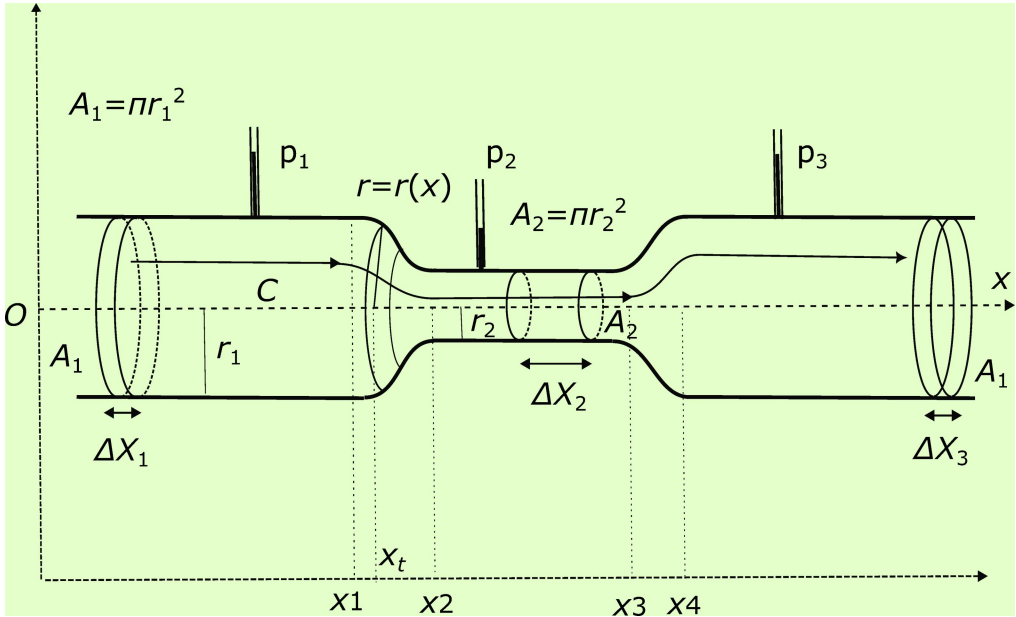


Σημειώσεις Νευτώνειας Μηχανικής στη γλώσσα της Διαφορικής Γεωμετρίας

Κωνσταντίνος Παπαμιχάλης
Δρ Θεωρητικής Φυσικής Παν. Αθηνών

$$\frac{d\bar{U}^k}{dt} + \bar{F}_{ni}^k \bar{U}^n \bar{U}^i = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{X}^k}{\partial \mathbf{x}^j} \frac{\partial \bar{X}^l}{\partial \mathbf{x}^j} \bar{\partial}_l \left(\bar{\Phi} + \frac{1}{\rho} \bar{p} \right)$$

$$\text{vol } q_{t+\delta t} = \text{vol } q_t \Rightarrow \bar{\partial}_j \bar{U}^j + \frac{1}{2 \det \bar{g}} \bar{U}^j \bar{\partial}_j (\det \bar{g}) = 0$$



© kostaspapamichalis 09-08-2024

kostaspapamichalis@gmail.com

Κωνσταντίνος Παπαμιχάλης
Σημειώσεις Νευτώνειας Μηχανικής στη Γλώσσα της Διαφορικής Γεωμετρίας

Σημειώσεις Νευτώνειας Μηχανικής στη γλώσσα της Διαφορικής Γεωμετρίας

Κωνσταντίνος Παπαμιχάλης Δρ Θεωρητικής Φυσικής Παν. Αθηνών

Πρόλογος

Οι Σημειώσεις αυτές προέκυψαν από την πολυετή ενασχόλησή μου με τη σύνθεση μοντέλων και προσομοιώσεων Νευτώνειας Μηχανικής και Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Τα φαινόμενα που περιγράφονται με μηχανικά μοντέλα διακρίνονται από τη δυνατότητά τους να αναλύονται σε ένα σύνολο σημειακών σωματιδίων που κινούνται σε μια διαφορίσιμη (ή: διαφορική) πολλαπλότητα⁽¹¹⁾, υπό την επίδραση δυνάμεων. Αυτό το βασικό χαρακτηριστικό αποτελεί θεμέλιο των μηχανικών μοντέλων, ανεξαρτήτως αν αναφερόμαστε στην Ειδική Θεωρία ή στη Νευτώνεια Μηχανική. Σε κάθε περίπτωση, το υπόβαθρο στο οποίο υπάρχουν και κινούνται τα σωματίδια, καθώς και ο δυναμικός νόμος που διέπει την κίνησή τους, συνδέονται με τη γεωμετρική δομή μιας πολλαπλότητας που επιλέγεται από τον δημιουργό του μοντέλου. Έτσι, εκφράζονται με τους όρους της Διαφορικής Γεωμετρίας.

Στις "Σημειώσεις" περιγράφω τη βασική σύνταξη της γλώσσας της Διαφορικής Γεωμετρίας που απαιτείται για τη συγκρότηση της Νευτώνειας Μηχανικής, χωρίς βαρύ μαθηματικό συμβολισμό, έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί από κάθε φυσικό, μαθηματικό ή άλλο ενδιαφερόμενο, στη σύνθεση μοντέλων ή στην επίλυση προβλημάτων. Η παράθεση και διαδοχή των εννοιών και των προτάσεων της Διαφορικής Γεωμετρίας που στοχεύουν στην εφαρμογή τους στη Νευτώνεια Μηχανική, αποτυπώνουν την προσωπική μου διαδικασία κατανόησης που έχω αποκτήσει σε αυτό το πεδίο. Έχουν, συνεπώς, το χαρακτήρα "σημειώσεων", όπως προκύπτει από τον τίτλο, και απέχουν αισθητά από το να αντιληφθεί κανείς το σύνολο της εργασίας ως ένα "standard text".

09/08/2024

Κ. Παπαμιχάλης

Σύνοψη

Στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής δημιουργούμε μαθηματικά μοντέλα τα οποία αναπαριστούν φυσικά φαινόμενα, δηλαδή μεταβολές της εμπειρικής πραγματικότητας. Το κύριο γνώρισμα των μοντέλων της Νευτώνειας μηχανικής είναι η υπόθεση ότι κάθε παρατηρούμενο φαινόμενο μπορεί να αναλυθεί μέσω ενός συνόλου σωματιδίων τα οποία κινούνται εντός ενός τρισδιάστατου Ευκλείδειου συνεχούς, υπό την επίδραση δυνάμεων. Η κίνηση των σωματιδίων ικανοποιεί τους τρεις νόμους του Newton^(1,3) και η αναλυτική μορφή των δυνάμεων καθορίζει το μοντέλο που υποθέτουμε ότι αναπαριστά το εμπειρικό γεγονός που διερευνούμε.

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε τη γλώσσα της Διαφορικής Γεωμετρίας για να περιγράψουμε τα δύο θεμελιώδη και κοινά χαρακτηριστικά των μοντέλων της Νευτώνειας Μηχανικής: α) το Ευκλείδειο συνεχές που αποτελεί το υπόβαθρο, όπου εξελίσσεται η αναπαράσταση του φυσικού φαινομένου και β) τον δυναμικό νόμο που προσδιορίζει και προβλέπει στο πλαίσιο του θεωρητικού μοντέλου την εξελικτική πορεία του φαινομένου.

Στο πρώτο (Α) μέρος της εργασίας περιγράφεται η σύνθεση και οι ιδιότητες του τρισδιάστατου Ευκλείδειου συνεχούς E_3 . Το E_3 θεωρείται ως ένα μη κενό σύνολο σημείων, που αποκτά δομή μέσω της "συσχέτισης" του με έναν τρισδιάστατο Ευκλείδειο γραμμικό χώρο V_3 , που θα τον ονομάζουμε "συσχετισμένο χώρο" με το E_3 .

Στις ενότητες Α1, Α2 και Α3 αναλύουμε τον μηχανισμό της συσχέτισης του E_3 με τον γραμμικό χώρο V_3 και δείχνουμε πώς ο E_3 αποκτά αλγεβρική δομή, τοπολογία και μετρική. Ορίζουμε την έννοια της καμπύλης στον E_3 και την έννοια του εφαπτομενικού χώρου σε κάθε σημείο του. Συγκροτούμε τη δομή των εφαπτομενικών χώρων και εισάγουμε τις έννοιες της εφαπτομενικής δέσμης και του διανυσματικού πεδίου. Διερευνούμε πώς μεταβάλλονται τα στοιχεία βάσης και η μετρική κάθε εφαπτόμενου χώρου κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων του E_3 .

Στην ενότητα Α4 ορίζουμε τις διαφορικές 1, 2 και 3 μορφές στο E_3 και βρίσκουμε πώς μεταβάλλονται κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων. Το στοιχείο όγκου ορίζεται ως η διαφορική 3-μορφή που διατηρείται αναλλοίωτη κάτω από κάθε μετασχηματισμό συντεταγμένων. Ορίζουμε την έννοια της επιφάνειας S στο E_3 και τα χαρακτηριστικά της. Από τις παραμετρικές εξισώσεις που την προσδιορίζουν προκύπτουν οι αναλυτικές εκφράσεις των καμπύλων επί της S , η δομή των εφαπτόμενων χώρων στα σημεία της S , ο μετρικός τανυστής και οι διαφορικές

μορφές. Διερευνούμε πώς μεταβάλλονται τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας κάτω από έναν μετασχηματισμό των παραμέτρων που προσδιορίζουν τα σημεία της. Το στοιχείο εμβαδού της S ορίζεται ως η διαφορική 2 μορφή που διατηρείται αναλλοίωτη κάτω από κάθε μετασχηματισμό παραμέτρων.

