Πειραματική μελέτη λεπτών σφαιρικών φακών

Περιγραφή - Θεωρητικές προβλέψεις - Σχεδιασμός

Βασικές έννοιες, σχέσεις και διαδικασίες
Λεπτός σφαιρικός φακός - Γεωμετρικά χαρακτηριστικά λεπτού σφαιρικού φακού - Φωτεινή δέσμη - Κύρια εστία και εστιακή απόσταση - Δείκτης διάθλασης υλικού - Είδωλο φωτεινού αντικειμένου - Φανταστικά και πραγματικά είδωλα - Η εξίσωση των λεπτών σφαιρικών φακών

Σκοπός της άσκησης είναι ο πειραματικός υπολογισμός των γεωμετρικών χαρακτηριστικών λεπτού αμφίκυρτου συμμετρικού σφαιρικού φακού, της εστιακής απόστασης *f* και του δείκτη διάθλασης *n* του υλικού του φακού, στο πλαίσιο του θεωρητικού μοντέλου των λεπτών φακών της γεωμετρικής οπτικής.

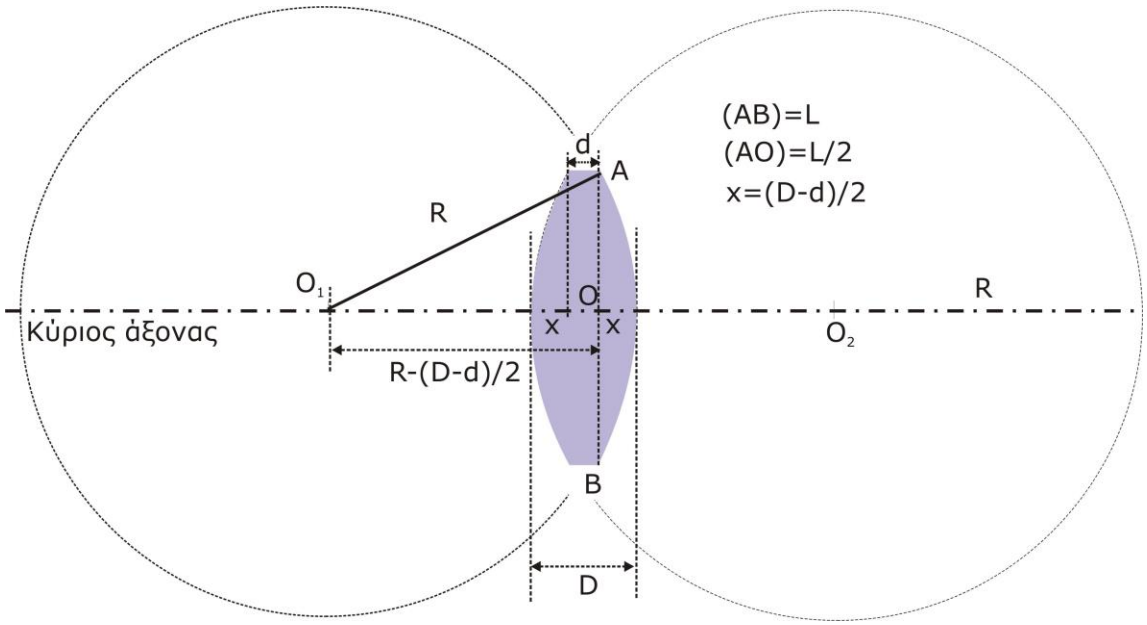
Ελέγχουμε πειραματικά την εξίσωση: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$ των λεπτών σφαιρικών φακών (σχήμα 3): Για διάφορες τιμές της θέσης *p* φωτεινού αντικειμένου, μετράμε τις αντίστοιχες θέσεις *q* που σχηματίζεται το είδωλό του και σχεδιάζουμε την πειραματική ευθεία $y=ax+b$, όπου $x=\frac{1}{p}$ και $y=\frac{1}{q}$. Από την πειραματική ευθεία υπολογίζουμε την εστιακή απόσταση *f* του φακού.

