα αφορά στην περιοδικότητα της κίνησης ενός δεδομένου σημείου.

Για να είναι περιοδική η κίνηση ενός δοθέντος σημείου θα πρέπει να υπάρχουν p και q ακέραιοι τέτοιοι ώστε $kpL = q\pi$

Πράγματι στην περίπτωση αυτή έστω x δοθέν σημείο του μέσου και s χρονική στιγμή τέτοια ώστε $(2N-1)L \le s-x < 2NL$. Συνεπώς,

$$u^{+}(x,s) = \frac{\sin(kNL)}{\sin(kL)}\sin\left[ks-kx-kNL+kL\right]$$

Θεωρούμε την χρονική στιγμή $s' = s+2pL$

Ισχύει ότι $(2N-1)L \le s-x < 2NL \Rightarrow \left(2(N+p)-1\right)L \le s-x+2pL < 2(N+p)L \Rightarrow$

$\left(2(N+p)-1\right)L \le s'-x < 2(N+p)L$

Άρα N΄=N+p.

$$u^{+}(x,s') = \frac{\sin(kNL+kpL)}{\sin(kL)}\sin\left[ks-kx-kNL+kL-kpL\right] \Rightarrow$$

$$u^{+}(x,s') = \frac{\sin(kNL+q\pi)}{\sin(kL)}\sin\left[ks-kx-kNL+kL-q\pi\right] = u^{+}(x,s) \Rightarrow$$

$u^{+}(x,s+2n_0L) = u^{+}(x,s)$

Η συνθήκη $kpL = q\pi$ είναι ισοδύναμη με την :

$$kpL = q\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}pL = q\pi \Leftrightarrow L = \frac{q}{2p}\lambda$$

Η χρονική περίοδος της κίνησης ενός σημείου είναι

$$\frac{2pL}{\upsilon} = \frac{2pL}{\lambda}T = \frac{2p}{\lambda}T\frac{q}{2p}\lambda = qT$$

Όπου T η περίοδος ταλάντωσης της πηγής.

Στην περίπτωση του ερωτήματος II ισχύει ότι $L = \frac{2a+1}{4}\lambda$. Άρα q=2a+1 και p=2.

Άρα η περίοδος με όρους s=υt είναι $2pL = 4L$ και με όρους t είναι (2a+1)T.

Εφαρμογή 2.16.

Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο μήκους L ισορροπεί στο διάστημα [0,L] ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων με τα άκρο x=L στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο.

Έστω a≥0 ακέραιος.

Θέτουμε $k = (2a+1)\frac{\pi}{2L}$.

Συγκρατούμε ακίνητα τα σημεία του μέσου επί της καμπύλης με εξίσωση $y = A\cos(kx)$.

Την στιγμή t=0 αφήνουμε το μέσο ελεύθερο να κινηθεί και αρχίζουμε να ταλαντώνουμε το άκρο x=0 σύμφωνα με την εξίσωση y=Acos(ωt).

Αν ω=kυ, όπου υ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος, να βρεθεί η εξίσωση του παραγόμενου κύματος.

Λύση

I)Στο πρόβλημα που εξετάζουμε ισχύει ότι:

$\varphi(x) = A\cos(kx)$, $\Psi(x)=0$, $\mu(s) = A\cos(ks)$, $\rho(s) = 0$

Ισχύει ότι

$\varphi(0) = A = \mu(0)$, $\varphi''(0) = -k^2 A = \mu''(0)$, $\Psi(0) = 0 = \mu'(0)$

$\varphi(L) = A\cos(kL) = A\cos(a\pi + \frac{\pi}{2}) = 0 = \rho(0)$, $\varphi''(L) = 0 = \rho''(0)$, $\Psi(L) = 0 = \rho'(0)$

Άρα οι αρχικές συνθήκες είναι συμβιβαστές.

Ισχύει ότι $2kL = (2a+1)\pi$

Εφαρμόζουμε τις σχέσεις (2.30)

Περίπτωση A.1: $(2N-1)L \le s - x < 2NL$,

$$u^+(x,s) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x - s + 2NL) + \int_{x-s+2NL}^{0} \Psi(z)dz\right] + \sum_{m=0}^{N-1}\mu(s - x - 2mL) - \sum_{m=0}^{N-1}\rho(s - x - 2mL - L) \Rightarrow$$

$$u^+(x,s) = \frac{1}{2}\left[A\cos(kx - ks + 2kNL)\right] + \sum_{m=0}^{N-1} A\cos(ks - kx - 2mkL) =$$

$$\frac{1}{2}\left[A\cos(kx - ks + N\pi)\right] + \sum_{m=0}^{N-1} A\cos(ks - kx - m\pi) = \frac{1}{2}\left[A\cos(kx - ks + N\pi)\right] + \sum_{m=0}^{N-1}(-1)^m A\cos(ks - kx - m\pi)$$

- Αν N άρτιος, τότε $A\cos(kx - ks + N\pi) = A\cos(kx - ks)$ και $\sum_{m=0}^{N-1}(-1)^m A\cos(ks - kx - m\pi) = 0$
- Αν N περιττός τότε $A\cos(kx - ks + N\pi) = -A\cos(kx - ks)$ και $\sum_{m=0}^{N-1}(-1)^m A\cos(ks - kx - m\pi) = A\cos(ks - kx)$.