Στην ενότητα A5 ορίζουμε την έννοια της συνοχής στο E_3 ή/και σε επιφάνειες του E_3 , της παράλληλης μετατόπισης και της συναλλοίωτης διαφορίσης. Ορίζουμε την έννοια της κυκλοφορίας διανυσματικού πεδίου κατά μήκος κλειστής καμπύλης του E_3 και τον στροβιλισμό του πεδίου.

Στην ενότητα A6 αναπτύσσουμε παραδείγματα υπολογισμού της συνοχής και της αναλυτικής έκφρασης της συναλλοίωτης διαφορίσης και του στροβιλισμού διανυσματικού πεδίου σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες του E_3 .

Στο δεύτερο (B) μέρος διατυπώνουμε τους νόμους της Νευτώνειας Μηχανικής που αφορούν στην κίνηση σωματιδίων και στη ροή ασυμπίεστου ρευστού στο E_3 , στη γλώσσα της γεωμετρίας του τρισδιάστατου Ευκλείδειου συνεχούς.

Στην ενότητα B1 διατυπώνουμε τον 2ο νόμο του Newton ως προς ένα αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων του E_3 . Εισάγουμε τις έννοιες του αδρανειακού συστήματος αναφοράς, του απόλυτου χρόνου, του ελεύθερου σωματιδίου και της γεωδαιτικής καμπύλης, και επαναδιατυπώνουμε τον 1ο νόμο του Newton. Θεωρούμε την κίνηση σωματιδίου πάνω σε επιφάνεια S του E_3 και γράφουμε το 2ο νόμο του Newton που καθορίζει την τροχιά του. Ορίζουμε την ελεύθερη κίνηση σωματιδίου επί της S . Δείχνουμε ότι το σωματίδιο που κινείται ελεύθερα επί της S διαγράφει μια γεωδαιτική καμπύλη της S . Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε δύο θεμελιώδεις ιδιότητες μιας γεωδαιτικής καμπύλης.

Στην ενότητα B2 εφαρμόζουμε τα συμπεράσματα και τις σχέσεις που διαμορφώσαμε στην ενότητα B1, στην κίνηση ενός σωματιδίου ως προς ένα πολικό, αδρανειακό σύστημα αναφοράς του E_3 . Βρίσκουμε την τροχιά σωματιδίου που κινείται ελεύθερα επί κυλινδρικής επιφάνειας του E_3 .

Στην ενότητα B3 γράφουμε τον 2ο νόμο του Newton για την κίνηση σωματιδίου ως προς ένα σφαιρικό, αδρανειακό σύστημα αναφοράς του E_3 . Γράφουμε και διερευνούμε τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση σωματιδίου επί σφαιρικής επιφάνειας του E_3 .

Στην ενότητα B4 μελετάμε την κίνηση ασυμπίεστου ρευστού στο E_3 . Ορίζουμε την έννοια του ασυμπίεστου ρευστού, της ροής και της "γραμμής ροής". Παράγουμε τη συνθήκη της ροής ασυμπίεστου ρευστού. Ξεκινώντας από τον 2ο νόμο του Newton, παράγουμε την εξίσωση του Euler που προσδιορίζει την κίνηση ιδανικού ρευστού κάτω από τη δράση εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων. Παράγουμε τη εξίσωση της Υδροστατικής και την "αρχή" του Αρχιμήδη ως ειδικές περιπτώσεις της εξίσωσης του Euler. Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Euler στη μελέτη της ομαλής περιστροφής ιδανικού ρευστού. Εξάγουμε την εξίσωση του Bernoulli ως ολοκλήρωμα της εξίσωσης του Euler. Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli στην μελέτη της κίνησης ιδανικού ρευστού σε σωληνοειδή περιοχή με αξονική συμμετρία και μεταβλητή διατομή.

Περιεχόμενα

Μέρος Α: Σύνθεση και ιδιότητες του τρισδιάστατου Ευκλείδειου συνεχούς E_3

Ενότητα Α1. Σύνθεση του Ευκλείδειου συνεχούς E_3 μέσω της συσχέτισης του με έναν Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο V_3

Ενότητα Α2. Καρτεσιανές συντεταγμένες, Καρτεσιανά συστήματα αναφοράς και τοπολογία στο Ευκλείδειο συνεχές E_3

Καρτεσιανά συστήματα αναφοράς στο E_3 - Ορισμός τοπολογίας στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 - Σύγκλιση ακολουθίας σημείων του E_3 - Συνεχείς συναρτήσεις στο E_3 - Διαφορίσιμες συναρτήσεις στο E_3 - Διανυσματικές συναρτήσεις στο E_3

Ενότητα Α3. Καμπύλες στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 - Εφαπτομενικοί χώροι στα σημεία του E_3 - Μετασχηματισμοί συντεταγμένων - Πεδία στην εφαπτόμενη δέσμη του E_3

Καμπύλες στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 - Εφαπτομενικοί χώροι στα σημεία του E_3 - Καρτεσιανές βάσεις και μετρικός τανυστής στους εφαπτομενικούς χώρους του E_3 - Απόσταση γειτονικών σημείων του Ευκλείδειου συνεχούς - Ευκλείδεια μετρική - Μετασχηματισμοί συντεταγμένων - Κάθε μετασχηματισμός συντεταγμένων επάγει έναν γραμμικό μετασχηματισμό σε κάθε εφαπτομενικό χώρο του Ευκλείδειου συνεχούς - Ο μετρικός τανυστής ως προς ένα μη Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Ενότητα Α4. Διαφορικές μορφές στο E_3 - Στοιχείο όγκου στο E_3 - Επιφάνειες στο E_3 - Στοιχείο εμβαδού σε επιφάνεια του E_3

Διαφορικές 1-μορφές - 1-μορφές και μετασχηματισμοί συντεταγμένων - Διαφορικές 2-μορφές - Διαφορικές 3-μορφές - Το στοιχείο όγκου - Επιφάνειες στο E_3 - Μετασχηματισμοί των παραμέτρων επιφάνειας - Διαφορικές μορφές επί επιφάνειας και το στοιχείο εμβαδού - Παράδειγμα

Ενότητα Α5. Διανυσματικά πεδία - Συνοχή - Παράλληλη μετατόπιση - Συναλλοίωτη διαφορίαση - Κυκλοφορία και στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου

Διανυσματικά πεδία στο E_3 - Η έννοια της συνοχής στο E_3 - Παράλληλη μετατόπιση διανύσματος κατά μήκος καμπύλης του E_3 - Απειροστή μεταβολή διανυσματικού πεδίου κατά μήκος καμπύλης του E_3 - Συναλλοίωτο διαφορικό διανυσματικού πεδίου κατά μήκος απειροστής μετατόπισης - Υπολογισμός της κυκλοφορίας (circulation) διανυσματικού πεδίου κατά μήκος κλειστής καμπύλης - Στροβιλισμός του πεδίου

Ενότητα Α6. Αναλυτική έκφραση του στροβιλισμού, της συνοχής και της συναλλοίωτης διαφορίασης σε πολικές και σφαιρικές συντεταγμένες

Α6-Α: Πολικές συντεταγμένες

Α6-Β: Σφαιρικές συντεταγμένες

Μέρος Β: Μαθηματικά μοντέλα της Νευτώνειας Μηχανικής στο Ευκλείδειο συνεχές E_3

Ενότητα Β1: Ο 2ος Νόμος του Newton σε αυθαίρετο σύστημα αναφοράς του E_3

Μαθηματικά μοντέλα της Νευτώνειας Μηχανικής - Αδρανειακά συστήματα αναφοράς, ελεύθερα σωματίδια και γεωδαιτικές γραμμές - Κίνηση σωματιδίου σε επιφάνεια S του E_3 - Ελεύθερη κίνηση σωματιδίου επί της επιφάνειας S - Δύο ιδιότητες μιας γεωδαιτικής καμπύλης

Ενότητα Β2: Ο 2ος Νόμος του Newton σε πολικές συντεταγμένες

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση σε πολικές συντεταγμένες - Κίνηση σωματιδίου επί κυλινδρικής επιφάνειας - Γεωδαιτικές καμπύλες κυλινδρικής επιφάνειας - Δυνάμεις συνδέσμων

Ενότητα Β3: Ο 2ος νόμος του Newton σε σφαιρικές συντεταγμένες

Κίνηση σωματιδίου επί σφαιρικής επιφάνειας - Γεωδαιτικές καμπύλες σφαιρικής επιφάνειας - Δυνάμεις συνδέσμων

Ενότητα Β4: Κίνηση ασυμπίεστου ρευστού στο Ευκλείδειο συνεχές Ε3 - Η εξίσωση του Euler - Το θεώρημα του Bernoulli

Ορισμός της ροής ρευστού στο Ευκλείδειο συνεχές - Ασυμπίεστη ροή και ασυμπίεστο ρευστό - Διατήρηση της μάζας - Από τον 2ο Νόμο του Newton στην εξίσωση του Euler - Η εξίσωση της Υδροστατικής - Το θεώρημα του Αρχιμήδη - Το σχήμα της ελεύθερης επιφάνειας ομαλά περιστρεφόμενου ασυμπίεστου ρευστού - Το θεώρημα του Bernoulli - Κίνηση ιδανικού ρευστού σε σωληνοειδή περιοχή με αξονική συμμετρία και μεταβλητή διατομή

Αναφορές

Μέρος Α

Σύνθεση και ιδιότητες του τρισδιάστατου Ευκλείδειου συνεχούς E_3

A1. Σύνθεση του Ευκλείδειου συνεχούς E_3 μέσω της συσχέτισης του με έναν Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο V_3 ^(1,2,7,8)

Σύνοψη: Θεωρούμε ένα άμορφο, απροσδιόριστο, μη κενό σύνολο σημείων E_3 και έναν Ευκλείδειο γραμμικό χώρο V_3 . **Συσχετίζουμε** το E_3 με τον χώρο V_3 ορίζοντας μια απεικόνιση "συσχετισμού" μεταξύ των δύο συνόλων. Προσδίδουμε στην απεικόνιση "συσχετισμού" ορισμένες ιδιότητες, ώστε αφενός να μπορούμε να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα κάθε σημείο του E_3 και αφετέρου να μεταφέρουμε την αλγεβρική δομή του V_3 στο E_3 . Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις λέμε ότι E_3 είναι ένα τρισδιάστατο **Ευκλείδειο συνεχές**. Στην παρούσα ενότητα αναλύουμε το μηχανισμό της συσχέτισης των δύο συνόλων.