Α. Λεπτός σφαιρικός φακός
Ο φακός μας αποτελείται από ένα κομμάτι γυαλιού που περικλείεται από δύο σφαιρικές επιφάνειες ίσης ακτίνας R. Ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού είναι *n*. Τα βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του φακού φαίνονται στο σχήμα 1. Με την λέξη «λεπτός» εννοούμε ότι το πάχος *D* του φακού είναι πολύ μικρότερο της ακτίνας του *R*: *D*<<*R*. Στην περίμετρο του φακού το πάχος του γυαλιού είναι *d* (σχήμα 1). Από το ορθογώνιο τρίγωνο AOO_1 προκύπτει η σχέση:

$$R^2=\frac{L^2}{4}+\left(R-\frac{D-d}{2}\right)^2$$

από την οποία λύνοντας ως προς *R*, καταλήγουμε στην προσεγγιστική σχέση:

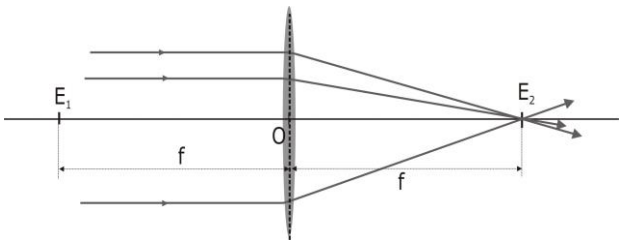
$$R=\frac{L^2}{4(D-d)}+\frac{D-d}{4} \qquad (1)$$



Σχήμα 1: Το πάχος του φακού είναι D. Η διάμετρος του δίσκου του φακού είναι (AB)=L. Ο φακός στην περίμετρό του έχει πάχος d.

Από τη σχέση 1 μπορούμε να υπολογίσουμε πειραματικά την ακτίνα *R* του φακού, εφόσον μετρήσουμε το πάχος του *D*, το πάχος *d* στην περίμετρο και τη διάμετρο *L* του δίσκου του φακού.

Κάθε **λεπτή φωτεινή δέσμη** που έχει διεύθυνση παράλληλη με τον **κύριο άξονα** του φακού, αφού διαθλασθεί, διέρχεται από ένα συγκεκριμένο σημείο του κύριου άξονα που ονομάζεται **κύρια εστία** του φακού (σχήμα 2). Ο φακός έχει δύο κύριες εστίες που βρίσκονται σε συμμετρικές θέσεις ως προς το κέντρο Ο του φακού. Η απόσταση κάθε κύριας εστίας από το Ο ονομάζεται **εστιακή απόσταση *f*** του φακού και αποτελεί χαρακτηριστικό του γνώρισμα.



Σχήμα 2: Οι δύο κύριες εστίες E_1 και E_2 του φακού, απέχουν από το κέντρο του Ο απόσταση f.

Η εστιακή απόσταση του λεπτού φακού σχετίζεται με την ακτίνα *R* και το δείκτη διάθλασης *n*. Μπορεί να αποδειχθεί θεωρητικά ότι ισχύει η σχέση:

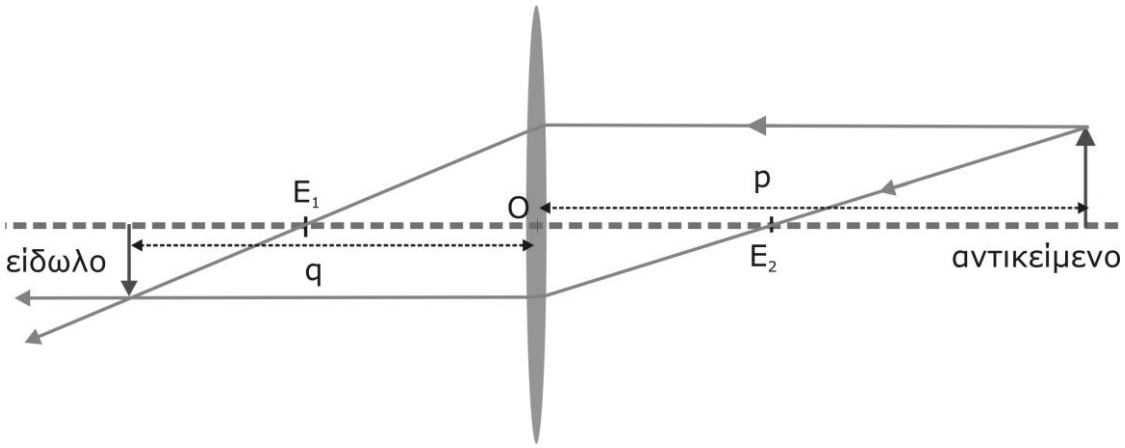
$$n = 1 + \frac{R}{2f} \qquad (2)$$

Η 2 ονομάζεται «εξίσωση του κατασκευαστή» του φακού. Αν μετρήσουμε την ακτίνα *R* των σφαιρικών επιφανειών του φακού και την εστιακή απόσταση *f*, τότε από την «εξίσωση του κατασκευαστή» μπορούμε να υπολογίσουμε πειραματικά το δείκτη διάθλασης *n* του γυαλιού από το οποίο έχει κατασκευαστεί ο φακός.

Β. Σχηματισμός ειδώλου, σχετική θέση αντικειμένου-ειδώλου.

Η εικόνα ενός **φωτεινού αντικειμένου** που σχηματίζεται από ένα φακό ονομάζεται **είδωλο**. Αν είναι δυνατό να προβάλλουμε το είδωλο πάνω σε μια οθόνη, τότε το ονομάζουμε **πραγματικό**. Αντίθετα, αν είναι αδύνατη η προβολή του σε οθόνη, τότε λέγεται **φανταστικό**.

Για να σχηματιστεί από το φακό μας πραγματικό είδωλο, πρέπει να τοποθετήσουμε το φωτεινό αντικείμενο σε σημείο του κύριου άξονα που απέχει από το κέντρο Ο του φακού απόσταση *p* μεγαλύτερη της εστιακής (*p*>*f*). Τότε μπορούμε να δούμε με ευκρίνεια το αντεστραμμένο είδωλο



Σχήμα 3: Γεωμετρικός σχηματισμός ειδώλου: α) Κάθε ακτίνα παράλληλη στον κύριο άξονα, διέρχεται από την εστία E_1. β) Κάθε ακτίνα που διέρχεται από την εστία E_2, εξέρχεται από το φακό με διεύθυνση παράλληλη στον κύριο άξονα.

πάνω σε μία οθόνη που τοποθετούμε σε κατάλληλη θέση από την άλλη πλευρά του φακού. Με μια μετροταινία μπορούμε να μετρήσουμε την απόσταση *q* του ειδώλου από το κέντρο Ο του φακού. Αν το αντικείμενο βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από το φακό: $p \to +\infty$ τότε το αντικείμενο σχηματίζεται πάνω στην κύρια εστία του φακού. Για παράδειγμα, το είδωλο του ηλιακού δίσκου σχηματίζεται πάνω στην κύρια εστία του φακού.

Τοποθετούμε ένα μικρό φωτεινό αντικείμενο -για παράδειγμα ένα κεράκι- πάνω στον κύριο άξονα του φακού, σε απόσταση p από το κέντρο του O (p>f). Σε ποια απόσταση q από το O, από την άλλη πλευρά του φακού, πρέπει να τοποθετήσουμε μια οθόνη για να δούμε με ευκρίνεια το είδωλο της φλόγας του κεριού;

Αποδεικνύεται θεωρητικά ότι μεταξύ των *q, p* και f ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \qquad (3)$$