Σε κάθε περίπτωση $u^+(x,s) = \frac{A}{2}\cos(kx - ks)$

Περίπτωση A.2: $(2N)L \le s - x < (2N+1)L$

$$u^+(x,s) = \frac{1}{2}\left[-\varphi(s - x - 2NL) + \int_{s-x-2NL}^{0} \Psi(z)dz\right] + \sum_{m=0}^{N}\mu(s - x - 2mL) - \sum_{m=0}^{N-1}\rho(s - x - 2mL - L) \Rightarrow$$

$$u^+(x,s) = \frac{1}{2}\left[-A\cos(ks - kx - 2NkL)\right] + \sum_{m=0}^{N} A\cos(ks - kx - 2mkL) =$$

$$u^+(x,s) = \frac{1}{2}\left[-A\cos(ks - kx - N\pi)\right] + \sum_{m=0}^{N}(-1)^m A\cos(ks - kx) =$$

- Αν N άρτιος τότε $\cos(ks - kx - N\pi) = \cos(ks - kx)$ και $\sum_{m=0}^{N}(-1)^m \cos(ks - kx) = \cos(ks - kx)$
- Αν N περιττός τότε $\cos(ks - kx - N\pi) = -\cos(ks - kx)$ και $\sum_{m=0}^{N}(-1)^m \cos(ks - kx) = 0$

Σε κάθε περίπτωση $u^+(x,s) = \frac{A}{2}\cos(kx - ks)$

Περίπτωση B.1: $(2N-1)L \le s + x < 2NL$

$$u^-(x,s) = \frac{1}{2}\left[-\varphi(2NL - s - x) + \int_{0}^{2NL-s-x} \Psi_n(z)dz\right] - \sum_{m=0}^{N-2}\mu(s + x - 2mL - 2L) + \sum_{m=0}^{N-1}\rho(s + x - 2mL - L) \Rightarrow$$

$$u^{-}(x,s)=\frac{1}{2}\left[-A\cos(N\pi-ks-kx)\right]-\sum_{m=0}^{N-2}A\cos(ks+kx-m\pi-\pi)\Rightarrow$$

$$u^{-}(x,s)=\frac{1}{2}\left[-A\cos(N\pi-ks-kx)\right]+\sum_{m=0}^{N-2}(-1)^{m}A\cos(ks+kx)$$

- Αν N άρτιος τότε $\cos(N\pi-ks-kx)=\cos(ks+kx)$ και $\sum_{m=0}^{N-2}(-1)^{m}A\cos(ks+kx)=A\cos(ks+kx)$
- Αν N περιττός τότε $\cos(N\pi-ks-kx)=-\cos(ks+kx)$ και $\sum_{m=0}^{N-2}(-1)^{m}A\cos(ks+kx)=0$

Σε κάθε περίπτωση $u^{+}(x,s)=\frac{A}{2}\cos(kx+ks)$

<u>Περίπτωση Β.2:</u> $(2N)L\le s+x<(2N+1)L$

$$u^{-}(x,s)=\frac{1}{2}\left[\varphi_{n}(s+x-2NL)+\int_{0}^{s+x-2NL}\Psi(z)dz\right]-\sum_{m=0}^{N-1}\mu(s+x-2mL-2L)+\sum_{m=0}^{N-1}\rho(s+x-2mL-L)\Rightarrow$$

$$u^{-}(x,s)=\frac{1}{2}\left[A\cos(ks+kx-N\pi)\right]-\sum_{m=0}^{N-1}A\cos(ks+kx-m\pi-\pi)\Rightarrow$$

$$u^{-}(x,s)=\frac{1}{2}\left[A\cos(ks+kx-N\pi)\right]+\sum_{m=0}^{N-1}(-1)^{m}A\cos(ks+kx)$$

- Αν N άρτιος τότε $\cos(ks+kx-N\pi)=\cos(ks+kx)$ και $\sum_{m=0}^{N-1}(-1)^{m}A\cos(ks+kx)=0$
- Αν N περιττός τότε $\cos(ks+kx-N\pi)=-\cos(ks+kx)$ και $\sum_{m=0}^{N-1}(-1)^{m}A\cos(ks+kx)=A\cos(ks+kx)$

Σε κάθε περίπτωση $u^{+}(x,s)=\frac{A}{2}\cos(kx+ks)$

Άρα $u(x,s)=u^{+}(x,s)+u^{-}(x,s)=\frac{A}{2}\cos(kx-ks)+\frac{A}{2}\cos(kx+ks)$ (2.34)

<u>Παρατηρήσεις</u>

1)Μπορούμε να καταλήξουμε απλούστερα στην (2.34) ως εξής:
Θεωρούμε την συνάρτηση u, η οποία δίνεται από την (2.34)
Ισχύει ότι:

$$u(x,s)=\frac{A}{2}\cos(kx-ks)+\frac{A}{2}\cos(kx+ks)$$

$$u_{s}(x,s)=-k\frac{A}{2}\sin(kx-ks)+k\frac{A}{2}\sin(kx+ks)$$

$$u(x,0)=\frac{A}{2}\cos(kx)+\frac{A}{2}\cos(kx)=\varphi(x)$$

$$u_{s}(x,0)=-k\frac{A}{2}\sin(kx)+k\frac{A}{2}\sin(kx)=0=\Psi(x)$$

$$u(0,s)=\frac{A}{2}\cos(ks)+\frac{A}{2}\cos(ks)=\mu(s)$$

$$u(L,s)=\frac{A}{2}\cos(kL-ks)+\frac{A}{2}\cos(kL+ks)=A\cos(kL)\cos(ks)=0=\rho(s)$$

2) Έστω ένα στάσιμο κύμα με εξίσωση

$$u(x,s)=2A\cos(kx)\sin(ks)$$

$$u_s(x,s)=2Ak\cos(kx)\cos(ks)$$

$$\varphi(x)=u(x,0)=2A\cos(kx)\sin(0)=0$$

$$\Psi(x)=u_s(x,0)=2Ak\cos(kx)$$

$$\mu(s)=u(0,s)=2A\sin(ks)$$

$$\rho(s)=u(L,s)=2A\cos(kL)\sin(ks)=0$$

Συνεπώς την στιγμή t=0 τα σημεία του μέσου βρίσκονται στην θέση ισορροπίας και έχουν μια κατανομή ταχυτήτων που δίνεται από την σχέση $2Ak\cos(kx)$. Το δε ελεύθερο άκρο του μέσου ταλαντώνεται με εξίσωση y=2Asin(ks).