Έστω E_3 ένα μη κενό σύνολο σημείων και V_3 ένας τρισδιάστατος, πραγματικός και Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος. Το σύνολο E_3 ορίζεται ως "**Ευκλείδειο συνεχές**", εφόσον ο χώρος V_3 είναι **συσχετισμένος** με το E_3 σύμφωνα με τις ακόλουθες παραδοχές και προτάσεις:

Για κάθε ζεύγος σημείων X, Y του E_3 ορίζεται η απεικόνιση $E_3 \times E_3 \ni (X, Y) \rightarrow \overline{XY} \in V_3$ που έχει τις ιδιότητες:

α) Για κάθε ζεύγος σημείων X, Y του E_3 υπάρχει ακριβώς ένα διάνυσμα U του V_3 τέτοιο ώστε: $\overline{XY} = U$. Τα διατεταγμένο ζεύγη σημείων (X, Y) του E_3 ονομάζονται **διανύσματα του E_3** . Η απεικόνιση $E_3 \times E_3 \ni (X, Y) \rightarrow \overline{XY} \in V_3$ είναι επί, αλλά **δεν** είναι 1-1: **σε κάθε διάνυσμα U του V_3** αντιστοιχούν άπειρα ζεύγη σημείων (X, Y) του E_3 που ικανοποιούν τη συνθήκη $\overline{XY} = U$.

Για κάθε $U \in V_3$ η συνθήκη $\overline{XY} = U$ ορίζει μια **κλάση ίσων διανυσμάτων του E_3** . Οι κλάσεις ίσων διανυσμάτων του E_3 που ορίζονται από διαφορετικά διανύσματα του V_3 , είναι μεταξύ τους ξένα σύνολα.

β) Επιλέγουμε ένα αυθαίρετο σημείο O του E_3 . Τότε, για κάθε διάνυσμα U του V_3 υπάρχει **ακριβώς ένα** σημείο X του E_3 , ώστε $\overline{OX} = U$. Η απεικόνιση $E_3 \ni X \rightarrow \overline{OX} = U \in V_3$ είναι ένα προς ένα και επί.

γ) Για $U=0$ (όπου 0 συμβολίζει το ουδέτερο στοιχείο του V_3) ισχύει: $\overline{XX} = 0$, για κάθε $X \in E_3$. Αντιστρόφως: αν $\overline{XY} = 0$ τότε τα X και Y ταυτίζονται: $X \equiv Y$.

δ) Για κάθε $X, Y, Z \in E_3$ ισχύει: $\overline{XY} + \overline{YZ} = \overline{XZ}$.

Οι ιδιότητες (α) έως (δ) μεταφέρουν την αλγεβρική δομή του γραμμικού χώρου V_3 στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 . Από τις (γ) και (δ) προκύπτει η αλήθεια των προτάσεων:

ε) Για κάθε $X, Y \in E_3$ ισχύει: $\overline{XY} + \overline{YX} = \overline{XX} = 0 \Rightarrow \overline{XY} = -\overline{YX}$.

στ) $\overline{XY} + \overline{YZ} + \overline{ZX} = 0 \Rightarrow \overline{XY} = \overline{ZX} - \overline{YZ}$.

Σύμφωνα με την ιδιότητα (β), μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε σημείο O του E_3 ως "**αρχή**" και να προσδιορίσουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο του X , από το O και ένα **μονοσήμαντα ορισμένο** διάνυσμα του V_3 :

$$X \leftrightarrow \overline{OX} = U_X \in V_3 \quad (A1.1)$$

[Επιστροφή στα περιεχόμενα](#)

A2. Καρτεσιανές συντεταγμένες, Καρτεσιανά συστήματα αναφοράς και τοπολογία στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 ^(5,8,9)

Σύνοψη: Στον συσχετισμένο Ευκλείδειο χώρο V_3 , επιλέγουμε μια ορθογώνια και μοναδιαία βάση διανυσμάτων. Κάθε τέτοια βάση λέμε ότι ορίζει ένα **Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων** στον V_3 . Κάθε διάνυσμα του V_3 προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις **Καρτεσιανές συντεταγμένες** του ως προς τη βάση που επιλέξαμε.

Στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 που είναι συσχετισμένο με τον V_3 , ορίζουμε ένα σημείο O ως “**αρχή**”. Κάθε σημείο X του E_3 , προσδιορίζεται από ένα μοναδικό διάνυσμα $\overline{OX} = U_X \in V_3$ (ενότητα A1), το οποίο, με τη σειρά του προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του ως προς ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του V_3 . Το σημείο O και το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του V_3 που έχουμε επιλέξει ονομάζεται **Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς του Ευκλείδειου συνεχούς E_3** . Κάθε σημείο του E_3 προσδιορίζεται από μια μοναδική τριάδα συντεταγμένων, ως προς ένα Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Στον διανυσματικό χώρο V_3 ορίζεται μια “φυσική” τοπολογία, από το γεγονός ότι ο V_3 είναι πραγματικός γραμμικός χώρος^(5,8,9). Μεταφέρουμε την τοπολογία αυτή στο E_3 : Ορίζουμε σύγκλιση ακολουθιών σημείων, συνεχείς συναρτήσεις, καμπύλες και παραγωγή στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 .

Καρτεσιανά συστήματα αναφοράς στο E_3

Δεδομένου ότι ο V_3 είναι ένας πραγματικός, Ευκλείδειος γραμμικός χώρος, μπορούμε πάντοτε να βρούμε σε αυτόν βάση ορθογώνιων και μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{x}_j, j = 1, 2, 3$. Κάθε διάνυσμα $U \in V_3$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης^(5,8,9).

Έστω:

$$U = \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j u^j, u^j \in R \quad (A2.1)$$

Ως προς τη βάση $\hat{x}_j, j = 1, 2, 3$, το εσωτερικό γινόμενο στον Ευκλείδειο χώρο V_3 και η norm του διανύσματος U προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}_j, \hat{x}_k \rangle &= \delta_{jk} \Rightarrow \|U\| = \sqrt{\langle U, U \rangle} = \sqrt{\left\langle \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j u^j, \sum_{k=1}^3 \hat{x}_k u^k \right\rangle} = \\ &= \sqrt{\sum_{j,k=1}^3 \langle \hat{x}_j, \hat{x}_k \rangle u^j u^k} = \left((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (A2.2)$$

Ορίζουμε ως “αρχή” του E_3 ένα αυθαίρετο σημείο του O (ενότητα A1). Τότε, κάθε σημείο $X \in E_3$ προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από το διάνυσμα $\overline{OX} = U_X = \hat{x}_j x^j \in V_3$. Η διατεταγμένη τριάδα $x \equiv (x^1, x^2, x^3)$ προσδιορίζει τις “**Καρτεσιανές συντεταγμένες**” του X . Το σημείο O του E_3 και η ορθογώνια και μοναδιαία βάση $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$ του V_3 ορίζουν ένα **Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων**, (ή: Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς) (O, x) στο E_3 .

Ορισμός τοπολογίας στο Ευκλείδειο συνεχές E_3

Θεωρούμε τη βάση των ορθογώνιων και μοναδιαίων διανυσμάτων $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$ του V_3

$$\text{Για } X, Y, O \in E_3 \text{ ισχύει: } \overline{XY} = \overline{OY} - \overline{OX} \equiv U_Y - U_X = \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j (y^j - x^j) \quad (A2.3)$$

Για $\varepsilon > 0$, ορίζουμε ως ε -ανοιχτή περιοχή του σημείου $X \in E_3$ το υποσύνολο του E_3 ^(5,8):

$$N_\varepsilon(X) = \left\{ Y \in E_3 : \overline{XY} = \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j (y^j - x^j) \text{ όπου: } |y^j - x^j| < \varepsilon \text{ για κάθε } j = 1, 2, 3 \right\} \quad (A2.4)$$

Έστω A ένα υποσύνολο του E_3 , και $Z \in A$. Λέμε ότι το Z είναι ένα **εσωτερικό σημείο** του A $\Leftrightarrow$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: $N_\varepsilon(Z) \subset A$
ορισμός

Θα λέμε ότι το A είναι ένα **ανοικτό** σύνολο στο E_3 $\Leftrightarrow$ κάθε σημείο $X \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A .
ορισμός

Οι ορισμοί της περιοχής και του ανοικτού συνόλου ορίζουν μια **τοπολογία**^(5,8,9) στο E_3 .

Πρόταση A2-1

Κάθε περιοχή $N_\varepsilon(X), X \in V$ είναι ανοικτό σύνολο^(5,8).

