Άμεσες και Έμμεσες μετρήσεις φυσικών μεγεθών – Πειραματικός υπολογισμός του *g* μέσω της μέτρησης του χρόνου πλήρους αιώρησης απλού εκκρεμούς

Κώστας Παπαμιχάλης Δρ. Θεωρητικής Φυσικής

[Μέρος της εργασίας αυτής έχει παρουσιαστεί στο 11ο Πανελλήνιο Συνέδριο της ΕΕΦ, Λάρισα 30-31/03, 1-2/04/2006 (Κ. Παπαμιχάλης, Ι. Χατζής, Κ. Καμπούρης) και έχει δημοσιευτεί στα Πρακτικά του Συνεδρίου]

Βασικές έννοιες και σχέσεις

Φυσικά μεγέθη – Πειραματική διάταξη – Άμεση μέτρηση φυσικού μεγέθους – Τυχαία μεταβλητή – Πυκνότητα πιθανότητας τυχαίας μεταβλητής – Μέση τιμή ενός μεγέθους – Αριθμητικός μέσος *N* μετρήσεων – Εντοπισμένη πυκνότητα πιθανότητας – Τυπική απόκλιση τυχαίας μεταβλητής – Ανισότητα του Chebyshev – Ο αριθμητικός μέσος όρος *N* μετρήσεων ως τυχαία μεταβλητή – Σχέση του αριθμητικού μέσου όρου μετρήσεων και της μέσης τιμής του αντιστοίχου μεγέθους – Φυσικοί νόμοι – Έμμεση μέτρηση φυσικού μεγέθους – Πειραματική τιμή φυσικού μεγέθους που υπολογίζεται μέσω φυσικού νόμου

Σύνοψη

Θεωρούμε ένα φυσικό μέγεθος *Y* που μπορεί να μετρηθεί άμεσα με την ένδειξη ενός κατάλληλου οργάνου, στο πλαίσιο μιας πειραματικής διαδικασίας. Για παράδειγμα, ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης ενός εκκρεμούς που μετρείται με ένα χρονόμετρο, η θέση ενός σωματιδίου που κινείται σε έναν βαθμονομημένο άξονα, η μάζα ενός σώματος που μετρείται με ένα ζυγό κλπ. Λέμε ότι το *Y* είναι "άμεσα μετρήσιμο" στη δεδομένη πειραματική διαδικασία.
Αντίθετα, η πειραματική τιμή πολλών φυσικών μεγεθών προκύπτει έμμεσα, μέσω φυσικών νόμων (μαθηματικών σχέσεων) που τα συνδέουν με άλλα φυσικά μεγέθη τα οποία είναι άμεσα μετρήσιμα. Για παράδειγμα, ο πειραματικός υπολογισμός της επιτάχυνσης *g* της βαρύτητας με τη βοήθεια απλού εκκρεμούς δεν προκύπτει από την ένδειξη ενός οργάνου: χρειάζεται να μετρηθεί ο χρόνος μιας πλήρους αιώρησης και το μήκος του νήματος και στη συνέχεια να εφαρμοστεί ο φυσικός νόμος που συνδέει την περίοδο του εκκρεμούς με το *g*. Τα μεγέθη αυτά λέμε ότι είναι "έμμεσα μετρήσιμα", κατά τη διεξαγωγή του συγκεκριμένου πειράματος.

Έστω ότι σε μια πειραματική διαδικασία, το μέγεθος *Y* είναι άμεσα μετρήσιμο. Οι πειραματικές τιμές του *Y* είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί που μπορούν να θεωρηθούν ως τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής σε ένα παιχνίδι τύχης [3,4]. Κάτω από αυτή την οπτική γωνία, μπορούμε να χειριστούμε το μέγεθος *Y* ως μια τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει πραγματικές τιμές με μια πυκνότητα πιθανότητας $w(y)$ [1,3,4].

Κάθε τιμή y του Y που προκύπτει από τη διεξαγωγή ενός πειράματος με τη συγκεκριμένη πειραματική διάταξη, μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης, όπως είναι, για παράδειγμα, η ρίψη ενός νομίσματος.