Πρόβλημα 2.17.

Να βρεθεί λύση της κυματικής εξίσωσης στο τόπο $\{(x,t)\text{: } x\geq 0,\ t\in\mathbb{R}\}$ τέτοια ώστε

$u(x,0)=\varphi(x)$, $u_s(x,0)=\Psi(x)$, $u_x(0,s)=0$.

<u>Λύση</u>

Για να είναι συμβιβαστές οι αρχικές συνθήκες πρέπει

$$u_x(0,0)=\varphi'(0)\Rightarrow\varphi'(0)=0\,,\ u_{sx}(0,0)=u_{xs}(0,0)\Rightarrow\Psi'(0)=0 \tag{2.35}$$

Όπως και στο πρόβλημα 2.1

$$u(x,s)=F(x-s)+G(x+s)$$

όπου

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)-\int_0^x\Psi(z)dz\right]\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi'(x)-\Psi(x)\right] \tag{2.36α}$$

$$G(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)+\int_0^x\Psi(z)dz\right]\Rightarrow G'(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi'(x)+\Psi(x)\right] \tag{2.36β}$$

Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν για x≥0. Όμως το πεδίο ορισμού των F, G είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Κάνοντας χρήση των υπόλοιπων συνοριακών συνθηκών θα επεκτείνουμε τις F, G σε όλο το $\mathbb{R}$.

Πρέπει $u_x(0,s)=0$. Άρα

$$F'(-s)+G'(s)=0\,,\ s\in\mathbb{R} \tag{2.37}$$

Έστω x≥0. Από την σχέση (2.37) με s=x έχουμε:

$$F'(-x)+G'(x)=0\Rightarrow F'(-x)=-G'(x)\Rightarrow F'(-x)=\frac{1}{2}\left[-\varphi'(x)-\Psi(x)\right] \tag{2.38α}$$

Από την σχέση (2.37) με s=-x έχουμε

$$F'(x)+G'(-x)=0\Rightarrow G'(-x)=-F'(x)\Rightarrow G'(-x)=\frac{1}{2}\left[-\varphi'(x)+\Psi(x)\right] \tag{2.38β}$$

Έστω $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ οι άρτιες επεκτάσεις των φ, ψ στο $\mathbb{R}$.

Άρα οι $\tilde{\varphi}'$, $\tilde{\psi}'$ είναι οι περιττές επεκτάσεις των φ΄, ψ΄.

Οι σχέσεις (2.38) γίνονται

$$F'(-x)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}'(-x)-\tilde{\Psi}(-x)\right]$$

$$G'(-x)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}'(-x)+\tilde{\Psi}(-x)\right]$$

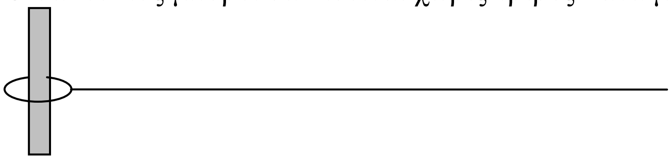
Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}'(x)-\tilde{\Psi}(x)\right]\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x)-\int_0^x\tilde{\Psi}(z)dz\right] \tag{2.39α}$$

$$G'(x)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}'(x)+\tilde{\Psi}(x)\right]\Rightarrow G(x)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x)+\int_0^x\tilde{\Psi}(z)dz\right] \tag{2.39β}$$

Εφαρμογή 2.18.

Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο ισορροπεί κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Οx ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Κατά μήκος του άξονα Oy υπάρχει ακλόνητο στήριγμα, στο οποίο είναι προσδεδεμένο, μέσω αβαρούς δακτυλίου, το άκρο του μέσου που βρίσκεται στην θέση x=0, όπως στο σχήμα.
Ο δακτύλιος μπορεί να κινείται χωρίς τριβές κατά μήκος του στηρίγματος



Απομακρύνουμε τα σημεία του μέσου έτσι ώστε να βρεθούν επί της καμπύλης $y=Ae^{-kx^2}$, k>0 και την στιγμή t=0 αφήνουμε το μέσο ελεύθερο να κινηθεί. Να βρεθεί η εξίσωση του παραγόμενου κύματος.

<u>Λύση</u>

Στο δακτύλιο ασκούνται η δύναμη από το στήριγμα και η δύναμη από το νήμα. Επειδή η κίνηση του δακτυλίου γίνεται χωρίς τριβές, η δύναμη από το στήριγμα έχει την διεύθυνση του άξονα x.
Επειδή ο δακτύλιος είναι αβαρής η συνολική δύναμη στον y άξονα είναι μηδέν. Άρα η δύναμη από το νήμα έχει την διεύθυνση του x άξονα. Συνεπώς $\left(\frac{\partial u(x,s)}{\partial x}\right)_{x=0}=0\Rightarrow u_x(0,s)=0$.