Απόδειξη:

Έστω $Y \in N_\varepsilon(X)$, $Y \neq X$. Αρκεί να δείξουμε ότι το Y είναι εσωτερικό σημείο της $N_\varepsilon(X)$, δηλαδή ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $N_\delta(Y) \subset N_\varepsilon(X)$

Αν υπάρχει τέτοιο δ , θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη: $Z \in N_\delta(Y) \Rightarrow Z \in N_\varepsilon(X)$ ή:

$$|z^j - y^j| < \delta \Rightarrow |z^j - x^j| < \varepsilon \text{ για κάθε } j = 1, 2, 3$$

Αν η συνθήκη $|z^j - y^j| < \delta$ είναι αληθής, τότε αληθεύουν οι ανισότητες:

$$|z^j - x^j| \leq |z^j - y^j| + |y^j - x^j| \leq \delta + \max_{j=1,2,3} (|y^j - x^j|) \quad (\text{A2.5})$$

Από την A2.5 συνεπάγεται ότι για να είναι αληθής η $|z^j - x^j| < \varepsilon$ για κάθε $j=1,2,3$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: $\delta + \max_{j=1,2,3} (|y^j - x^j|) < \varepsilon$ (A2.6)

Δεδομένου ότι $Y \in N_\varepsilon(X)$, $Y \neq X$, ισχύει: $|y^j - x^j| < \varepsilon$ για κάθε $j=1,2,3$, άρα και $\max_{j=1,2,3} (|y^j - x^j|) < \varepsilon$

...από την οποία έπεται ότι μπορούμε να διαλέξουμε το δ ώστε: $\delta = \frac{\varepsilon - \max_{j=1,2,3} (|y^j - x^j|)}{2} > 0$

Τότε όμως, από την A2.5 προκύπτει:

$$|z^j - x^j| \leq |z^j - y^j| + |y^j - x^j| \leq \frac{\varepsilon - \max_{j=1,2,3} |y^j - x^j|}{2} + \max_{j=1,2,3} |y^j - x^j| < \frac{\varepsilon + \varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{ΟΕΔ}$$

Σύγκλιση ακολουθίας σημείων του E_3

Έστω μια ακολουθία X_n $n=1,2,\dots$ σημείων του E_3 . Η X_n λέμε ότι συγκλίνει σε ένα σημείο $X \in E_3$ $\Leftrightarrow$ για κάθε περιοχή $N_\varepsilon(X)$, υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\varepsilon)$ ώστε: $n > n(\varepsilon) \Rightarrow X_n \in N_\varepsilon(X)$ ορισμ.

Το X ονομάζεται όριο της X_n . Γράφουμε: $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$

Πρόταση A2-2

Έστω ότι η ακολουθία X_n $n=1,2,\dots$ σημείων του E_3 συγκλίνει στο $X \in E_3$. Θεωρούμε ένα Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O, x) του E_3 . Τότε, οι ακολουθίες των Καρτεσιανών συντεταγμένων των X_n ως προς το (O, x) , συγκλίνουν στις αντίστοιχες συντεταγμένες του X .

Απόδειξη:

Συμβολίζω x_n^j $j=1,2,3$ τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του X_n και x^j τις αντίστοιχες συντεταγμένες του X .

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\varepsilon)$, ώστε για κάθε $n > n(\varepsilon)$ συνεπάγεται ότι $X_n \in N_\varepsilon(X)$

$$X_n \in N_\varepsilon(X) \Rightarrow |x_n^j - x^j| < \varepsilon \text{ για κάθε } n > n(\varepsilon)$$

...από την οποία έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^j = x^j$ ΟΕΔ

Συνεχείς συναρτήσεις στο E_3

Έστω συνάρτηση $F : E_3 \supseteq A \rightarrow F(A) = B \subseteq E_3$

Η F λέμε ότι είναι **συνεχής** στο σημείο $X \in A \Leftrightarrow$ για κάθε ακολουθία σημείων X_n του A που συγκλίνει στο X , ισχύει: $\lim_{n \rightarrow \infty} F(X_n) = F(X)$, ή ισοδύναμα:

Για κάθε περιοχή $N_\varepsilon(F(X))$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: $Y \in N_{\delta(\varepsilon)}(X) \Rightarrow F(Y) \in N_\varepsilon(F(X))$

Ή:

"Για κάθε περιοχή $N_\varepsilon(F(X))$, υπάρχει περιοχή $N_{\delta(\varepsilon)}(X)$ που περιέχεται στο σύνολο $F^{-1}(N_\varepsilon(F(X)))$

Δηλαδή, η αντίστροφη εικόνα της περιοχής $N_\varepsilon(Y)$ όπου $Y=F(X)$, είναι ανοικτό σύνολο: για κάθε $X \in F^{-1}(N_\varepsilon(Y))$ υπάρχει $N_{\delta(\varepsilon)}(X) \subseteq F^{-1}(N_\varepsilon(Y))$ ^(5,8)

Διαφορίσιμες συναρτήσεις στο E_3 ^(5,8,9)

Έστω X και Y δύο "γειτονικά" σημεία του E_3 . Το Y θεωρείται γειτονικό του X , εφόσον βρίσκεται σε μια περιοχή $N_\varepsilon(X)$, όπου το ε είναι θετικός αριθμός όσο κοντά στο μηδέν επιθυμούμε. Ως προς

το Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O, x) του E_3 , το διάνυσμα $\overline{XY}$ του συσχετισμένου χώρου V_3 γράφεται:

$$\overline{XY} = \overline{OY} - \overline{OX} = \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j (y^j - x^j) = \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j \Delta x^j \text{ όπου: } \Delta x^j \equiv y^j - x^j$$

Σύμφωνα με την τοπολογία που έχουμε ορίσει στον E_3 , ισχύει:

$$Y \in N_\varepsilon(X) \Rightarrow |\Delta x^j| < \varepsilon \text{ για κάθε } j = 1, 2, 3$$

Θεωρούμε συνεχή πραγματική συνάρτηση $F : E_3 \rightarrow R$ και τα γειτονικά σημεία X και Y του E_3 :

$$\overline{OX} = \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j x^j, \overline{OY} = \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j y^j, \text{ όπου: } y^j = \begin{cases} x^j & \text{για } j \neq k \\ x^j + \Delta x^j & \text{για } j = k \end{cases}$$

Ορίζουμε την k -μερική παράγωγο της F ^(5,8,9) στο X , το όριο (εφόσον υπάρχει):

$$\partial_k F(x) \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x^k} = \lim_{\text{ορισμ. } \Delta x^k \rightarrow 0} \frac{F(y) - F(x)}{\Delta x^k} \quad (A2.7)$$

Η **διαφορική μεταβολή** της F κατά μήκος του απειροστού διανύσματος:

$$\Delta X = \overline{XY} = \sum_{j=1}^3 \hat{x}_j \Delta x^j \text{ όπου για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ ισχύει: } 0 < |\Delta x^j| < \varepsilon$$

$$\dots \text{υπολογίζεται από τη σχέση: } \Delta F(x) = \sum_{k=1}^3 \partial_k F(x) \Delta x^k \quad (A2.8)$$

Διανυσματικές συναρτήσεις στο E_3

Έστω (O, x) Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς του E_3 και η απεικόνιση:

$$f : R \supseteq I \rightarrow f(I) \subseteq E_3$$

Υποθέτω ότι ισχύουν οι συνθήκες: α) το I είναι ένα ανοικτό διάστημα του συνόλου των πραγματικών αριθμών R , β) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Τότε, μπορούμε να δείξουμε την αλήθεια των προτάσεων^(5,8):

Η εικόνα κάθε σημείου $\sigma \in I$ είναι ένα μονοσήμαντα ορισμένο σημείο $X_\sigma = f(\sigma)$ του E_3 . Ως προς το Καρτεσιανό σύστημα (O, x) , το X_σ προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες $x(\sigma) \equiv (x^1(\sigma), x^2(\sigma), x^3(\sigma))$ του διανύσματος $\overline{OX_\sigma} = U_{X_\sigma} = \hat{x}_j x^j(\sigma) \in V_3$

Για κάθε σημείο σ του I υπάρχει ακριβώς μια τριάδα $x(\sigma)$ που ορίζει τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του $X_\sigma = f(\sigma) \in E_3$. Έπεται ότι οι απεικονίσεις $I \ni \sigma \rightarrow f^j(\sigma) = x^j(\sigma)$ είναι καλά ορισμένες. Τις ονομάζουμε **συνιστώσες της διανυσματικής συνάρτησης f** .

Από τον ορισμό της συνέχειας έπεται ότι αν η συνάρτηση f είναι συνεχής, τότε και οι συνιστώσες της ως προς κάθε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι συνεχείς συναρτήσεις στο I .

Θα λέμε ότι **η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο I** , αν και μόνο αν οι συνιστώσες της ως προς το σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων (O, x) είναι παραγωγίσιμες (διαφορίσιμες) συναρτήσεις στο I .

Σημείωση: Για απλοποίηση του συμβολισμού, χρησιμοποιούμε τη σύμβαση άθροισης του Einstein^(4,6). Για παράδειγμα, γράφουμε (σχέση A2.8):

$$\Delta F(x) = \sum_{k=1}^3 \partial_k F(x) \Delta x^k \equiv \partial_k F(x) \Delta x^k$$

Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο I , ορίζουμε την **παράγωγο** $\dot{f}(\sigma)$ της f ως προς το Καρτεσιανό σύστημα (O, x) την απεικόνιση:

$$I \ni \sigma \rightarrow \dot{f}(\sigma) = \hat{x}_j \dot{f}^j(\sigma) \equiv \hat{x}_j \frac{df^j(\sigma)}{d\sigma} \in V_3 \quad (A2.9)$$

Ο πίνακας $[\dot{f}^1(\sigma), \dot{f}^2(\sigma), \dot{f}^3(\sigma)]$ ονομάζεται **διαφορικό** της f στο σημείο $X_\sigma = f(\sigma) \in E_3$ ως προς το Καρτεσιανό σύστημα (O, x) .

A3. Καμπύλες στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 - Εφαπτομενικοί χώροι στα σημεία του E_3 - Μετασχηματισμοί συντεταγμένων - Πεδία στην εφαπτομενική δέσμη του E_3

Σύνοψη: Ορίζουμε την έννοια της καμπύλης στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 και τα εφαπτόμενα διανύσματα σε κάθε σημείο της. Θεωρούμε τυχαίο σημείο X του E_3 και το σύνολο K_X όλων τις καμπυλών που διέρχονται από το X . Συνθέτουμε το σύνολο $T_X E_3$ που παράγεται από τα εφαπτόμενα στο σημείο X διανύσματα κάθε καμπύλης C που ανήκει στο K_X . Δείχνουμε ότι το $T_X E_3$ είναι ένας τρισδιάστατος διανυσματικός χώρος. Τον ονομάζουμε **εφαπτομενικό (ή εφαπτόμενο) χώρο** (tangent space) **του E_3 στο X** . Ορίζουμε την εφαπτομενική δέσμη (tangent bundle) του E_3 .