Η πιθανότητα μια τιμή του *Y* να βρίσκεται στο διάστημα $\left[a,b\right]\subseteq R$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$P\left(a \le Y \le b\right) = \int_a^b w(y)dy$$

Ως **μέση πειραματική τιμή ή αποδεκτή πειραματική τιμή** του *Y* ορίζεται η μέση τιμή του:

$$\mu(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yw(y)dy$$

Η συνάρτηση $w(y)$ προσδιορίζεται από την πειραματική διάταξη και τις συνθήκες διεξαγωγής του πειράματος. Ωστόσο, η ακριβής αναλυτική έκφραση της $w(y)$ παραμένει άγνωστη.

Πώς θα υπολογίσουμε τη μέση πειραματική τιμή του Y, εφόσον δεν γνωρίζουμε την πυκνότητα πιθανότητας $w(y)$*;*

Δείχνουμε ότι κάτω από ορισμένες γενικές παραδοχές που αφορούν στην αναλυτική έκφραση της πυκνότητας πιθανότητας $w(y)$, ο αριθμητικός μέσος $\bar{Y}$ *N* πειραματικών τιμών $y_1, y_2 ... y_N$ που προκύπτουν από ισάριθμες μετρήσεις του *Y* με την ίδια διάταξη, συγκλίνει για $N \to \infty$ στη μέση τιμή $\mu(Y)$ της τυχαίας μεταβλητής *Y* [3,4]. Με άλλα λόγια, η μέση τιμή του *Y* προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τον αριθμητικό μέσο $\bar{Y}$ των τιμών $y_1, y_2 ... y_N$, για κατάλληλο πλήθος N μετρήσεων.

Έστω ότι το φυσικό μέγεθος Z σχετίζεται με το Y μέσω του φυσικού νόμου:

$$Z = F(Y) \tag{1}$$

και έστω ότι με μια κατάλληλη πειραματική διάταξη που σχετίζει τα Y και Z μέσω του φυσικού νόμου 1, έχουμε τη δυνατότητα άμεσης μέτρησης του Y. Τότε, κάθε πειραματική τιμή του Z υπολογίζεται έμμεσα, μέσω της μέτρησης του Y και του φυσικού νόμου 1. Έτσι, αν σε μια διεξαγωγή της πειραματικής διαδικασίας προέκυψε ότι η πειραματική τιμή του Y είναι $Y = y_1$, η αντίστοιχη πειραματική τιμή του Z είναι $z_1 = F(y_1)$

Δεδομένου ότι η αποδεκτή πειραματική τιμή του Y δίδεται σε πολύ καλή προσέγγιση από τον αριθμητικό μέσο $\bar{Y}$ των πειραματικών τιμών $y_1, y_2 ... y_N$ του Y σε μια ακολουθία N διαδοχικών μετρήσεων, συμπεραίνουμε ότι **η αποδεκτή πειραματική τιμή του *Z*** δίδεται από τη σχέση:

$$Z_{\exp.} = F(\bar{Y}) \tag{2}$$

Από την άλλη πλευρά, θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε και τον αριθμητικό μέσο του Z:

$$\bar{Z} = \overline{F(Y)} = \frac{1}{N}\left(F(y_1) + F(y_2) + ... F(y_N)\right)$$

Η τιμή $\bar{Z}$ γενικά δεν ταυτίζεται με την πειραματική τιμή $Z_{\exp.}$ που υπολογίζεται από τη 2, εκτός κι αν η συνάρτηση F είναι γραμμική.

Η τιμή $\bar{Z} = \overline{F(Y)}$ πολλές φορές, λανθασμένα, θεωρείται ως πειραματική τιμή του μεγέθους Z. Στην παρούσα εργασία δείχνουμε ότι οι τιμές $Z_{\exp.}$ και $\bar{Z}$ είναι γενικά διαφορετικές και υπολογίζουμε το συστηματικό σφάλμα που εισάγεται αν χρησιμοποιηθεί η σχέση $\bar{Z} = \overline{F(Y)}$ για τον υπολογισμό της πειραματικής τιμής του μεγέθους Z. Τα συμπεράσματα εφαρμόζονται στη μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g, μέσω της μέτρησης της περιόδου της ταλάντωσης απλού εκκρεμούς.

