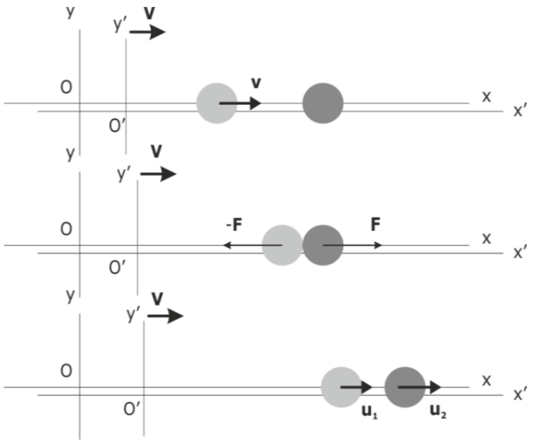
Σύστημα Κέντρου Μάζας απομονωμένου συστήματος δύο σωματιδίων: Ένα ιδιαίτερης σημασίας αδρανειακό σύστημα αναφοράς

Κώστας Παπαμιχάλης Δρ. Θεωρητικής Φυσικής

Βασικές έννοιες: Αδρανειακό σύστημα αναφοράς - Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου - Κινητική ενέργεια – 3ος Νόμος του Newton - Απομονωμένο σύστημα σωμάτων – Μηχανική ενέργεια συστήματος σωμάτων - Ορμή συστήματος σωμάτων - Διατήρηση της ορμής απομονωμένου συστήματος - Κέντρο μάζας συστήματος σωμάτων

Δύο σφαίρες Σ1 και Σ2 μαζών m_1, m_2 κινούνται χωρίς να περιστρέφονται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα τους. Οι σφαίρες αλληλεπιδρούν κατά την επαφή τους, με κεντρικές δυνάμεις που ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton. **Το σύστημα των Σ1 και Σ2 είναι απομονωμένο**. Έστω Oxyz αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η Σ2 παραμένει ακίνητη και η Σ1 κινείται με ταχύτητα $\vec{v} = v\hat{x}$ προς τη Σ2 (σχήμα 1).
Η μηχανική ενέργεια των σφαιρών ισούται με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών τους.



Σχήμα 1

Πρόταση Α

Η τιμή της μηχανικής ενέργειας του απομονωμένου συστήματος των δύο σφαιρών εξαρτάται από το αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο την υπολογίζουμε.

Ή, με διαφορετική ορολογία: Δύο αδρανειακοί παρατηρητές μετρούν διαφορετικές τιμές για τη μηχανική ενέργεια του συστήματος των Σ1 και Σ2: Η μηχανική ενέργεια του απομονωμένου συστήματος ***δεν*** είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

Απόδειξη

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος των Σ1, Σ2 είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών τους. Στο σχήμα 1 διακρίνονται δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς: το Oxyz και το O′x′y′z′ που κινείται ως προς το Oxyz με σταθερή ταχύτητα $\vec{V} = V\hat{x}$ κατά μήκος του άξονα Ox. Οι συντεταγμένες των σωμάτων και οι ταχύτητες ως προς τα δύο συστήματα συνδέονται με τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου:

$x' = x - Vt,\ y' = y,\ z' = z$

$t' = t$

$v' = v - V$

Ως προς το Oxyz η μηχανική ενέργεια των Σ1,Σ2 είναι

$E = \frac{1}{2}m_1 v^2$

Ως προς το O′x′y′z′ η μηχανική ενέργεια των δύο σφαιρών είναι

$E' = \frac{1}{2}m_1(v-V)^2 + \frac{1}{2}m_2(-V)^2 = \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 - m_1 vV$ (1)

Σύμφωνα με την 1, η μηχανική ενέργεια E' του συστήματος είναι συνάρτηση της V, δηλαδή εξαρτάται από το αδρανειακό σύστημα ως προς το οποίο την υπολογίζουμε. Από την 1 φαίνεται ότι όταν το $V \to \pm\infty$, τότε η $E' \to +\infty$. Ωστόσο η συνάρτηση $E'(V)$ έχει ένα ελάχιστο, που υπολογίζεται από τη συνθήκη

$\frac{d}{dV}E'(V) = 0$ (2)

Η εξίσωση που προκύπτει από τη συνθήκη 2 είναι 1ου βαθμού ως προς V και έχει ρίζα την

$V_m = \frac{m_1}{m_1+m_2}v$ (3)

Συμπέρασμα: Το αδρανειακό σύστημα O"x"y"z" ως προς το οποίο η τιμή της μηχανικής ενέργειας των Σ1 και Σ2 έχει ελάχιστη τιμή κινείται ως προς το Oxyz με ταχύτητα $V_m = \frac{m_1}{m_1+m_2}v$.