Στο πρόβλημα που εξετάζουμε $\varphi(x)=Ae^{-kx^2}$ και Ψ(x)=0.
Ισχύει ότι $\varphi'(0)=0$ και $\Psi'(0)=0$. Επομένως, οι αρχικές συνθήκες είναι συμβιβαστές.
Εφαρμόζουμε τις σχέσεις (2.39)

$$F(x)=G(x)=\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x)$$

Επομένως

$$u(x,s)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-s)+\tilde{\varphi}(x+s)\right]$$

Επειδή x+s≥0 ισχύει ότι $\tilde{\varphi}(x+s)=\varphi(x+s)=Ae^{-kx^2}$

Περίπτωση 1

x-s≥0 τότε $\tilde{\varphi}(x-s)=\varphi(x-s)=Ae^{-k(x-s)^2}$

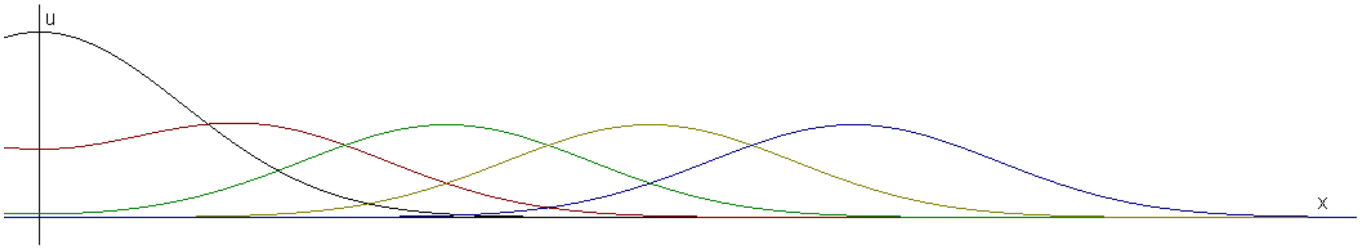
Περίπτωση 2

x-s<0 τότε $\tilde{\varphi}(x-s)=\varphi(s-x)=Ae^{-k(x-s)^2}$

Άρα

$$u(x,s)=\frac{A}{2}\left[e^{-k(x-s)^2}+e^{-k(x+s)^2}\right]$$

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνονται στιγμιότυπα του κύματος για διάφορες χρονικές στιγμές



Πρόβλημα 2.19.

Να βρεθεί λύση της κυματικής εξίσωσης στο τόπο $\{(x,t)\colon 0\le x\le L,\ t\in\mathbb{R}\}$ τέτοια ώστε

$u(x,0)=\varphi(x)$, $u_s(x,0)=\Psi(x)$, $u_x(0,s)=0$, $u(L,s)=0$.

<u>Λύση</u>

Για να είναι συμβιβαστές οι αρχικές συνθήκες πρέπει

$u(L,0)=\varphi(L)\Rightarrow\varphi(L)=0$, $u_x(0,0)=\varphi'(0)\Rightarrow\varphi'(0)=0$,

$$u_{sx}(0,0)=u_{xs}(0,0)\Rightarrow\Psi'(0)=0\quad u_s(L,0)=0\Rightarrow\Psi(L)=0 \tag{2.40}$$

Όπως και στο πρόβλημα 2.18

$$u(x,s)=F(x-s)+G(x+s)$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x)-\int_0^x\tilde{\Psi}(z)dz\right] \tag{2.41α}$$

$$G(x)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x)+\int_0^x\tilde{\Psi}(z)dz\right] \tag{2.41β}$$

και $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ οι άρτιες επεκτάσεις των φ, ψ στο διάστημα [-L,L].

Η τελευταία συνοριακή συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι F, G είναι:

$$u(L,s)=0\Rightarrow F(L-s)+G(L+s)=0 \tag{2.42α}$$

Επειδή η (2.42α) πρέπει να ισχύει για κάθε $s\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι:

$$F(L+s)+G(L-s)=0 \tag{2.42β}$$

Θεωρούμε τυχόν $x\in[L,3L]$. Συνεπώς υπάρχει $s\in[0,2L]$ τέτοιο ώστε x=L+s.

Επειδή $L-s\in[-L,L]$ η τιμή F(L-s) δίνεται από την σχέση (2.39α).

$$G(L+s)=-F(L-s)=\frac{1}{2}\left[-\tilde{\varphi}(L-s)+\int_0^{L-s}\tilde{\Psi}(z)dz\right] \tag{2.43α}$$

ομοίως από την (2.42β) έχουμε ότι:

$$F(L+s)=-G(L-s)=\frac{1}{2}\left[-\tilde{\varphi}(L-s)-\int_0^{L-s}\tilde{\Psi}(z)dz\right] \tag{2.43β}$$

Έστω $\hat{\varphi}$, $\hat{\Psi}$ οι περιττές επεκτάσεις των $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$, ως προς το σημείο x=L, στο διάστημα [L,3L].

$\hat{\varphi}$, $\hat{\Psi}$: $[-L,3L]\to\mathbb{R}$ με

$\hat{\varphi}(L+x)=-\hat{\varphi}(L-x)$, $\hat{\Psi}(L+x)=-\hat{\Psi}(L-x)$.