Παράγραφος 1: Άμεση μέτρηση του μεγέθους *Y* – Διαδοχικές μετρήσεις του *Y* – Η πυκνότητα πιθανότητας – Βασικές παραδοχές

Η πειραματική τιμή κάθε φυσικού μεγέθους προκύπτει με τη διεξαγωγή μιας συγκεκριμένης πειραματικής διαδικασίας. Το μέγεθος Y λέμε ότι μετρείται **άμεσα** εφόσον η πειραματική τιμή του προκύπτει από την ένδειξη συγκεκριμένου οργάνου της χρησιμοποιούμενης πειραματικής διάταξης. Για παράδειγμα, για τη μέτρηση του χρόνου μιας πλήρους αιώρησης απλού εκκρεμούς ορισμένου μήκους, η πειραματική διάταξη αποτελείται από το εκκρεμές και ένα χρονόμετρο. Είναι φανερό ότι για τη μέτρηση του ίδιου μεγέθους είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν διαφορετικές μεταξύ τους πειραματικές διατάξεις. Θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να χρησιμοποιήσουμε εκκρεμή διαφορετικού μήκους, ή διαφορετικά χρονόμετρα: χρονόμετρο ελατηρίου, ή ηλεκτρονικό χρονόμετρο, ή ζεύγος φωτοπυλών συνδεδεμένων με ηλεκτρονικό χρονόμετρο. Κάθε μια από αυτές τις διαφορετικές πειραματικές διατάξεις έχουν τα ακόλουθα κοινά χαρακτηριστικά:

a) Σε κάθε διάταξη το μέγεθος Y μπορεί να μετρηθεί άμεσα: εν προκειμένω, η πειραματική τιμή του χρόνου T μιας πλήρους αιώρησης προκύπτει από την ένδειξη ενός χρονομέτρου, δεν ανάγεται στην ενδιάμεση μέτρηση κάποιου άλλου μεγέθους X με το οποίο σχετίζεται μέσω κάποιου φυσικού νόμου της μορφής $T = \Phi(X)$

b) Τα χρησιμοποιούμενα όργανα, ο τρόπος συναρμολόγησης της διάταξης και οι συνθήκες διεξαγωγής του πειράματος προσδιορίζουν μια τυχαία διαδικασία, τέτοια ώστε το μετρούμενο μέγεθος Y μπορεί να θεωρηθεί ως μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών με μια πυκνότητα πιθανότητας $w(y)$, $y \in R$. ***Σε κάθε πειραματική διάταξη αντιστοιχεί διαφορετική πυκνότητα πιθανότητας w(y)***.

Κατά τη διεξαγωγή μιας μέτρησης, η πιθανότητα η τιμή του μετρούμενου μεγέθους Y να βρεθεί στο απειροστό διάστημα $[y, y + \Delta y)$ δίνεται από τη σχέση:

$$P(y \le Y < y + \Delta y) = w(y)\Delta y \tag{3a}$$

...η πιθανότητα η πειραματική τιμή του Y να βρεθεί στο πεπερασμένο διάστημα $[a, b]$ είναι:

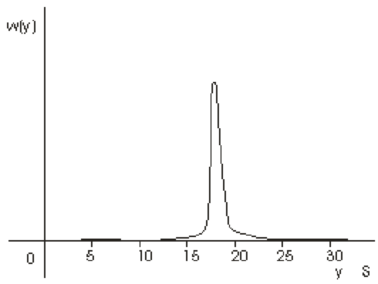
$$P(a \le Y \le b) = \int_a^b w(y)dy\,,\ \int_{-\infty}^{+\infty} w(y)dy = 1 \qquad (3β)$$

c) Το αποτέλεσμα κάθε μέτρησης σε μια ακολουθία μετρήσεων με την ίδια πειραματική διάταξη και κάτω από τις ίδιες συνθήκες διεξαγωγής του πειράματος, είναι ανεξάρτητο από το αποτέλεσμα κάθε άλλης μέτρησης. Οι μετρήσεις είναι στατιστικά ανεξάρτητες και η πυκνότητα πιθανότητας κάθε φορά είναι η ίδια ($w(y)$). Έτσι, κατά τη διεξαγωγή της k-μέτρησης σε μια ακολουθία μετρήσεων με την ίδια πειραματική διάταξη και κάτω από τις ίδιες συνθήκες, η πιθανότητα η πειραματική τιμή της μεταβλητής Y να βρεθεί στο διάστημα $[y_k, y_k + \Delta y_k)$ δίνεται από τη σχέση:

$P(y_k \le Y < y_k + \Delta y_k) = w(y_k)\Delta y_k$

Λόγω της στατιστικής ανεξαρτησίας των μετρήσεων, η πιθανότητα τα αποτελέσματα N διαδοχικών μετρήσεων 1,2,…N, να βρίσκονται αντίστοιχα στα διαστήματα:

$[y_1, y_1 + \Delta y_1), [y_2, y_2 + \Delta y_2)\ldots[y_N, y_N + \Delta y_N)$



Σχήμα 1

…είναι ίση με το γινόμενο των αντίστοιχων πιθανοτήτων:

$$\begin{aligned} &P(y_1 \le Y_1 < y_1 + \Delta y_1; y_2 \le Y_2 < y_2 + \Delta y_2 \ldots y_N \le Y_N < y_N + \Delta y_N) = \\ &= w(y_1)w(y_2)\ldots w(y_N)\Delta y_1 \Delta y_2 \ldots \Delta y_N \end{aligned} \qquad (4)$$

Η πυκνότητα πιθανότητας $w(y)$, όπως είπαμε, εξαρτάται από τη συγκεκριμένη πειραματική διάταξη και τις συνθήκες διεξαγωγής του πειράματος. Ωστόσο, η αναλυτική της έκφραση είναι άγνωστη. Παρόλα αυτά, κάθε συνάρτηση $w(y)$ που αντιστοιχεί σε μια αξιόπιστη πειραματική διαδικασία πρέπει να είναι **εντοπισμένη** σε μια ορισμένη περιοχή τιμών της τυχαίας μεταβλητής Y.
Για παράδειγμα, από τις διαδοχικές μετρήσεις του χρόνου $τ$ δέκα πλήρων αιωρήσεων απλού εκκρεμούς μήκους 0,98m, προέκυψαν οι πειραματικές τιμές:

$t_1 = 19.81s,\ t_2 = 19.67s, \ldots\ t_{10} = 19.83s$

…που αναγράφονται στον πίνακα Α. Παρατηρούμε ότι οι τιμές αυτές βρίσκονται μέσα στο διάστημα $I = (19.4,\ 20.0)$. Είναι εύλογο να περιμένουμε ότι η $w(t)$ λαμβάνει τιμές διαφορετικές από το μηδέν μέσα σε αυτό το διάστημα, ενώ οι τιμές της συγκλίνουν γρήγορα στο μηδέν όταν το t λαμβάνει τιμές εκτός του I. Ή, με διαφορετική διατύπωση: θεωρούμε πάρα πολύ απίθανο με τη συγκεκριμένη πειραματική διάταξη να πραγματοποιήσουμε αξιόπιστη μέτρηση, στην οποία η τιμή του χρόνου να προκύψει, για παράδειγμα ίση με 40s ή 5s. Ώστε η πυκνότητα πιθανότητας, αν και άγνωστη, πρέπει να έχει γράφημα παρόμοιο με εκείνο του σχήματος 1.

Παράγραφος 2: Μέση τιμή και αριθμητικός μέσος των πειραματικών τιμών του άμεσα μετρούμενου μεγέθους *Y*

Είναι γνωστό ότι στην πράξη, κατά τη διεξαγωγή μιας ακολουθίας N μετρήσεων του μεγέθους Y μέσω μιας συγκεκριμένης πειραματικής διάταξης θεωρούμε ότι ο αριθμητικός μέσος των πειραματικών τιμών $y_1, y_2 \ldots y_N$ ταυτίζεται με την αποδεκτή πειραματική τιμή του Y. Δηλαδή, δεχόμαστε ότι η αποδεκτή πειραματική τιμή του Y, ταυτίζεται με τον αριθμητικό μέσο των πειραματικών τιμών του:

$$Y_{\text{exp.}} = \bar{Y} = \frac{1}{N}(y_1 + y_2 + \ldots y_N) \qquad (5)$$

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στην παράγραφο 1, η αποδεκτή πειραματική τιμή του μεγέθους Y, προσδιορίζεται από την πυκνότητα πιθανότητας $w(y)$ που αντιστοιχεί στην πειραματική διαδικασία, σύμφωνα με τη σχέση:

$$Y_{\text{exp.}} = \mu(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y w(y) dy \qquad (6)$$