Η ελάχιστη τιμή της μηχανικής ενέργειας των Σ1 και Σ2 υπολογίζεται ως προς το O"x"y"z" και είναι (σχέσεις 1 και 3):
$E_{min} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2$ (4)

Πρόταση Β
Το αδρανειακό σύστημα ως προς το οποίο η μηχανική ενέργεια του συστήματος των Σ1 και Σ2 είναι ελάχιστη ταυτίζεται με το σύστημα Κέντρου Μάζας (ΚΜ) των Σ1, Σ2.

Απόδειξη
Πόση είναι η ταχύτητα του συστήματος Κέντρου Μάζας (ΚΜ) των Σ1, Σ2, ως προς το Oxyz;
Από τον ορισμό του κέντρου μάζας συστήματος σωμάτων, προκύπτει ότι η θέση X_{KM} του κέντρου μάζας των Σ1, Σ2 ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς Oxyz υπολογίζεται από τον ορισμό του κέντρου μάζας:
$X_{KM} = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1 x_1 + m_2 x_2)$ (5)
όπου x_1, x_2 οι θέσεις των Σ1, Σ2 ως προς το Oxyz τη χρονική στιγμή t.
Από την 5 και δεδομένου ότι το Σ2 είναι ακίνητο ως προς το Oxyz, έπεται ότι η ταχύτητα του ΚΜ των Σ1, Σ2 ως προς το Oxyz είναι:
$V_{KM} = \frac{dX_{KM}}{dt} = \frac{m_1}{m_1+m_2}v$ (6)

Από τις σχέσεις 3 και 6 συμπεραίνουμε ότι το σύστημα ΚΜ των Σ1, Σ2 ταυτίζεται με το αδρανειακό σύστημα ως προς το οποίο η μηχανική ενέργεια των Σ1 και Σ2 έχει την ελάχιστη τιμή.

Έστω ότι κατά τη σύγκρουση των Σ1 και Σ2 ένα μέρος ε της μηχανικής ενέργειας του συστήματος αποθηκεύεται στην εσωτερική ενέργεια των δύο σφαιρών. Δεδομένου ότι το σύστημα είναι απομονωμένο, πριν και μετά τη σύγκρουση η ενέργεια και η ορμή του συστήματος διατηρούνται σταθερές:
$m_1 v = m_1 u_1 + m_2 u_2$
$\frac{1}{2}m_1 v^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 + \varepsilon$
όπου u_1, u_2, οι ταχύτητες των Σ1, Σ2 μετά την κρούση. Με απαλοιφή του u_2, από τις δύο σχέσεις προκύπτει μια εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς u_1:
$m_1(m_1+m_2)u_1^2 - 2m_1^2 v u_1 + m_1(m_1-m_2)v^2 + 2\varepsilon m_2 = 0$ (7)
Η εξίσωση 7 έχει πραγματικές ρίζες τότε και μόνον αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μεγαλύτερη ή ίση με το μηδέν:
$(m_1^2 v)^2 - m_1(m_1+m_2)(m_1(m_1-m_2) + 2\varepsilon m_2) \geq 0$
ή:
$\varepsilon \leq \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2$ (8)

Από τις 4 και 8 συνεπάγεται ότι αληθεύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση Γ
Το μέγιστο ποσό της συνολικής μηχανικής ενέργειας του απομονωμένου συστήματος των Σ1, Σ2 που μπορεί να μετατραπεί σε ενέργεια άλλης μορφής κατά την κρούση, ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, δεν μπορεί να υπερβαίνει τη μηχανική ενέργεια των Σ1, Σ2 ως προς το σύστημα Κέντρου Μάζας τους.
Με άλλα λόγια, η μηχανική ενέργεια του απομονωμένου συστήματος των σωμάτων Σ1, Σ2 ως προς ένα τυχαίο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, δεν είναι δυνατόν να μετατραπεί εξ ολοκλήρου σε ενέργεια άλλης μορφής. Το μέγιστο μέρος της μηχανικής ενέργειας που μπορεί να μετατραπεί σε ενέργεια άλλης μορφής είναι ίσο με: $E_{min} = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2$, που εκφράζει τη μηχανική ενέργεια των Σ1, Σ2 ως προς το αδρανειακό σύστημα του κέντρου μάζας τους.