Η σχέση 3 μπορεί να ελεγχθεί πειραματικά: Αν θέσουμε $x=\frac{1}{p}$ και $y=\frac{1}{q}$ τότε από την 3 προκύπτει η εξίσωση:

$$x+y=\frac{1}{f} \qquad (4α)$$

ή:

$$y=-x+1/f \qquad (4β)$$

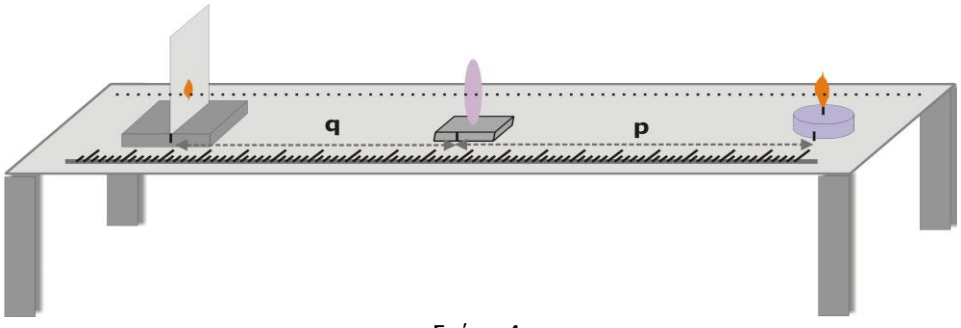
Οι εξισώσεις 4 μας λένε ότι καθώς μεταβάλλουμε την απόσταση *p* του φωτεινού αντικειμένου από το φακό, μεταβάλλεται και η απόσταση του ειδώλου του *q*, έτσι ώστε το άθροισμα των μεταβλητών *x* και *y* να διατηρείται σταθερό και ίσο με το αντίστροφο της εστιακής απόστασης *f* του φακού. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι για $x\to 0$ το $y\to\frac{1}{f}$ και για $y\to 0$ το $x\to\frac{1}{f}$. Δηλαδή η ευθεία 4 τέμνει τους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα, στα σημεία $x=1/f$ και $y=1/f$ αντίστοιχα.

Καταλήγουμε στην ακόλουθη πειραματική διαδικασία: α) για διαφορετικές τιμές της απόστασης *p* του κεριού από το φακό, μετράμε τις αντίστοιχες αποστάσεις *q* του ειδώλου της φλόγας, β) υπολογίζουμε τις συντεταμένες των σημείων (x,y) όπου $x=\frac{1}{p}$ και $y=\frac{1}{q}$ γ) τοποθετούμε τα πειραματικά σημεία (x,y) σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων και σχεδιάζουμε την ευθεία που διέρχεται από αυτά. Έτσι, μπορούμε να ελέγξουμε πειραματικά τη θεωρητική σχέση 4α ή 4β και να υπολογίσουμε την εστιακή απόσταση *f* του φακού.

Πειραματική διαδικασία

Όργανα και υλικά

1) Λεπτός σφαιρικός συμμετρικός φακός
2) Διαστημόμετρο
3) Μετροταινία
4) Κεράκι σε αλουμινένιο δοχείο και βάση ύψους 1-2*cm*
5) Χαρτονένια οθόνη
6) Η/Υ και φύλλο excel. Εναλλακτικά:
   a. Χάρακας 30*cm* και γνώμονας,
   b. Χαρτί μιλιμετρέ,
   c. Αριθμομηχανή,



Σχήμα 4.

Πείραμα 1: Μέτρηση του πάχους *D* του φακού και του πάχους *d* του γυαλιού στην περίμετρο του φακού. Μέτρηση της διαμέτρου *L* του δίσκου του φακού. Υπολογισμός της ακτίνας *R* των σφαιρικών επιφανειών του φακού. Εκτίμηση της τιμής της εστιακής απόστασης *f* του φακού.