Θεωρούμε ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αναφοράς (O, x) . Σε κάθε εφαπτομενικό χώρο $T_X E_3$, $X \in E_3$ ορίζουμε την **τοπική Καρτεσιανή βάση** που επάγεται από το σύστημα αναφοράς (O, x) . Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των διανυσμάτων της τοπικής βάσης και εισάγουμε την έννοια του **μετρικού τανυστή στο E_3** . Ορίζουμε τη **μετρική του Ευκλείδειου συνεχούς** ως την απόσταση δύο απειροστά γειτονικών σημείων του και την εκφράζουμε συναρτήσει του μετρικού τανυστή.

Εισάγουμε την έννοια του **μετασχηματισμού συντεταγμένων** στο E_3 και παράγουμε τον αντίστοιχο γραμμικό μετασχηματισμό συντεταγμένων που επάγεται στους εφαπτόμενους χώρους του. Υπολογίζουμε τη μορφή των διανυσμάτων βάσης κάθε εφαπτομενικού χώρου στις νέες συντεταγμένες και την αναλυτική έκφραση της μετρικής του χώρου. Ορίζουμε την έννοια του διανυσματικού πεδίου στο E_3 .

Καμπύλες στο Ευκλείδειο συνεχές E_3

Ως καμπύλη C στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 ορίζουμε κάθε **διαφορίσιμη** απεικόνιση ενός διαστήματος I των πραγματικών αριθμών R , στο E_3 :

$$C : R \supseteq I \rightarrow E_3; I \ni \sigma \rightarrow X_\sigma = C(\sigma) \in E_3$$

...που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

α) Για κάθε Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O, x) του E_3 , ορίζεται η καμπύλη c του συσχετισμένου χώρου V_3 από τη σχέση:

$$c(\sigma) = \overline{OX} \Big|_\sigma = \hat{x}_j c^j(\sigma)$$

Οι συντεταγμένες $c^j(\sigma)$ των σημείων της καμπύλης C είναι διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις.

β) Ως **εφαπτόμενο διάνυσμα** ΔX στο σημείο $X \equiv C_\sigma$ της C , ορίζεται κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα της αντίστοιχης καμπύλης $c : c(\sigma) = \overline{OX} = \overline{OC}_\sigma$ του συσχετισμένου χώρου V_3 στο σημείο της:

$$c(\sigma) = \overline{OC}_\sigma = \hat{x}_j c^j(\sigma) :$$

$$\Delta X = \lim_{\Delta\sigma' \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\sigma'} (\overline{OC}_{\sigma+\Delta\sigma'} - \overline{OC}_\sigma) \cdot \Delta\sigma = \frac{dc(\sigma)}{d\sigma} \Delta\sigma = \hat{x}_j \frac{dc^j(\sigma)}{d\sigma} \Delta\sigma \in V_3, \Delta\sigma \in R \quad (A3.1)$$

$$\text{συμβολίζουμε: } \frac{dc^j(\sigma)}{d\sigma} \equiv \dot{c}^j(\sigma)$$

Ο εφαπτόμενος χώρος της C στο $X \equiv C_\sigma$ είναι ο μονοδιάστατος γραμμικός χώρος που παράγεται από τα διανύσματα ΔX , για κάθε πραγματικό αριθμό $\Delta\sigma$.

Σημείωση: Το εφαπτόμενο διάνυσμα ΔX είναι ανεξάρτητο της επιλογής της αρχής O του συστήματος αναφοράς. Αν (O, x) , (O', x') δύο διαφορετικά Καρτεσιανά συστήματα αναφοράς, ισχύει:

$$\Delta X = \Delta\sigma \frac{d}{d\sigma} \overline{OC}_\sigma = \Delta\sigma \frac{d}{d\sigma} (\overline{OO'} + \overline{O'C}_\sigma) = \Delta\sigma \frac{d}{d\sigma} \overline{O'C}_\sigma$$

Εφαπτομενικοί χώροι στα σημεία του E_3

Σε κάθε σημείο X του E_3 ορίζουμε το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων κάθε καμπύλης που διέρχεται από το X . Το συμβολίζουμε $T_X E_3$.

Πρόταση A3-1

Έστω $T_X E_3$ το σύνολο που παράγεται από όλα τα διανύσματα U_C του V_3 , όπου για κάθε U_C υπάρχει καμπύλη C_σ διερχόμενη από το X : $C_0 \equiv X$, ώστε να ισχύει: $U_C = \frac{d}{d\sigma} \overline{OC}_\sigma \Big|_{\sigma=0}$

Το σύνολο $T_X E_3$ έχει τη δομή τρισδιάστατου πραγματικού, διανυσματικού χώρου.

Απόδειξη

Θεωρούμε το Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O, x) του E_3 . Ονομάζουμε K_X το σύνολο των καμπυλών του E_3 που διέρχονται από το σημείο $X \in E_3$. Έστω $C \in K_X$. Στη C αντιστοιχεί η καμπύλη c : $c(\sigma) = \overline{OC}_\sigma = \hat{x}_j c^j(\sigma)$ του V_3 η οποία, για κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου σ , ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$c(0) = \overline{OC}_0 = \overline{OX} = \hat{x}_j c^j(0) = \hat{x}_j x^j$$

Το διάνυσμα $U_C = \frac{d}{d\sigma} \overline{OC}_\sigma \Big|_{\sigma=0} = \hat{x}_j \dot{c}^j(0)$ είναι εφαπτόμενο της C στο X . Σύμφωνα με τον ορισμό

του $T_X E_3$ ισχύει: $U_C \in T_X E_3$

Στο $T_X E_3$ ορίζουμε τις πράξεις της άθροισης διανυσμάτων και πολλαπλασιασμού διανύσματος με πραγματικό αριθμό. Το $T_X E_3$ είναι διανυσματικός χώρος τότε και μόνο αν είναι κλειστό ως προς τις πράξεις αυτές^(5,8,9). Θα δείξουμε ότι για κάθε $U_C, U_{C'} \in T_X E_3$ και $\lambda \in R$ αληθεύουν οι σχέσεις:

$$U_C + U_{C'} \in T_X E_3 \text{ και } \lambda U_C \in T_X E_3$$

Αφού $U_C, U_{C'} \in T_X E_3$, υπάρχουν καμπύλες C_σ και C'_σ του E_3 που διέρχονται από το X και ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$C : \overline{OC}_\sigma = \hat{x}_j c^j(\sigma), C' : \overline{OC}'_\sigma = \hat{x}_j c'^j(\sigma), c^j(0) = c'^j(0) = x^j \text{ όπου: } \overline{OX} = \hat{x}_j x^j$$

$$U_C = \hat{x}_j \dot{c}^j(0), \text{ και } U_{C'} = \hat{x}_j \dot{c}'^j(0)$$

Ορίζουμε την καμπύλη: $C'' : \overline{OC}''(\sigma) = \hat{x}_j \frac{1}{2} (c^j(\sigma) + c'^j(\sigma))$

Η C'' διέρχεται από το X :

$$\overline{OC}''(0) = \hat{x}_j \frac{1}{2} (c^j(0) + c'^j(0)) = \hat{x}_j x^j = \overline{OX} \Rightarrow C''(0) \equiv X$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του $T_X E_3$, κάθε διάνυσμα εφαπτόμενο της C'' στο σημείο της X , είναι στοιχείο του $T_X E_3$. Άρα:

$$U_{C''} = 2 \frac{d}{d\sigma} \overline{OC}''(\sigma) \Big|_{\sigma=0} \in T_X E_3 \Rightarrow \left\{ \hat{x}_j 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{d\sigma} (c^j(\sigma) + c'^j(\sigma)) \Big|_{\sigma=0} = \hat{x}_j (\dot{c}^j(0) + \dot{c}'^j(0)) = U_C + U_{C'} \in T_X E_3 \right\}$$

Ορίζουμε την καμπύλη: $C''' : \overline{OC}'''(\sigma) = \overline{OC}(\lambda\sigma) = \hat{x}_j c^j(\lambda\sigma)$

Η C''' διέρχεται από το X :

$$\overline{OC}'''(0) = \hat{x}_j c^j(0) = \hat{x}_j x^j = \overline{OX} \Rightarrow C'''(0) \equiv X$$

Έπεται ότι κάθε διάνυσμα που είναι εφαπτόμενο της C''' στο σημείο της X , είναι στοιχείο του $T_X E_3$. Άρα:

$$U_{C'''} = \frac{d}{d\sigma} \overline{OC}'''(\sigma) \Big|_{\sigma=0} \in T_X E_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \overline{OC}'''(\sigma) \Big|_{\sigma=0} = \frac{d}{d\sigma} \overline{OC}(\lambda\sigma) \Big|_{\sigma=0} = \frac{d}{d\sigma} (\hat{x}_j c^j(\lambda\sigma)) \Big|_{\sigma=0} = \lambda \hat{x}_j \frac{d}{d\sigma} (c^j(\sigma)) \Big|_{\sigma=0} = \lambda \hat{x}_j \dot{c}^j(0) = \lambda U_C \in T_X E_3$$

ΟΕΔ

Το σύνολο όλων των εφαπτομενικών χώρων του E_3 ονομάζεται **εφαπτομενική δέσμη** (tangent bundle TE_3) του E_3 : $TE_3 \equiv \bigcup_{X \in E_3} T_X E_3$

Κάθε απεικόνιση:

$$E_3 \ni X \rightarrow U(X) \in T_X E_3 \subset \bigcup_{X \in E_3} T_X E_3$$

...ορίζει ένα **διανυσματικό πεδίο** στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 .