Συνεπώς $\int_{L-x}^{L+x} \widehat{\Psi}(z)dz = 0$

Η σχέση (2.43α) γίνεται:

$$G(L+s) = \frac{1}{2}\left[-\widehat{\varphi}(L-s) + \int_0^{L-s} \widehat{\Psi}(z)dz \right] = \frac{1}{2}\left[\widehat{\varphi}(L+s) + \int_0^{L-s} \widehat{\Psi}(z)dz + \int_{L-s}^{L+s} \widehat{\Psi}(z)dz \right] \Rightarrow$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left[\widehat{\varphi}(x) + \int_0^x \widehat{\Psi}(z)dz \right]$$

$$F(L+s) = \frac{1}{2}\left[\widehat{\varphi}(L+s) - \int_0^{L-s} \widehat{\Psi}(z)dz - \int_{L-s}^{L+s} \widehat{\Psi}(z)dz \right] = \frac{1}{2}\left[\widehat{\varphi}(L+s) - \int_0^{L+s} \widehat{\Psi}(z)dz \right]$$

Έστω τώρα $\overline{\varphi}$, $\overline{\Psi}$ οι περιοδικές επεκτάσεις των $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\Psi}$ με περίοδο 4L.

Δεν είναι δύσκολο να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

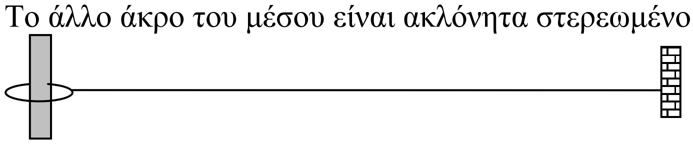
$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\overline{\varphi}(x) - \int_0^x \overline{\Psi}(z)dz \right] \tag{2.44α}$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left[\overline{\varphi}(x) + \int_0^x \overline{\Psi}(z)dz \right] \tag{2.44β}$$

Εφαρμογή 2.20.

Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο ισορροπεί κατά μήκος του διαστήματος [0,L] του άξονα x΄x ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Κατά μήκος του άξονα Oy υπάρχει ακλόνητο στήριγμα, στο οποίο είναι προσδεδεμένο, μέσω αβαρούς δακτυλίου, το άκρο του μέσου που βρίσκεται στην θέση x=0, όπως στο σχήμα. Ο δακτύλιος μπορεί να κινείται χωρίς τριβές κατά μήκος του στηρίγματος.

Το άλλο άκρο του μέσου είναι ακλόνητα στερεωμένο.



Απομακρύνουμε τα σημεία του μέσου έτσι ώστε να βρεθούν επί της καμπύλης y=φ(x), και την στιγμή t=0 αφήνουμε το μέσο ελεύθερο να κινηθεί.

1) Αν φ(L)=0 και $\varphi'(0) = 0$ να βρεθεί η εξίσωση της κίνησης των σημείων του μέσου συναρτήσει του χρόνου.
2) Να γίνει εφαρμογή όταν $\varphi(x) = A\cos(kx)$

<u>Λύση</u>

1) Σύμφωνα με τις σχέση (2.44) ισχύει ότι $u=u^+ + u^-$ όπου

$$u^+(x,s) = \frac{1}{2}\left[\overline{\varphi}(x-s) - \int_0^{x-s} \overline{\Psi}(z)dz \right] = \frac{1}{2}\overline{\varphi}(x-s) \text{ και } u^-(x,s) = \frac{1}{2}\left[\overline{\varphi}(x+s) + \int_0^{x+s} \overline{\Psi}(z)dz \right] = \frac{1}{2}\overline{\varphi}(x+s)$$

Από τον τρόπο ορισμού των $\overline{\varphi}$, $\overline{\Psi}$ θα πρέπει να μελετήσουμε κάθε μια από τις u^+, u^- σε τέσσερις ομάδες διαστημάτων.

Για την u^+ θέτουμε ξ=x-s.

<u>Περίπτωση 1:</u> $\xi \in [4NL-L, 4NL)$

$\xi = 4NL - y$ με $y \in (0, L]$

$\overline{\varphi}(\xi) = \overline{\varphi}(4NL - y) = \overline{\varphi}(-y) = \overline{\varphi}(y) = \varphi(y) = \varphi(4NL - \xi)$

Περίπτωση 2: $\xi \in [4NL, 4NL+L)$
$\xi = 4NL + y$ με $y \in [0, L)$
$\overline{\varphi}(\xi) = \overline{\varphi}(4NL + y) = \overline{\varphi}(y) = \varphi(y) = \varphi(\xi - 4NL)$

Περίπτωση 3: $\xi \in [4NL+L, 4NL+2L)$
$\xi = 4NL + L + y$ με $y \in [0, L) \Rightarrow L - y \in (0, L]$
$\overline{\varphi}(\xi) = \overline{\varphi}(4NL + L + y) = \overline{\varphi}(L + y) = -\overline{\varphi}(L - y) = -\varphi(4NL + 2L - \xi)$

Περίπτωση 4: $\xi \in [4NL+2L, 4NL+3L)$
$\xi = 4NL + L + y$ με $y \in [L, 2L) \Rightarrow L - y \in (-L, 0]$
$\overline{\varphi}(\xi) = \overline{\varphi}(4NL + L + y) = \overline{\varphi}(L + y) = -\overline{\varphi}(L - y) = -\overline{\varphi}(y - L) = -\varphi(y - L) = -\varphi(\xi - 4NL - 2L)$
Οι ίδιες ακριβώς περιπτώσεις με τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν για την u^-.
Επομένως, για την u πρέπει να διακρίνουμε 16 περιπτώσεις.
2) Έστω ότι $\varphi(x) = A\cos(kx)$
Η συνθήκη $\varphi'(0) = 0$ ικανοποιείται για κάθε k.