Πώς συμβιβάζονται οι σχέσεις 5 και 6; Πώς μπορούμε να αιτιολογήσουμε την υπόθεση ότι η μέση τιμή του μεγέθους Y, όπως αυτή προσδιορίζεται από τη σχέση 6, είναι ίση με τον αριθμητικό μέσο των πειραματικών τιμών του Y που υπολογίζεται από τη σχέση 5;
Πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\mu(Y) = \bar{Y} \text{ ή: } \int_{-\infty}^{+\infty} y w(y) dy = \frac{1}{N}\left(y_1 + y_2 + \ldots y_N\right) \tag{7}$$

Στη συνέχεια, σκιαγραφούνται τα βήματα για την απόδειξη της σχέσης 7.

Λήμμα: Η ανισότητα του Chebyshev
Έστω *Y* τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας $w(y)$ και τιμές στο *R*. Η μέση τιμή της *Y* είναι μ και η τυπική απόκλιση της *Y* από τη μέση τιμή της σ^2 (3,4). Τότε, για κάθε θετικό αριθμό a, ισχύει η σχέση:

$$P\left[|Y - \mu| \geq a\right] \leq \frac{\sigma^2}{a^2} \tag{8}$$

Δηλαδή η πιθανότητα του γεγονότος: "η απόλυτη τιμή της διαφοράς μιας πειραματικής τιμής της *Y* από τη μέση τιμή της μ, είναι μεγαλύτερη από τον θετικό αριθμό a", είναι ανάλογη του σ^2 και αντιστρόφως ανάλογη του a^2. Σύμφωνα με την 8, για δεδομένο $a>0$, η πιθανότητα $P\left[|Y - \mu| \geq a\right]$ είναι τόσο μικρότερη όσο πιο μικρή είναι η τυπική απόκλιση σ^2. Δηλαδή, όσο πιο μικρή είναι η τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής *Y*, τόσο πιο πολύ εντοπισμένες γύρω από τη μέση τιμή μ της *Y* είναι οι πειραματικές τιμές της *Y*.

Απόδειξη
Η μέση τιμή της *Y* δίνεται από την 6 και η τυπική απόκλιση της *Y*, από τη σχέση:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu)^2 w(y) dy \tag{9}$$

Η ποσότητα που ολοκληρώνεται στη σχέση 9, για κάθε y στο *R* είναι θετική ή μηδέν. Επομένως, περιορίζοντας την περιοχή ολοκλήρωσης, προκύπτουν οι ανισότητες:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu)^2 w(y) dy \geq \int_{|y-\mu|\geq a} (y - \mu)^2 w(y) dy \geq a^2 \int_{|y-\mu|\geq a} w(y) dy = a^2 P\left[|Y - \mu| \geq a\right]$$

από τις οποίες προκύπτει τελικά η 8.

ΟΕΔ

Ας υποθέσουμε ότι πραγματοποιούμε *N* διαδοχικά πειράματα με την ίδια διάταξη και κάτω από ταυτόσημες συνθήκες. Υπολογίζουμε τον αριθμητικό μέσο όρο $\bar{Y}$ των πειραματικών τιμών του *Y*. Αν πραγματοποιήσουμε άλλα *N* πειράματα με τον ίδιο τρόπο, η τιμή του $\bar{Y}$ θα λάβει κάποια άλλη τιμή κοκ. Με τη διαδικασία αυτή, ο αριθμητικός μέσος $\bar{Y}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια τυχαία μεταβλητή, που ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{Y} = \frac{1}{N}\left(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N\right) \tag{10}$$

όπου, οι τιμές των τυχαίων μεταβλητών $Y_1, Y_2 \ldots Y_N$ σε κάθε ακολουθία *N* μετρήσεων είναι οι πειραματικές τιμές $y_1, y_2 \ldots y_N$ του μεγέθους *Y*. Οι μεταβλητές $Y_1, Y_2 \ldots Y_N$ είναι στατιστικά ανεξάρτητες και έχουν κοινή πυκνότητα πιθανότητας $w(y)$. Υπολογίζουμε τη μέση τιμή μ_N και την απόκλιση $\sigma_N{}^2$ της $\bar{Y}$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα του Chebyshev:

$$\begin{aligned} \mu_N &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N}\left(y_1 + y_2 + \ldots + y_N\right) w(y_1) w(y_2) \ldots w(y_N) dy_1 dy_2 \ldots dy_N = \\ &= \frac{1}{N}\left(\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \ldots + \bar{Y}_N\right) = \frac{1}{N} N\mu = \mu \end{aligned} \tag{11}$$

$$\sigma_N{}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{N} (y_1 + y_2 + \ldots + y_N) - \mu \right)^2 w(y_1) w(y_2) \ldots w(y_N) dy_1 dy_2 \ldots dy_N =$$

$$= \frac{1}{N^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big((y_1 - \mu)^2 + \ldots + (y_N - \mu)^2 + 2(y_1 - \mu)(y_2 - \mu) + \ldots \Big) w(y_1) w(y_2) \ldots w(y_N) dy_1 dy_2 \ldots dy_N$$

…και δεδομένου ότι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y_1 - \mu)(y_2 - \mu) w(y_1) w(y_2) dy_1 dy_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (y_1 - \mu) w(y_1) dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (y_2 - \mu) w(y_2) dy_2 = 0$$

…συμπεραίνουμε ότι:

$$\sigma_N{}^2 = \frac{1}{N^2} \left(N\sigma^2 \right) = \frac{\sigma^2}{N} \qquad (12)$$

Με βάση τις σχέσεις 11 και 12, η ανισότητα του Chebyshev για την τυχαία μεταβλητή $\bar{Y}$ λαμβάνει τη μορφή:

$$P\left[\left| \frac{1}{N} (Y_1 + Y_2 + \ldots Y_N) - \mu \right| \geq a \right] \leq \frac{1}{N} \cdot \frac{\sigma^2}{a^2} \qquad (13)$$

για κάθε σύνολο N μετρήσεων και κάθε θετικό αριθμό a.

Από τη 13 προκύπτει ότι για μεγάλο αριθμό μετρήσεων $(N \to +\infty)$ ο αριθμητικός μέσος των αντίστοιχων πειραματικών τιμών συγκλίνει στη μέση τιμή μ του μετρούμενου μεγέθους Y. Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 1, σε κάθε διαδικασία μέτρησης η πυκνότητα πιθανότητας $w(y)$ είναι μια συνάρτηση ισχυρά εντοπισμένη γύρω από τη μέση τιμή μ (σχήμα 1), με συνέπεια η τυπική απόκλιση σ^2 να είναι πολύ μικρότερη της μονάδας (3,4).
Έτσι, σε μια πειραματική διαδικασία μέτρησης του μεγέθους Y, νομιμοποιείται η ταύτιση της μέσης τιμής του Y με το μέσο όρο των πειραματικών τιμών του Y που προκύπτουν από μια ακολουθία N διαδοχικών μετρήσεων. Το N επιλέγεται με βάση την ακρίβεια των οργάνων μέτρησης που χρησιμοποιούνται στη διάταξη.

Παράγραφος 3: Πειραματικός υπολογισμός μεγέθους *Z* που εκφράζεται συναρτήσει του άμεσα μετρούμενου μεγέθους *Y* μέσω του φυσικού νόμου *Z*=F(*Y*)

Έστω ότι συνθέτουμε μια πειραματική διαδικασία, στην οποία το φυσικό μέγεθος Z σχετίζεται με το μέγεθος Y μέσω του φυσικού νόμου:

$$Z = F(Y)$$

Το φυσικό μέγεθος Y είναι άμεσα μετρήσιμο και η πειραματική μας διάταξη ικανοποιεί τις προϋποθέσεις των παραγράφων 1 και 2.
Πραγματοποιούμε N μετρήσεις $y_1, y_2, \ldots y_N$ του μεγέθους Y και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές του μεγέθους Z: $z_1 = F(y_1), z_2 = F(y_2) \ldots z_N = F(y_N)$
Ο αριθμητικός μέσος των $z_1, z_2, \ldots z_N$ συγκλίνει στη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Z:

$$\bar{Z} = \mu(Z)$$

όπου:

$$\mu(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(y) w(y) dy \,,\; \sigma^2(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(F(y) - \mu(Z) \big)^2 w(y) dy \,,\; \sigma^2(\bar{Z}) = \frac{1}{N} \big(\mu(Z^2) - \mu^2(Z) \big) = \frac{\sigma^2(Z)}{N}$$