Καρτεσιανές βάσεις και μετρικός τανυστής στους εφαπτομενικούς χώρους του E_3

Θεωρούμε ένα Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O, x) του E_3 . Στον εφαπτομενικό χώρο $T_X E_3$ ορίζουμε μια βάση διανυσμάτων, που αντιστοιχεί στο σύστημα (O, x) . Τα στοιχεία της βάσης του $T_X E_3$ καθορίζονται ως τα εφαπτόμενα διανύσματα συγκεκριμένων καμπυλών που διέρχονται από το σημείο X του E_3 και ονομάζονται **“καμπύλες βάσης”**. Η διαδικασία αυτή είναι γενική και εφαρμόζεται σε κάθε σύστημα συντεταγμένων, όχι κατ’ ανάγκη Καρτεσιανό (βλέπε επόμενες παραγράφους). Ποιες καμπύλες θα επιλέξουμε ως καμπύλες βάσης; Κατά μήκος μιας καμπύλης βάσης μεταβάλλεται μόνο μία από τις συντεταγμένες που προσδιορίζουν τα σημεία της. Οι άλλες δύο διατηρούνται σταθερές και ίσες με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του σημείου X . Στην προκειμένη περίπτωση επιλέγουμε ως καμπύλες βάσης τις ακόλουθες:

$$\begin{aligned} C_1 : \overline{OC}_1(\sigma) &= \hat{x}_1 (x^1 + \sigma) + \hat{x}_2 x^2 + \hat{x}_3 x^3 \\ C_2 : \overline{OC}_2(\sigma) &= \hat{x}_1 x^1 + \hat{x}_2 (x^2 + \sigma) + \hat{x}_3 x^3 \\ C_3 : \overline{OC}_3(\sigma) &= \hat{x}_1 x^1 + \hat{x}_2 x^2 + \hat{x}_3 (x^3 + \sigma) \end{aligned} \quad (A3.2a)$$

Σημειώνεται ότι οι C_1, C_2, C_3 διέρχονται από το X : $C_1(0)=C_2(0)=C_3(0)=X$

Τα στοιχεία βάσης του $T_X E_3$, ορίζονται ως τα εφαπτόμενα διανύσματα $\{e_1, e_2, e_3\}$ των αντίστοιχων καμπυλών στο σημείο X , σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$e_1 = \left. \frac{d\overline{OC}_1(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \hat{x}_1, \quad e_2 = \left. \frac{d\overline{OC}_2(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \hat{x}_2, \quad e_3 = \left. \frac{d\overline{OC}_3(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = \hat{x}_3 \quad (A3.2\beta)$$

Συμπεραίνουμε ότι:

Για κάθε διάνυσμα $U = e_j U^j \in T_X E_3$ υπάρχει καμπύλη C_σ του E_3 που διέρχεται από το X , ώστε να ισχύει:

$$\overline{OC}(\sigma) = \hat{x}_j c^j(\sigma), \quad \overline{OC}(0) = \hat{x}_j x^j = \overline{OX}, \quad U^j = c^j(0) \equiv \left. \frac{dc^j(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0}$$

Σύμφωνα με την A2.2, σε κάθε εφαπτομενικό χώρο το εσωτερικό γινόμενο, καθορίζεται από τις τιμές των εσωτερικών γινομένων μεταξύ των διανυσμάτων κάθε τοπικής βάσης: $\langle e_j(X), e_k(X) \rangle$

Ως προς το Καρτεσιανό σύστημα (O, x) , για κάθε $U = e_j U^j, V = e_k V^k \in T_X E_3$ ισχύει:

$$\langle U, V \rangle_{\text{ορισμ.}} = \langle e_j, e_k \rangle U^j V^k \quad \text{όπου:} \quad \langle e_j, e_k \rangle = \langle \hat{x}_j, \hat{x}_k \rangle = \delta_{jk} \quad (A3.3)$$

Ο πίνακας $g \equiv [g_{jk}] \equiv [\langle e_j, e_k \rangle] = [\delta_{jk}]$ ορίζεται σε κάθε εφαπτομενικό χώρο του Ευκλείδειου συνεχούς και ονομάζεται **“μετρικός τανυστής”** του E_3 .

Σύμφωνα με την A3.3 ως προς το σύστημα αναφοράς (O, x) οι εφαπτόμενοι χώροι του E_3 είναι εφοδιασμένοι με το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο. Ο μετρικός τανυστής ως προς κάθε Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, προσδιορίζεται από τον πίνακα:

$$[g_{jk}] = [\langle e_j, e_k \rangle] = [\delta_{jk}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A3.3a)$$

Απόσταση γειτονικών σημείων του Ευκλείδειου συνεχούς - Ευκλείδεια μετρική

Θεωρούμε δύο γειτονικά σημεία X και Y του E_3 που βρίσκονται πάνω σε καμπύλη C :

$$C : c(\sigma) \equiv \overline{OC}(\sigma) = \hat{x}_j c^j(\sigma)$$

Οι συντεταγμένες των X και Y , ως προς το Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O, x) , είναι αντίστοιχα:
 $(x^1, x^2, x^3), (x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$

...όπου, για κάποια τιμή του σ ισχύει:

$$x^j = c^j(\sigma), \overline{OX} = \overline{OC}(\sigma) = \hat{x}_j x^j, \overline{OY} = \overline{OC}(\sigma + \Delta\sigma) = \hat{x}_j c^j(\sigma + \Delta\sigma)$$

Για $\Delta\sigma \rightarrow 0$:

$$x^j + \Delta x^j = c^j(\sigma + \Delta\sigma) \approx c^j(\sigma) + \dot{c}^j(\sigma)\Delta\sigma \Rightarrow \Delta x^j = \dot{c}^j(\sigma)\Delta\sigma$$

Ορίζουμε το διάνυσμα $\Delta X \equiv \overline{XY}$ που είναι εφαπτόμενο στη C , στο σημείο της X :

$$\Delta X \equiv \overline{XY} = \overline{OC}(\sigma + \Delta\sigma) - \overline{OC}(\sigma) \approx \hat{x}_j \dot{c}^j(\sigma)\Delta\sigma$$

Το ΔX ανήκει στον εφαπτομενικό χώρο $T_x E_3$ και γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων βάσης του:

$$\Delta X \equiv \overline{XY} = e_j \dot{c}^j(\sigma)\Delta\sigma = e_j \Delta x^j \quad (A3.4)$$

Η norm του $\overline{XY}$ ορίζεται ως **η στοιχειώδης απόσταση** των γειτονικών σημείων X, Y , Γράφουμε:

$$\Delta s \equiv \|\Delta X\| = \|\overline{XY}\| = \left(\langle \overline{XY}, \overline{XY} \rangle \right)^{1/2} = \left(\langle e_j \Delta x^j, e_k \Delta x^k \rangle \right)^{1/2} = \sqrt{\langle e_j, e_k \rangle \Delta x^j \Delta x^k} \quad (A3.4a)$$

Ο ορισμός της στοιχειώδους απόστασης καθιστά τον E_3 έναν **μετρικό χώρο**. Η αναλυτική έκφραση της μετρικής του E_3 προσδιορίζεται από τη σχέση A3.4a.

Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Ως προς το Καρτεσιανό σύστημα (O, x) , κάθε σημείο X του Ευκλείδειου συνεχούς E_3 προσδιορίζεται από μια μοναδική τριάδα $x \equiv (x^1, x^2, x^3)$ πραγματικών αριθμών: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του:

$$X \leftrightarrow x \equiv (x^1, x^2, x^3) \Leftrightarrow \overline{OX} = \hat{x}_j x^j$$

Τα στοιχεία βάσης των εφαπτόμενων χώρων $T_x E_3$ για κάθε $X \in E_3$ δίδονται από τη σχέση A3.2β:

$$e_j(X) = \hat{x}_j, j = 1, 2, 3$$

όπου $\hat{x}_j, j = 1, 2, 3$ η Καρτεσιανή βάση του συσχετισμένου Ευκλείδειου χώρου V_3 .

Παρατηρούμε ότι **ως προς το Καρτεσιανό σύστημα (O, x) , τα διανύσματα βάσης των εφαπτόμενων χώρων του E_3 ανήκουν στις κλάσεις ίσων διανυσμάτων που ορίζουν τα διανύσματα βάσης $\hat{x}_j, j = 1, 2, 3$ του συσχετισμένου χώρου V_3** . Για κάθε $X, X' \in E_3$ ισχύει:

$$e_j(X) = e_j(X') = \hat{x}_j, j = 1, 2, 3$$

Ορίζουμε ως **μετασχηματισμό συντεταγμένων** στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 κάθε αντιστρεπτή, διαφορίσιμη απεικόνιση:

$$R^3 \ni x \equiv (x^1, x^2, x^3) \Leftrightarrow \bar{x} \equiv (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \in A \subseteq R^3$$

...όπου x^j συμβολίζουν τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του τυχαίου σημείου $X \in E_3$. Το σύνολο τιμών A των $\bar{x}$ συντεταγμένων είναι ένα ανοιχτό, συνεκτικό υποσύνολο του R^3 . Η απεικόνιση $\bar{x}^j = \bar{x}^j(x)$ είναι μια "αμφιδιαφόριση": δηλαδή, ο αντίστροφος μετασχηματισμός $x^j = x^j(\bar{x})$ είναι επίσης μια διαφορίσιμη απεικόνιση.

Στις νέες συντεταγμένες, κάθε σημείο $X \in E_3$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από μια τριάδα πραγματικών αριθμών $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \in A$. Στη συνέχεια, μελετάμε πώς μορφοποιείται η δομή των εφαπτομενικών χώρων του E_3 , κάτω από τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $\bar{x}^j = \bar{x}^j(x)$: πώς μετασχηματίζονται τα εφαπτόμενα διανύσματα, τα στοιχεία βάσης, ο πίνακας του μετρικού τανυστή.