Από την συνθήκη $\varphi(L) = 0$ προκύπτει ότι $\cos(kL) = 0 \Rightarrow kL = (2a+1)\dfrac{\pi}{2}$, a ακέραιος.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\varphi(x+L) = -\varphi(x-L)$, $\varphi(x+4L) = \varphi(x)$.
Συνεπώς $\overline{\varphi} = \varphi$.
Από τις σχέσεις (2.44) έχουμε:

$$u(x,s) = \frac{1}{2}\left[\overline{\varphi}(x-s) + \overline{\varphi}(x+s)\right] = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-s) + \varphi(x+s)\right] = \frac{A}{2}\left[\cos(kx - ks) + \cos(kx + ks)\right] \Rightarrow$$

$$u(x,s) = u = A\cos(kx)\cos(ks) = A\cos(kx)\cos(\omega t).$$

Εφαρμογή 2.21.
Ένα γραμμικό ελαστικό μέσο μεγάλου μήκους εκτείνεται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα ενός συστήματος συντεταγμένων.
Τα σημεία του μέσου συγκρατούνται επί της καμπύλης

$$y = \begin{cases} A\cos(kx) & x \le \lambda/4 \\ 0 & x > \lambda/4 \end{cases}$$

Την χρονική στιγμή t=0 αφήνουμε το μέσο ελεύθερο να κινηθεί και ταυτόχρονα το άκρο O του σχοινιού αρχίζει να ταλαντώνεται με εξίσωση $y = A\eta\mu(\omega t)$ όπου $\omega = k\upsilon$. Να βρεθεί η εξίσωση του παραγόμενου κύματος.
Λύση

Ισχύει ότι $\varphi(x) = \begin{cases} A\cos(kx) & x \le \lambda/4 \\ 0 & x > \lambda/4 \end{cases}$, $\Psi(x) = 0$ και $\mu(s) = A\cos(ks)$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι αρχικές συνθήκες είναι συμβιβαστές.
Σύμφωνα με το πρόβλημα 2.7 η λύση της εξίσωσης είναι:

$$u(x,s) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-s) + \tilde{\varphi}(x+s)\right] + \mu^+(s-x) + \mu^-(s+x)$$

Επειδή $s + x \ge 0 \Rightarrow \mu^-(s+x) = 0$

Περίπτωση Α : Θεωρούμε χρονική στιγμή t με $t > T/4 \Rightarrow s > \lambda/4$.
Τότε $s + x > \lambda/4 \Rightarrow \tilde{\varphi}(x+s) = 0$. Επομένως

$u(x,s) = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x-s) + \mu^{+}(s-x)$

<u>*Περίπτωση Α.1*</u>: $x \in [0, s-\frac{\lambda}{4})$

Στην περίπτωση αυτή x-s<-λ/4.. Άρα x-s<0 και s-x>λ/4. Επομένως, $\tilde{\varphi}(x-s) = -\varphi(s-x) = 0$

$u(x,s) = \mu^{+}(s-x) = A\cos(ks-kx)$

<u>*Περίπτωση Α.2*</u>: $x \in [s-\frac{\lambda}{4}, s)$

Ισχύει ότι $-\lambda/4 \le x-s < 0 \Rightarrow 0 < s-x \le \lambda/4$.

Επομένως $\tilde{\varphi}(x-s) = -\varphi(s-x) = -A\cos(ks-kx)$

$u(x,s) = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x-s) + \mu^{+}(s-x) = \frac{A}{2}\cos(ks-kx)$

<u>*Περίπτωση Α.3*</u>: $x \in [s, s+\frac{\lambda}{4})$

Ισχύει ότι $0 \le x-s < \lambda/4 \Rightarrow s-x \le 0 \Rightarrow \mu^{+}(s-x) = 0$.

$\tilde{\varphi}(x-s) = \varphi(x-s) = A\cos(kx-ks) = A\cos(ks-kx)$

$u(x,s) = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x-s) + \mu^{+}(s-x) = \frac{A}{2}\cos(ks-kx)$

<u>*Περίπτωση Α.4*</u>: $x \in [s+\frac{\lambda}{4}, +\infty)$

Ισχύει ότι $x-s \ge \lambda/4 \Rightarrow \tilde{\varphi}(x-s) = \varphi(x-s) = 0$.

$s-x < 0 \Rightarrow \mu^{+}(s-x) = 0$.

Επομένως $u(x,s) = 0$.

Περίπτωση Β : Θεωρούμε χρονική στιγμή t με t<T/4⇒s<λ/4.

Στην περίπτωση αυτή ενδέχεται να συνεισφέρει και ο όρος $\tilde{\varphi}(x+s)$.

Ως παράδειγμα για $x < \frac{\lambda}{4} - s \Rightarrow x+s < \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \tilde{\varphi}(x+s) = A\cos(kx+ks)$.

Οι περιπτώσεις που πρέπει κάποιος να εξετάσει είναι αρκετές και παραλείπονται.

Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι για χρονικές στιγμές t<T/4 υπάρχει συνεισφορά και από ένα κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά.

Η περίπτωση Β δεν έχει πρακτικό ενδιαφέρον αφού αναφερόμαστε σε χρονικές στιγμές λίγο μετά την έναρξη της διάδοσης του κύματος.

Πρακτικό ενδιαφέρον παρουσιάζει μόνο η περίπτωση Α.

Όπως φαίνεται από την περίπτωση Α κύμα υπάρχει για σημεία x με x<s+λ/4.

Στο διάστημα $x \in [s-\frac{\lambda}{4}, s+\frac{\lambda}{4}]$ η εξίσωση του κύματος είναι $u(x,s) = \frac{A}{2}\cos(ks-kx)$ και όχι $u(x,s) = A\cos(ks-kx)$.

Για σημεία x με x<s-λ/4 η εξίσωση είναι $u(x,s) = A\cos(ks-kx)$.