1. Μετρήστε το πάχος *D* του φακού και το πάχος *d* του γυαλιού στην περίμετρό του. Μετρήστε τη διάμετρο *L* του δίσκου του φακού. Χρησιμοποιήστε χαρτί, για να μη γδάρετε την επιφάνεια του φακού. Υπολογίστε την ακτίνα *R* των σφαιρικών επιφανειών του φακού. Οι μετρήσεις σας να γίνουν σε *cm*, με προσέγγιση 2ου δεκαδικού ψηφίου.

   D=_____*cm*

   d=_____*cm*

   L=_____*cm*

   R=_____*cm*

2. Τοποθετήστε το φακό σε απόσταση 50*cm* από το αναμμένο κεράκι. Βρείτε τη θέση που πρέπει να τοποθετήσετε την οθόνη, ώστε να σχηματιστεί ευκρινές (ανεστραμμένο) είδωλο της φλόγας και μετρήστε την αντίστοιχη απόσταση *q* του ειδώλου από το φακό (σχήμα 4). Στη συνέχεια απομακρύνατε το φακό από το κεράκι, στα 70, 90, 110, 130*cm* σχηματίζοντας κάθε φορά το είδωλο της φλόγας στην οθόνη. Μετρήστε την αντίστοιχη τιμή του *q* και καταγράψτε την στον πίνακα μετρήσεων Α.

3. Όσο απομακρύνουμε το κεράκι από το φακό, το είδωλό του πλησιάζει στην κύρια εστία και το *q* **τείνει** στο *f*. Για μεταβολή του *p* από *p*=110*cm* στο *p*=130*cm*, υπολογίστε την αντίστοιχη μεταβολή *Δq* του *q*, καθώς και την επί τοις εκατό μεταβολή του (*σ*): $\sigma = \frac{\Delta q}{q'}$ (όπου *q΄* η τιμή του *q* που αντιστοιχεί στο *p*=130*cm*). Εφόσον το *σ* είναι μικρότερο του 5% μπορούμε να **κάνουμε την υπόθεση** ότι η τιμή του *q΄* προσεγγίζει ικανοποιητικά το *f*. Με βάση αυτό το συλλογισμό, κάντε μια εκτίμηση της τιμής της εστιακής απόστασης του φακού.

   Δq=_____*cm*

   $\sigma = \frac{\Delta q}{q'} =$_____=_____%

   $f \approx q' =$_____*cm*

Πείραμα 2: Πειραματικός έλεγχος της εξίσωσης 4. Υπολογισμός της εστιακής απόστασης του φακού και του δείκτη διάθλασης του γυαλιού.

1. Τοποθετήστε το φακό σε απόσταση *p*=30*cm* ως προς το κεράκι, όπως δείχνει το σχήμα 4. Βρείτε τη θέση της οθόνης, όπου το είδωλο της φλόγας σχηματίζεται με ευκρίνεια. Μετρήστε την αντίστοιχη απόσταση της οθόνης από το φακό και καταγράψτε τη στον πίνακα Β. Επαναλάβατε την ίδια διαδικασία για όλες τις τιμές του *p* που αναγράφονται στην πρώτη στήλη του πίνακα Β. [**Οι μετρήσεις των *p* και *q* να γίνουν σε *cm* με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου**]

2. Συμπληρώστε όλα τα κελιά του πίνακα Β. [**Οι υπολογισμοί των *x* και *y* να γίνουν σε cm^{-1} με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων**]

3. Σε χαρτί μιλιμετρέ σχεδιάστε σύστημα ορθογωνίων αξόνων (*O,x,y*), **επιλέγοντας την ίδια κλίμακα για τους δύο άξονες**. Τοποθετήστε τα σημεία (*x,y*), σύμφωνα με τις πειραματικές τιμές που έχετε καταχωρήσει στον πίνακα Β. Σχεδιάστε την ευθεία που διέρχεται πλησιέστερα στο σύνολο των πειραματικών σημείων.

4. Προεκτείνατε την πειραματική ευθεία έτσι ώστε να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της με τους άξονες Ox και Oy. Βρείτε τις αλγεβρικές τιμές των σημείων τομής σε κάθε άξονα.