Κάθε μετασχηματισμός συντεταγμένων επάγει έναν γραμμικό μετασχηματισμό σε κάθε εφαπτομενικό χώρο του Ευκλείδειου συνεχούς

Έστω ΔX ένα απειροστό διάνυσμα του εφαπτομενικού χώρου $T_x E_3$. Ως προς το σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων (O, x) το ΔX εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της Καρτεσιανής βάσης $\{e_1, e_2, e_3\}$, σύμφωνα με τη σχέση A3.4:

$$\Delta X = e_j \dot{c}^j(\sigma) \Delta \sigma = e_j \Delta x^j$$

όπου $x^j = c^j(\sigma)$ οι Καρτεσιανές συντεταγμένες καμπύλης $C(\sigma)$ του E_3 , που διέρχεται από το X ($C(\sigma) \equiv X$)

Κάτω από τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^j = x^j(\bar{x})$ οι συντεταγμένες των σημείων της C , μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$x^j = x^j(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \Rightarrow c^j(\sigma) = c^j(\bar{c}^1(\sigma), \bar{c}^2(\sigma), \bar{c}^3(\sigma))$$

Από την οποία έπεται ότι:

$$\Delta x^j = \frac{dc^j(\sigma)}{d\sigma} \Delta \sigma = \frac{d\bar{c}^k(\sigma)}{d\sigma} \bar{\partial}_k x^j \Big|_x \Delta \sigma = \Delta \bar{x}^k \bar{\partial}_k x^j \Big|_x \quad (A3.5)$$

$$\dots \text{όπου: } \bar{\partial}_k x^j \equiv \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k}$$

Ο πίνακας $[\bar{\partial}_k x^j(\bar{x})]$ ονομάζεται Ιακωβιανός πίνακας (Jacobian matrix) του μετασχηματισμού $x^j = x^j(\bar{x})$. Ο αντίστροφός του είναι ο πίνακας $[\partial_k \bar{x}^j]$:

$$[\partial_k \bar{x}^j][\bar{\partial}_j x^i] = \left[\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right] = [\delta_k^i] \quad \text{όπου: } [\partial_k \bar{x}^j] = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{x}^1 & \partial_2 \bar{x}^1 & \partial_3 \bar{x}^1 \\ \partial_1 \bar{x}^2 & \partial_2 \bar{x}^2 & \partial_3 \bar{x}^2 \\ \partial_1 \bar{x}^3 & \partial_2 \bar{x}^3 & \partial_3 \bar{x}^3 \end{pmatrix} \quad (A3.5a)$$

Βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός συντεταγμένων $x^j = x^j(\bar{x})$ επάγει σε κάθε εφαπτομενικό χώρο του Ευκλείδειου συνεχούς, έναν γραμμικό μετασχηματισμό που ορίζεται από την A3.5. Κάθε διάνυσμα ΔX του εφαπτομενικού χώρου $T_x E_3$ αποκτά νέες συνιστώσες, $\Delta \bar{x}^k = \Delta x^j \bar{\partial}_j \bar{x}^k \Big|_x$ που αναφέρονται σε μια νέα βάση διανυσμάτων $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ του $T_x E_3$. Τα στοιχεία της νέας βάσης προκύπτουν άμεσα από τις σχέσεις A3.5:

$$\Delta X = e_j \Delta x^j = \bar{e}_k \Delta \bar{x}^k \Rightarrow e_j \Delta \bar{x}^k \bar{\partial}_k x^j(\bar{x}) = \bar{e}_k \Delta \bar{x}^k \Rightarrow \bar{e}_k(\bar{x}) = e_j \bar{\partial}_k x^j(\bar{x}) \quad (A3.6)$$

Παρατηρούμε ότι στις νέες συντεταγμένες, τα στοιχεία βάσης των εφαπτόμενων χώρων εξαρτώνται πλέον από τη θέση X του εφαπτόμενου χώρου.

Ο μετρικός τανυστής ως προς ένα μη Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Η έκφραση του μετρικού τανυστή ως προς τις $\bar{x}$ συντεταγμένες, προσδιορίζεται από τις σχέσεις A3.6 και A3.3:

$$\bar{g}_{jk}(\bar{x}) = \langle \bar{e}_j, \bar{e}_k \rangle = \langle e_n \bar{\partial}_j x^n(\bar{x}), e_m \bar{\partial}_k x^m(\bar{x}) \rangle = \delta_{nm} \bar{\partial}_j x^n(\bar{x}) \bar{\partial}_k x^m(\bar{x}) \quad (A3.7)$$

Παρατηρούμε ότι στις νέες συντεταγμένες ο μετρικός τανυστής είναι συνάρτηση των συντεταγμένων της θέσης $X \leftrightarrow \bar{x} \equiv (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ του εφαπτομενικού χώρου $T_x E_3$.

Από την A3.7 μπορούμε να συσχετίσουμε τις ορίζουσες του μετρικού τανυστή στα δύο συστήματα συντεταγμένων με τη ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα του μετασχηματισμού συντεταγμένων:

$$\det[\bar{g}_{jk}(\bar{x})] = \det[g_{nm}] \left(\det[\bar{\partial}_j x^n(\bar{x})] \right)^2 \Rightarrow \det[\bar{\partial}_j x^n(\bar{x})] = \sqrt{\frac{\det[\bar{g}_{jk}(\bar{x})]}{\det[g_{nm}]}} \quad (A3.7a)$$

[Επιστροφή στα περιεχόμενα](#)

A4. Διαφορικές μορφές στο E_3 - Στοιχείο όγκου στο E_3 - Επιφάνειες στο E_3 - Στοιχείο εμβαδού σε επιφάνεια ^(2,4,5,9)

Σύνοψη: Ορίζουμε τις διαφορικές 1,2 και 3-μορφές στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 . Μελετάμε πώς μετασχηματίζονται κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Βρίσκουμε την 3-μορφή του E_3 που διατηρείται αναλλοίωτη κάτω από κάθε μετασχηματισμό συντεταγμένων και ορίζουμε το

στοιχείο όγκου στο E_3 . Εισάγουμε την έννοια μιας επιφάνειας S στο E_3 και περιγράφουμε τα θεμελιώδη στοιχεία που προσδιορίζουν τη δομή της: την παραμετρική έκφραση της S , καμπύλες επί της S , τους εφαιπόμενους χώρους στα σημεία της, τον μετρικό τανυστή και τη μετρική, τις διαφορικές μορφές επί της S . Μελετάμε πώς μεταβάλλονται τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της επιφάνειας κάτω από μετασχηματισμούς των παραμέτρων που προσδιορίζουν τα σημεία της S . Βρίσκουμε τη 2-μορφή που διατηρείται αναλλοίωτη κάτω από κάθε μετασχηματισμό παραμέτρων και ορίζουμε το στοιχείο εμβαδού επί της S .

Διαφορικές 1 μορφές

Έστω (O, x) Καρτεσιανό και $(O, \bar{x})$ τυχαίο σύστημα αναφοράς του E_3 . Τα δύο συστήματα συνδέονται με το μετασχηματισμό συντεταγμένων:

$$x^j = x^j(\bar{x}) \text{ όπου: } \bar{x} \equiv (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \quad j = 1, 2, 3 \quad (\text{A4.1})$$

Οι διαφορικές 1-μορφές (ή απλά, 1-μορφές) είναι γραμμικές απεικονίσεις στο R που ορίζονται επί της εφαιπτομενικής δέσμης του E_3 . Ως προς το $(O, \bar{x})$ σύστημα συντεταγμένων, ορίζουμε τις “**1-μορφές βάσης**” (τις συμβολίζουμε: $d\bar{x}^k$) από τις σχέσεις:

$$T_x E_3 \ni \Delta X \rightarrow d\bar{x}^k(\Delta X) \in R \text{ όπου:} \quad (\text{A4.2})$$

$$d\bar{x}^k(\Delta X) = d\bar{x}^k(\bar{e}_j(X)\Delta\bar{x}^j) = d\bar{x}^k(\bar{e}_j(X))\Delta\bar{x}^j = \delta_j^k \Delta\bar{x}^j = \Delta\bar{x}^k$$

Από τον ορισμό των 1-μορφών βάσης προκύπτει ότι:

$$d\bar{x}^k(\bar{e}_j(X)) = \delta_j^k \text{ για κάθε } X \in E_3 \quad (\text{A4.2a})$$

Για κάθε 1-μορφή $T_x E_3 \ni \Delta X \rightarrow p_x(\Delta X) \in R$ ισχύει:

$$\Delta X = \bar{e}_j(X)\Delta\bar{x}^j \Rightarrow p_x(\Delta X) = \bar{p}_j(\bar{x})\Delta\bar{x}^j \quad (\text{A4.2β})$$

...όπου $\bar{p}_j(\bar{x})$ ορισμένοι πραγματικοί αριθμοί που προσδιορίζουν μονοσήμαντα την p_x ^(5,8,9).

Από τις A4.2a και A4.2β συνεπάγεται η αλήθεια της σχέσης:

$$\{ \text{Για κάθε } \Delta X \in T_x E_3 \Rightarrow p_x(\Delta X) = \bar{p}_j(\bar{x})\Delta\bar{x}^j = \bar{p}_j(\bar{x})d\bar{x}^j(\Delta X) \} \Rightarrow p_x = \bar{p}_j(\bar{x})d\bar{x}^j$$

Δηλαδή, κάθε 1-μορφή ορισμένη στην εφαιπτόμενη δέσμη του Ευκλείδειου συνεχούς εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των 1-μορφών βάσης.