Προφανώς πρακτικό ενδιαφέρον έχουν τα σημεία αυτά.

Για έναν τεχνικό η εξίσωση του κύματος είναι $u(x,s) = A\cos(ks-kx)$.

Επίλυση της κυματικής εξίσωσης και εφαρμογές
Δρ. Κορφιάτης Ε.
Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου
korfiatis@sch.gr

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι
Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΡΟΕΞΟΧΗΣ

Θεώρημα
Έστω α, β, γ, δ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\gamma<\alpha,\beta<\delta$.
Υπάρχει $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

i) $0\le h(\chi)\le 1\ \forall x\in\mathbb{R}$
ii) $h(x)=1$ όταν $x\in[\alpha,\beta]$ και $h(x)=0$ όταν $x\notin[\gamma,\delta]$.
iii) Η h έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης.

Λήμμα 1
Ισχύει ότι $x-\sin x>0\ \forall\ x>0$
<u>Απόδειξη</u>
Όταν $x>1$ τότε η αποδεικτέα είναι προφανής.
Έστω $0<x\le 1$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για την συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x-\sin x$.

Υπάρχει $\xi\in(0,x)\subset(0,1)\subset(0,\frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi)\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=1-\cos\xi>0\Rightarrow f(x)>0$

Λήμμα 2
Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμη με τις ιδιότητες

i) Η g έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξεως
ii) $0\le g(x)\le 1\ \forall x\in\mathbb{R}$.
iii) $g(x)=0$ για $x\le 0$ και $g(x)=1$ για $x\ge\varepsilon$.

<u>Απόδειξη</u>
Ορίζουμε την συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\varphi(x)=\begin{cases}x-\sin x, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η φ έχει παράγωγο μέχρι και δεύτερης τάξης η οποία είναι συνεχής.
Η φ είναι μη αρνητική συνάρτηση και μηδενίζεται αν και μόνο αν $x\le 0$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(\varepsilon-x)}$

Ισχυρισμός: 1 $\varphi(x)+\varphi(\varepsilon-x)>0\ \forall\in\mathbb{R}$

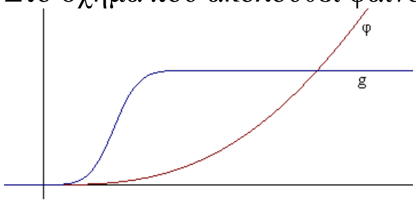
Ο παρονομαστής είναι άθροισμα δύο μη αρνητικών συναρτήσεων. Συνεπώς για να μηδενιστεί πρέπει $\varphi(x)=0$ και $\varphi(\varepsilon-x)=0$ ϒ $\Leftrightarrow x\le 0$ και $x\ge\varepsilon$. Αυτό όμως είναι αδύνατο. Συνεπώς ο ισχυρισμός είναι αληθής.
Ως αποτέλεσμα του ισχυρισμού η g είναι καλώς ορισμένη.
Ισχυρισμός 2: Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο.
Επειδή η g είναι πηλίκο τέτοιων συναρτήσεων με παρονομαστή θετικό, ο ισχυρισμός είναι αληθής
Ισχυρισμός 3: $g(x)=0$ για $x\le 0$ και $g(x)=1$ για $x\ge\varepsilon$.
Για $x\le 0$ ισχύει ότι $\varphi(x)=0\Rightarrow g(x)=0$.
Για $x\ge\varepsilon\Rightarrow\varepsilon-x\le 0\Rightarrow\varphi(\varepsilon-x)=0\Rightarrow g(x)=1$.
Ισχυρισμός 4: $0\le g(x)\le 1\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Επειδή $\varphi(x)\ge 0$ και $\varphi(x)+\varphi(\varepsilon-x)>0\Rightarrow g(\chi)\ge 0$.

Ισχύει ότι: $\varphi(\varepsilon\text{-}x)\geq 0 \Rightarrow \varphi(x)+\varphi(\varepsilon\text{-}x)\geq\varphi(x)\Rightarrow \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\varphi(\varepsilon-x)}\leq 1 \Rightarrow g(x)\leq 1$.

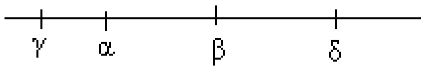
Επειδή η συνάρτηση g εξαρτάται από το ε χρήσιμο είναι να την συμβολίζουμε με g_ε.

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των φ και g_1.



Απόδειξη του θεωρήματος

Θεωρούμε την συνάρτηση $h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $h(x)=g_{\alpha-\gamma}(x-\gamma)\cdot g_{\delta-\beta}(\delta-x)$



Όταν $x\leq\gamma\Rightarrow x\text{-}\gamma\leq 0\Rightarrow g_{\alpha-\gamma}(x-\gamma)=0\Rightarrow h(x)=0$

Όταν $x\geq\delta\Rightarrow \delta\text{-}x\leq 0\Rightarrow g_{\delta-\beta}(\delta-x)=0\Rightarrow h(x)=0$