Ποια είναι η αποδεκτή πειραματική τιμή του μεγέθους Z;
Με την πειραματική διάταξη που χρησιμοποιούμε μπορούμε να μετρήσουμε το μέγεθος *Y* και, σύμφωνα με της παραγράφους 1 και 2, η αποδεκτή πειραματική τιμή του *Y* είναι ο αριθμητικός μέσος των πειραματικών τιμών του *Y*.
Επιπλέον γνωρίζουμε ότι στο φαινόμενο που αναπαράγουμε με την πειραματική διάταξη, το φυσικό μέγεθος Z σχετίζεται με το Y, μέσω του φυσικού νόμου $Z = F(Y)$. **Συμπεραίνουμε ότι η αποδεκτή πειραματική τιμή του Z είναι:**

$$Z_{\exp} = F(\bar{Y}) \qquad (14)$$

Συχνά συμβαίνει να εκλαμβάνεται ως πειραματική τιμή του εξαρτημένου μεγέθους Z η μέση τιμή των τιμών $z_1 = F(y_1), z_2 = F(y_2), ... z_N = F(y_N)$ και όχι η Z_{exp} που δίνεται από τη σχέση 14. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι οι δύο τιμές ταυτίζονται όταν ο φυσικός νόμος $Z = F(Y)$ είναι γραμμικός. Στη γενική, ωστόσο περίπτωση οι δύο τιμές είναι διαφορετικές.

Στη συνέχεια, θα κάνουμε μια εκτίμηση της διαφοράς των δύο τιμών $\bar{Z} = \overline{F(Y)}$ και $Z_{exp} = F(\bar{Y})$

Έστω $y_1, y_2, ... y_N$ ένα σύνολο πειραματικών τιμών του μεγέθους Y. Σύμφωνα με τις παραγράφους 1 και 2 ο αριθμητικός μέσος όρος $\bar{Y}$ των πειραματικών τιμών, μπορεί να ταυτιστεί σε πολύ καλή προσέγγιση, με τη μέση τιμή του Y:

$$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \tag{15α}$$

Ορίζουμε την τυπική απόκλιση του Y από τον αριθμητικό μέσο $\bar{Y}$ μέσω της σχέσης:

$$\bar{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(y_k - \bar{Y}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k^2 \tag{15β}$$

όπου $\varepsilon_k = y_k - \bar{Y}$. Είναι φανερό ότι τα ε_k ικανοποιούν τη σχέση:

$$\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k = 0 \tag{15γ}$$

Ο αριθμητικός μέσος του μεγέθους Z είναι:

$$\bar{Z} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}F(y_k) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}F\left(\bar{Y} + \varepsilon_k\right) \tag{16}$$

Με δεδομένο ότι οι πειραματικές τιμές του Y είναι εντοπισμένες σε μια περιοχή αρκετά μικρού εύρους γύρω από τη μέση τιμή του Y, οι ποσότητες ε_k είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Επομένως, μπορούμε να προσεγγίσουμε το 2ο μέρος της 16 αναπτύσσοντας τη συνάρτηση F σε σειρά Taylor ως προς τα ε_k. Το άθροισμα των όρων πρώτης τάξης μηδενίζεται λόγω της 15γ, οπότε καταλήγουμε στην προσεγγιστική έκφραση:

$$\bar{Z} \approx \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(F(\bar{Y}) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F(Y)}{dY^2}\right)_{Y=\bar{Y}}\varepsilon_k^2\right) = F(\bar{Y}) + \frac{\bar{\sigma}_N^{\ 2}}{2}\cdot\left(\frac{d^2F(Y)}{dY^2}\right)_{Y=\bar{Y}} \tag{17}$$

Ώστε:

$$\bar{Z} = \overline{F(Y)} \approx F(\bar{Y}) + \frac{\bar{\sigma}_N^{\ 2}}{2}\cdot\left(\frac{d^2F(Y)}{dY^2}\right)_{Y=\bar{Y}} \tag{18}$$

Παράγραφος 4: Μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με απλό εκκρεμές

Ελέγχουμε τους ισχυρισμούς των παραγράφων 1-3 στο πείραμα της μέτρησης του g με απλό εκκρεμές σταθερού μήκους. Η μέτρηση της επιτάχυνσης της βαρύτητας με ένα απλό εκκρεμές γίνεται μέσω της μέτρησης του χρόνου μιας πλήρους αιώρησης μικρού πλάτους του εκκρεμούς (της περιόδου T του εκκρεμούς), και της σχέσης που συνδέει την επιτάχυνση της βαρύτητας g με την περίοδο T.