   Το σημείο τομής της πειραματικής ευθείας με τον άξονα Ox αντιστοιχεί στην τιμή:

   a=_____cm^{-1}

   Το σημείο τομής της πειραματικής ευθείας με τον άξονα Oy αντιστοιχεί στην τιμή:

   β=_____cm^{-1}

5. Σύμφωνα με τη θεωρητική εξίσωση 4, οι τιμές a και β πρέπει να είναι ίσες και το αντίστροφο τους ίσο με την εστιακή απόσταση του φακού.
   a. Υπολογίστε τη μέση τιμή a_μ των a και β: $a_\mu = \frac{a+\beta}{2}$
   b. Υπολογίστε τη σχετική απόκλιση λ των πειραματικών τιμών σας, με βάση τη σχέση: $\lambda = \left|\frac{a-\beta}{a_\mu}\right|$ Εκφράστε το λ επί τοις εκατό.
   c. Υπολογίστε την τιμή της εστιακής απόστασης f_μ από τη σχέση $a_\mu=1/f_\mu$.

   a_μ=_____cm^{-1}

   λ=_____=____%

   f_μ=_____cm

6. Υπολογίστε το δείκτη διάθλασης του γυαλιού από το οποίο έχει κατασκευαστεί ο φακός.

   n= _____

7. Ταυτίζεται η τιμή f_μ που υπολογίσατε για την εστιακή απόσταση του φακού από το πείραμα 2 με την τιμή της εστιακής απόστασης που βρήκατε στο πείραμα 1;
   (**ΝΑΙ - ΟΧΙ**).
   Υπολογίστε τη σχετική απόκλιση λ′ των δύο πειραματικών τιμών και εκφράστε την επί τοις εκατό:

   $\lambda' = \frac{|f - f_\mu|}{\bar{f}}$ όπου $\bar{f} = \frac{f + f_\mu}{2}$ η μέση τιμή των δύο πειραματικών τιμών.

   λ'=_____=_____%

   Ποιον τρόπο πειραματικού υπολογισμού της εστιακής απόστασης f θεωρείτε περισσότερο αξιόπιστο, και γιατί; [Επιλέξτε ποιες απαντήσεις θεωρείτε σωστές και ποιές λανθασμένες]
   a. Το πρώτο πείραμα είναι πιο αξιόπιστο γιατί η απόσταση των 130cm του φακού από το κεράκι (αντικείμενο) είναι «αρκετά μεγάλη», ώστε το είδωλο να σχηματιστεί ακριβώς στην κύρια εστία.
   b. Δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι η εκτίμηση που κάναμε για το f στο πρώτο πείραμα είναι αξιόπιστη, γιατί η υπόθεσή μας ότι η προσέγγιση $\Delta q/q$<5% είναι "καλή" είναι υποκειμενική και δεν στηρίζεται σε μαθηματικά επιχειρήματα.
   c. Το δεύτερο πείραμα είναι αξιόπιστο διότι επικυρώνει τη θεωρητική εξίσωση 3 και από το πειραματικό γράφημα προέκυψε η τιμή του f.
   d. Το δεύτερο πείραμα δεν είναι αξιόπιστο διότι η πειραματική ευθεία τέμνει τους άξονες στα σημεία (a,0) και (0,β), αλλά δεν ισχύει **ακριβώς** η σχέση $a=\beta$, όπως προβλέπεται από τη θεωρία.

e. Κανένα πείραμα δεν είναι αξιόπιστο διότι η εξίσωση 3 δεν περιγράφει **ικανοποιητικά** τους φακούς του εμπορίου, που χρησιμοποιήσαμε.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΠΙΝΑΚΑΣ Α					
p cm	50	70	90	110	130
q cm					

ΠΙΝΑΚΑΣ Β			
p cm	**q cm**	**x=1/p cm^{-1}**	**y=1/q cm^{-1}**
30			
35			
40			
45			
50			
60			
70			