Όταν $\alpha\leq x\leq\beta$, τότε

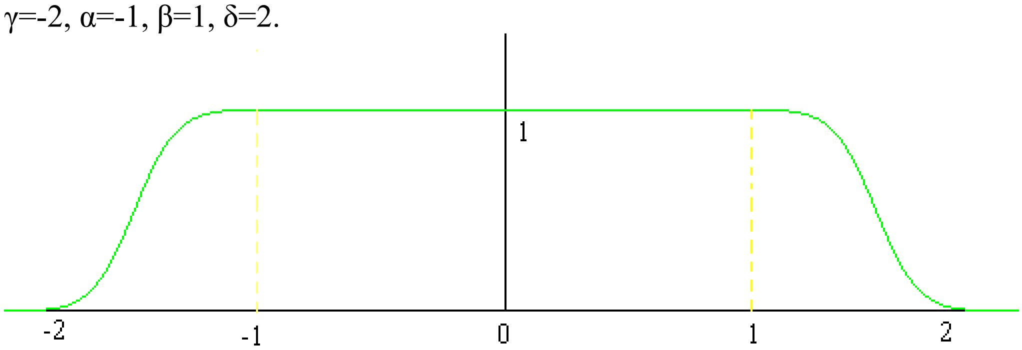
$x\text{-}\gamma\geq\alpha\text{-}\gamma\Rightarrow g_{\alpha-\gamma}(x-\gamma)=1$ και

$\delta\text{-}x\geq\delta\text{-}\beta\Rightarrow g_{\delta-\beta}(\delta-x)=1$.

Άρα h(x)=1.

Τέλος $0\leq g_{\alpha-\gamma}(x-\gamma)\leq 1$ και $0\leq g_{\delta-\beta}(\delta-x)\leq 1$. Άρα $0\leq h(x)\leq 1$.

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση της h για γ=-2, α=-1, β=1, δ=2.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

Στην εφαρμογή (2.15) εμφανίστηκε το άθροισμα

$$u^+(x,s)=\sum_{m=0}^{N-1}\sin(ks-kx-2kmL)$$

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος De Moivre για του μιγαδικούς αριθμούς

$$(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)=\cos(x+y)+i\sin(x+y)$$

$$\frac{\cos x+i\sin x}{\cos y+i\sin y}=\cos(x-y)+i\sin(x-y)$$

$$(\cos x+i\sin x)^N=\cos(Nx)+i\sin(Nx)$$

Θα χρειαστούμε επίσης το άθροισμα

$$\sum_{m=0}^{N-1}z^m=\frac{z^N-1}{z-1},\ z\neq 1.$$

Θέτουμε ξ=s-x. Θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα

$$B=\sum_{m=0}^{N-1}\sin(k\xi-2kmL)$$

Θεωρούμε το άθροισμα

$$A=\sum_{m=0}^{N-1}\cos(k\xi-2kmL)$$

Ισχύει ότι

$$A+iB=\sum_{m=0}^{N-1}\cos(k\xi-2kmL)+i\sin(k\xi-2kmL)=\sum_{m=0}^{N-1}\frac{\cos(k\xi)+i\sin(k\xi)}{\cos(2kmL)+i\sin(2kmL)}=$$

$$\left[\cos(k\xi)+i\sin(k\xi)\right]\sum_{m=0}^{N-1}\cos(2kmL)-i\sin(2kmL)=\left[\cos(k\xi)+i\sin(k\xi)\right]\sum_{m=0}^{N-1}\cos(-2kmL)+i\sin(-2kmL)=$$

Υπολογίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{m=0}^{N-1}\cos(-2kmL)+i\sin(-2kmL)=\sum_{m=0}^{N-1}\left[\cos(-2kL)+i\sin(-2kL)\right]^m=\frac{\left[\cos(-2kL)+i\sin(-2kL)\right]^N-1}{\cos(-2kL)+i\sin(-2kL)-1}=$$

$$\frac{\cos(-2NkL)+i\sin(-2NkL)-1}{\cos(-2kL)+i\sin(-2kL)-1}=\frac{\cos(2NkL)-i\sin(2NkL)-1}{\cos(2kL)-i\sin(2kL)-1}=$$

$$\frac{1-2\sin^2(kNL)-2i\sin(kNL)\cos(kNL)-1}{1-2\sin^2(kL)-2i\sin(kL)\cos(kL)-1}=\frac{-2i\sin(kNL)}{-2i\sin(kL)}\frac{\cos(kNL)-i\sin(kNL)}{\cos(kL)-i\sin(kL)}=$$

$$\frac{\sin(kNL)}{\sin(kL)}\frac{\cos(-kNL)+i\sin(-kNL)}{\cos(-kL)+i\sin(-kL)}=\frac{\sin(kNL)}{\sin(kL)}\left[\cos(-kNL+kL)+i\sin(-kNL+kL)\right]\Rightarrow$$

$$A+iB=\frac{\sin(kNL)}{\sin(kL)}\left[\cos(k\xi)+i\sin(k\xi)\right]\left[\cos(-kNL+kL)+i\sin(-kNL+kL)\right]\Rightarrow$$

$$A + iB = \frac{\sin(kNL)}{\sin(kL)}\left\{\cos\left[k\xi - k(N-1)L\right] + i\sin\left[k\xi - k(N-1)L\right]\right\} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\sin(kNL)}{\sin(kL)}\sin\left[k\xi - k(N-1)L\right]$$

Άρα

$$u^{+}(x,s) = \frac{\sin(kNL)}{\sin(kL)}\sin\left[ks - kx - kNL + kL\right]$$

Τα παραπάνω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι ο μιγαδικός $\cos(-2kL) + i\sin(-2kL)$ είναι διάφορος του 1.

Ισχύει ότι
$\cos(-2kL) + i\sin(-2kL) = 1 \Leftrightarrow \cos(2kL) = 1$ και $\sin(2kL) = 0 \Leftrightarrow kL = a\pi$, a ακέραιος.

Επομένως τα παραπάνω ισχύουν όταν $kL \neq a\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L \neq a\pi \Leftrightarrow L \neq a\frac{\lambda}{2}$.