Παραθέτουμε δύο πίνακες με πειραματικά δεδομένα και τους σχετικούς υπολογισμούς. Οι μετρήσεις που είναι καταχωρημένες στον πίνακα Α έχουν γίνει με μεγαλύτερη ακρίβεια απ' ότι εκείνες στον πίνακα Β.

Για το απλό εκκρεμές ισχύει η σχέση:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \tag{19}$$

Επομένως η σχέση (18) λαμβάνει τη μορφή:

$$\overline{g(T)} = g(\bar{T}) + \bar{\sigma}_N^{\ 2}\frac{12\pi^2 L}{\bar{T}^4} \tag{20}$$

Παρατηρούμε ότι και στα δύο σύνολα μετρήσεων οι τιμές $\overline{g(T)}$ και $g(\bar{T})$ διαφέρουν μεταξύ τους όσο προβλέπεται από τη σχέση 20. Σημειώνεται ότι η διαφορά αυτή είναι ανάλογη της τυπικής απόκλισης $\bar{\sigma}_N{}^2$. Όσο μικρότερο είναι το $\bar{\sigma}_N{}^2$, δηλαδή όσο περισσότερο εντοπισμένες είναι οι μετρήσεις γύρω από τη μέση τιμή τους, τόσο μικρότερη είναι η διαφορά της μέσης τιμής των πειραματικών τιμών του g από την αποδεκτή πειραματική τιμή $g(\bar{T})$

ΠΙΝΑΚΑΣ Α					**ΠΙΝΑΚΑΣ Β**		
Αριθμός μέτρησης	**Χρόνος 10 πλήρων αιωρήσεων (*t*), s**	**Χρόνος μιας πλήρους αιώρησης (*T*), s**	**$g(T_k)$ m/s^2**	**$(T_k\text{-}T_{exp})^2$**	**Χρόνος μιας πλήρους αιώρησης (*T*), s**	**$g(T_k)$ m/s^2**	**$(T_k\text{-}T_{exp})^2$**
1	19,81	1,981	9,859	2,25E-06	1,9	10,717	0,006561
2	19,67	1,967	9,999	0,00024025	1,96	10,071	0,000441
3	19,83	1,983	9,839	2,5E-07	1,98	9,869	1E-06
4	19,47	1,947	10,206	0,00126025	1,92	10,495	0,003721
5	19,87	1,987	9,799	2,025E-05	2,07	9,029	0,007921
6	19,99	1,999	9,682	0,00027225	2,03	9,388	0,002401
7	19,87	1,987	9,799	2,025E-05	1,96	10,071	0,000441
8	19,98	1,998	9,692	0,00024025	1,95	10,175	0,000961
9	19,93	1,993	9,740	0,00011025	2,04	9,297	0,003481
10	19,83	1,983	9,839	2,5E-07	2	9,672	0,000361
Μέση περίοδος T_{exp}		1,983			1,981		
Τυπική απόκλιση		0,00022			0,0026		
Μέση τιμή των $g(T_k)$ $\mu(g)$			**9,845**			**9,878**	
Πειραματική τιμή του g: $g(T_{exp})$			**9,844**			**9,859**	
$\mu(g)$-$g(Texp)$			**0,0016**			**0,0197**	
Διαφορά της $g(Texp)$ από τη μέση τιμή των $g(Tk)$, σύμφωνα με τη σχέση 20			**0,0016**			**0,0198**	

k_pm

Βιβλιογραφία:

1) Reif, Fundamentals of Statistical and Thermal Physics, McGraw-Hill int. eds.
2) Αποστολάτος Ν. Αριθμητική Ανάλυση, Αθήνα 1972 (εκδ. Παν. Αθηνών)
3) Feller, An Introduction to Probability Theory, 3d ed, Wiley Int. Eds.
4) Gnedenko, The Theory of Probability, Mir Puplishers, Moscow.