Βαθμολόγηση της άσκησης

Εργαστηριακές θέσεις:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Μέτρηση του πάχους D του φακού ($D_{ΕΚΦΕ}$=0,7cm): *|D-0,7|≤0,05: 2μ - 0,05<|D-0,7|≤0,1: 1μ -* *|D-0,7|>0,1: 0μ*											
Μέτρηση του πάχους d του γυαλιού, στην περίμετρο του φακού ($d_{ΕΚΦΕ}$=0,3cm): *|d-0,3|≤0,05: 2μ - 0,05<|d-0,3|≤0,1: 1μ - |d-0,3|>0,1: 0μ*											
Μέτρηση της διαμέτρου L του δίσκου του φακού ($L_{ΕΚΦΕ}$=6,45cm): *|L-6,45|≤0,05: 2μ - 0,05<|L-6,45|≤0,1: 1μ -* *|L-6,45|>0,1: 0μ*											
Υπολογισμός της ακτίνας R των σφαιρικών επιφανειών του φακού ($R_{ΕΚΦΕ}$=26,5cm): *|R-26,5|≤1: 2μ - 1<|R-26,5|≤2: 1μ -* *|R-26,5|>2: 0μ*											
Συμπλήρωση του Πίνακα Α: 1μ για κάθε στήλη, εφόσον η αντίστοιχη τιμή έχει απόκλιση ±2cm σε σχέση με την αντίστοιχη μέτρηση του ΕΚΦΕ. *Μουτζούρες: -1μ. Μονάδες δίπλα στις αριθ. τιμές: -1μ*											
Εκτίμηση της εστιακής απόστασης του φακού, σύμφωνα με το συλλογισμό της δραστηριότητας 3 του πειράματος 1 ($f_{ΕΚΦΕ}$=26,4cm) *|f-26,4|≤1,3: 2μ - 1,3<|f-26,4|≤2,6: 1μ - 2,6<|f-26,4|: 0μ*											
Συμπλήρωση του Πίνακα Β: *Αριθμός δεκαδικών ψηφίων, σύμφωνα με τις οδηγίες: 0-2μ* *Σωστός υπολογισμός των τιμών των στηλών x=1/p και y=1/q: 0-0,5μ για κάθε κελί.* *Μουτζούρες: -1μ. Μονάδες δίπλα στις αριθμ. τιμές: -1μ*											
Επιλογή κλίμακας στους άξονες του γραφήματος: 2x2μ *Αναγραφή μεγεθών και μονάδων στους άξονες: 2x1μ*											
Τοποθέτηση των πειραματικών σημείων στο επίπεδο των αξόνων: 1μ για κάθε σημείο.											
Σχεδίαση της πειραματικής ευθείας: 2μ											
Προέκταση της ευθείας και υπολογισμός των συντεταγμένων των σημείων τομής της με τους άξονες (ερώτηση 4 του πειράματος 2). Δίδονται: $a_{ΕΚΦΕ}=β_{ΕΚΦΕ}=0,045cm^{-1}$ *|a-0,045|≤0,005: 2μ - 0,005<|a-0,045|≤0,01: 1μ - |a-0,045|>0,01: 0μ* *|β-0,045|≤0,005: 2μ - 0,005<|β-0,045|≤0,01: 1μ - |β-0,045|>0,01: 0μ*											

Ερώτηση 5 του πειράματος 2: *$0<\lambda\leq5\%$: 4μ - $5\%<\lambda\leq10\%$: 3μ - $10\%<\lambda\leq15\%$: 2μ - $15\%<\lambda\leq20\%$: 1μ - $20\%<\lambda$: 0μ* *Υπολογισμός της f ($f_{\mu ΕΚΦΕ}=22cm$):* *$\|f-22\|\leq2,5$: 2μ - $2,5<\|f-22\|\leq5$: 1μ - $5<\|f-22\|$: 0μ*											
Υπολογισμός του δείκτη διάθλασης του γυαλιού ($n_{ΕΚΦΕ}=1,6$) *$\|n-1,6\|\leq0,2$: 2μ - $0,2<\|n-1,6\|\leq0,4$: 1μ - $\|n-1,6\|>0,4$: 0μ*											
Απάντηση στην ερώτηση 7 του πειράματος 2: *Υπολογισμός του λ': 0-1μ* *1μ για κάθε σωστή επιλογή*											
Σύνολο μονάδων Μ: 0-57											
Αναγωγή στα 100: Μ'=Μx100/57											

Ενδεικτικές μετρήσεις και απαντήσεις

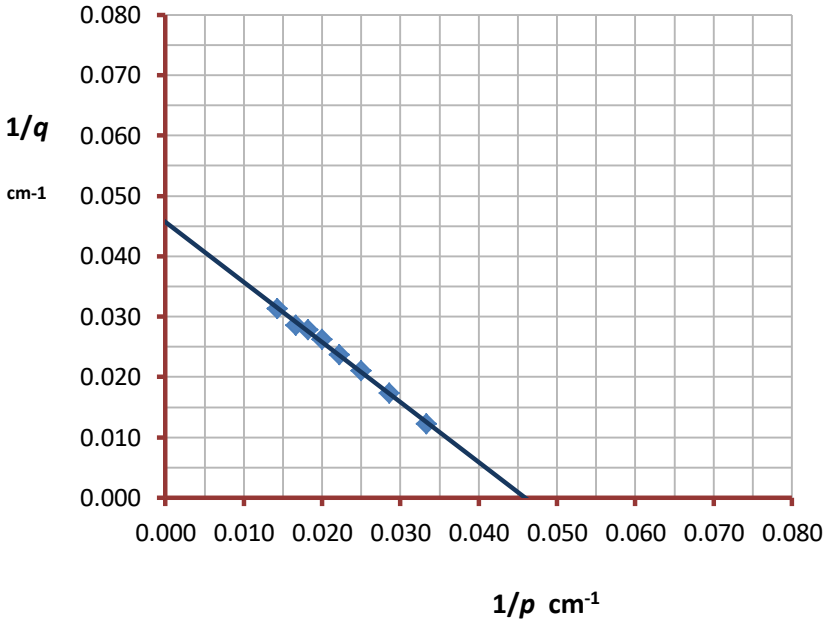
Μέτρηση της διαμέτρου *L* του φακού: *L*=6.5*cm*
Πάχος *D* του φακού: *D*=0.7*cm*
Πάχος της περιφέρειας του φακού: *d*=0.3*cm*

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ Α

p cm	50	70	90	110	130
q cm	39.2	32.0	29.1	27.5	26.4

ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ Β

p	*q*	*1/p cm^-1*	*1/q cm^-1*
30	82	0.033	0.012
35	58	0.029	0.017
40	47.5	0.025	0.021
45	42.2	0.022	0.024
50	38.2	0.020	0.026
55	36	0.018	0.028
60	35	0.017	0.029
70	32	0.014	0.031



Με βάση το γράφημα η εστιακή απόσταση του φακού είναι *f*≈22.0*cm*
Ο φακός είναι συμμετρικός (*R*$_1$=*R*$_2$=*R*). Η ακτίνα του φακού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$R = \frac{L^2}{4(D-d)} + \frac{D-d}{4}$$

Προκύπτει ότι *R*=26.5*cm*.

Ο δείκτης διάθλασης υπολογίζεται από τον «τύπο του κατασκευαστή»: $n = 1 + \frac{R}{2f}$

Βρίσκουμε: *n*=1.6

Ερώτηση 7: a: Λάθος, b: Σωστή, c: Σωστή, d: Λάθος, e: Λάθος

Αναφορές:
Alonso-Finn, Physics, Addison-Wesley, 1981, sections 27.3, 27.4
http://en.wikipedia.org/wiki/Lens_(optics)