Οι “**συναλλοιώτες**” 1-μορφές βάσης ορίζονται ως οι γραμμικές απεικονίσεις:

$$T_x E_3 \ni \Delta X \rightarrow d\bar{x}_k(\Delta X) \underset{\text{ορισμ}}{=} \langle \bar{e}_k, \Delta X \rangle \in R$$

Οι συναλλοιώτες 1-μορφές βάσης ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} d\bar{x}_k(\Delta X) &= \langle \bar{e}_k(X), \Delta X \rangle = \langle \bar{e}_k(X), \bar{e}_j(X)\Delta\bar{x}^j \rangle = \bar{g}_{kj}(X)\Delta\bar{x}^j = \\ &= \bar{g}_{kj}(X)d\bar{x}^j(\Delta X) \text{ για κάθε } \Delta X \in T_x E_3 \end{aligned} \quad (\text{A4.3})$$

Από την A4.3 προκύπτει ότι οι συναλλοιώτες 1-μορφές βάσης εκφράζονται συναρτήσει των 1-μορφών βάσης σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$d\bar{x}_k = \bar{g}_{kj}(X)d\bar{x}^j \quad (\text{A4.3a})$$

Εφόσον το σύστημα συντεταγμένων είναι Καρτεσιανό, ο μετρικός τανυστής έχει τη μορφή : $g_{jk}(X) = \delta_{jk}$ για κάθε $X \in E_3$ (σχέσεις A3.3, A3.3a). Οπότε, από την A4.3a συνεπάγεται ότι:

$$dx_k = \delta_{kj} dx^j = dx^k$$

1-μορφές και μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Κάτω από τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^j = x^j(\bar{x})$ οι 1-μορφές βάσης μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} d\bar{x}^k(\Delta X) &= d\bar{x}^k(\bar{e}_j\Delta\bar{x}^j) = d\bar{x}^k(\bar{e}_j)\Delta\bar{x}^j = \delta_j^k \Delta\bar{x}^j = \Delta\bar{x}^k = \\ &= \Delta x^n \partial_n \bar{x}^k = \partial_n \bar{x}^k dx^n(\Delta X) \Rightarrow d\bar{x}^k = \partial_n \bar{x}^k dx^n \end{aligned} \quad (\text{A4.4})$$

Μια γενική 1-μορφή **διατηρείται αναλλοίωτη** κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων. Ωστόσο μεταβάλλονται οι συναρτησιακές εκφράσεις των συντελεστών που την προσδιορίζουν στα δύο συστήματα συντεταγμένων:

$$p_x = \bar{p}_k(\bar{x})d\bar{x}^k = p_n(x)dx^n \Rightarrow \bar{p}_k(\bar{x})\partial_n \bar{x}^k dx^n = p_n(x)dx^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_n(x) = \bar{p}_k(\bar{x})\partial_n \bar{x}^k \quad (\text{A4.4a})$$

Διαφορικές 2-μορφές

Στο σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$, ορίζουμε τις “**2-μορφές βάσης**” ως τις διγραμμικές, αντισυμμετρικές απεικονίσεις:

$$d\bar{x}^k \wedge d\bar{x}^j : T_x E_3 \times T_x E_3 \rightarrow R, \quad j, k = 1, 2, 3 \quad \text{όπου:}$$

$$(d\bar{x}^k \wedge d\bar{x}^j)(\Delta_1 X, \Delta_2 X) =$$

$$= d\bar{x}^k(\bar{e}_n \Delta_1 \bar{x}^n) d\bar{x}^j(e_m \Delta_2 \bar{x}^m) - d\bar{x}^j(\bar{e}_m \Delta_2 \bar{x}^m) d\bar{x}^k(\bar{e}_n \Delta_1 \bar{x}^n) = \Delta_1 \bar{x}^k \Delta_2 \bar{x}^j - \Delta_2 \bar{x}^k \Delta_1 \bar{x}^j \quad (\text{A4.5})$$

Από τον ορισμό A4.5 συνεπάγονται οι ταυτότητες:

$$(d\bar{x}^k \wedge d\bar{x}^j)(\Delta_1 X, \Delta_2 X) = -(d\bar{x}^j \wedge d\bar{x}^k)(\Delta_2 X, \Delta_1 X)$$

$$(d\bar{x}^k \wedge d\bar{x}^j)(\Delta_1 X, \Delta_2 X) = -(d\bar{x}^j \wedge d\bar{x}^k)(\Delta_1 X, \Delta_2 X) =$$

$$(d\bar{x}^k \wedge d\bar{x}^k)(\Delta_1 X, \Delta_2 X) = 0 \quad \text{για κάθε } \Delta_1 X, \Delta_2 X \in T_x E_3 \quad (\text{A4.5a})$$

$$\Delta_1 X = \Delta_2 X \Rightarrow (d\bar{x}^k \wedge d\bar{x}^j)(\Delta_1 X, \Delta_2 X) = 0$$

Κάθε 2-μορφή $\bar{a}_X$ του E_3 εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των 2-μορφών βάσης:

$$\bar{a}_X = \bar{a}_{jk}(\bar{x})d\bar{x}^j \wedge d\bar{x}^k \quad (\text{A4.6})$$

Κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων, οι 2-μορφές βάσης μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$d\bar{x}^i \wedge d\bar{x}^j = (\partial_k \bar{x}^i dx^k) \wedge (\partial_l \bar{x}^j dx^l) = \partial_k \bar{x}^i \partial_l \bar{x}^j dx^k \wedge dx^l \Rightarrow$$

$$d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 = \partial_k \bar{x}^1 \partial_l \bar{x}^2 dx^k \wedge dx^l = \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{\partial(x^1, x^2)} dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{\partial(x^2, x^3)} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{\partial(x^3, x^1)} dx^3 \wedge dx^1$$

$$\frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{\partial(x^1, x^2)} = \det \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{x}^1 & \partial_2 \bar{x}^1 \\ \partial_1 \bar{x}^2 & \partial_2 \bar{x}^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{\partial(x^2, x^3)} = \det \begin{pmatrix} \partial_2 \bar{x}^1 & \partial_3 \bar{x}^1 \\ \partial_2 \bar{x}^2 & \partial_3 \bar{x}^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{\partial(x^3, x^1)} = \det \begin{pmatrix} \partial_3 \bar{x}^1 & \partial_1 \bar{x}^1 \\ \partial_3 \bar{x}^2 & \partial_1 \bar{x}^2 \end{pmatrix}$$

...όπου:

$$[\partial_j \bar{x}^k] = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{x}^1 & \partial_2 \bar{x}^1 & \partial_3 \bar{x}^1 \\ \partial_1 \bar{x}^2 & \partial_2 \bar{x}^2 & \partial_3 \bar{x}^2 \\ \partial_1 \bar{x}^3 & \partial_2 \bar{x}^3 & \partial_3 \bar{x}^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det[\partial_j \bar{x}^k] = \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{\partial(x^1, x^2)} \partial_3 \bar{x}^3 + \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{\partial(x^2, x^3)} \partial_1 \bar{x}^3 + \frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{\partial(x^3, x^1)} \partial_2 \bar{x}^3 = \sqrt{\det g}$$

Διαφορικές 3-μορφές

Οι 3-μορφές του E_3 ορίζονται από τις τριγραμμικές, αντισυμμετρικές μορφές:

$$v_X = \lambda(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \bar{\lambda}(\bar{x})d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3 \quad (\text{A4.7})$$

...όπου $\lambda(x)$ πραγματική συνάρτηση του R^3 στο R .

Κάτω από τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^j = x^j(\bar{x})$ οι 1-μορφές βάσης μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις A4.4, οπότε από την A4.7 προκύπτει η ταυτότητα:

$$\lambda(x)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \lambda(x)\bar{\partial}_{j_1} x^1 \bar{\partial}_{j_2} x^2 \bar{\partial}_{j_3} x^3 d\bar{x}^{j_1} \wedge d\bar{x}^{j_2} \wedge d\bar{x}^{j_3} =$$

$$= \lambda(x)\bar{\partial}_{j_1} x^1 \bar{\partial}_{j_2} x^2 \bar{\partial}_{j_3} x^3 \varepsilon_1^{j_1} \varepsilon_2^{j_2} \varepsilon_3^{j_3} d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3 = \lambda(x) \det [\bar{\partial}_j x^k] d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3 =$$

$$= \bar{\lambda}(\bar{x}) d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3 \Rightarrow \bar{\lambda}(\bar{x}) = \lambda(x) \det [\bar{\partial}_j x^k] = \lambda(x) (\det [\partial_j \bar{x}^k])^{-1} \quad (\text{A4.8})$$

Το στοιχείο όγκου^(2,4)

Η μορφή όγκου (the volume form) dV_X ορίζεται ως η 3-μορφή που διατηρείται αναλλοίωτη κάτω από κάθε μετασχηματισμό συντεταγμένων.

Σύμφωνα με την A4.8, για να συμβεί αυτό, πρέπει να διαλέξουμε το $\lambda(x)$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\frac{\bar{\lambda}(\bar{x})}{\lambda(x)} \det(\partial_k \bar{x}^j) = 1 \quad (A4.8a)$$

Από την A4.8a και τις A3.7, A3.7a, συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\bar{\lambda}(\bar{x})}{\lambda(x)} \frac{\sqrt{\det g(x)}}{\sqrt{\det \bar{g}(\bar{x})}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{\lambda}(\bar{x})}{\sqrt{\det \bar{g}(\bar{x})}} = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{\det g(x)}} \text{ for every } \bar{x}^j = \bar{x}^j(x)$$

Συμπεραίνουμε ότι το $\lambda(x)$ πρέπει και αρκεί να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\bar{\lambda}(\bar{x}) = C \sqrt{\det \bar{g}(\bar{x})} \text{ όπου: } C = \text{σταθερά} \quad (A4.8\beta)$$

Με κατάλληλη επιλογή του συστήματος των μονάδων μέτρησης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $C=1$, οπότε η αναλλοίωτη 3-μορφή που εκφράζει τη μορφή όγκου στο σημείο X του E_3 , ως προς το τυχαίο σύστημα συντεταγμένων $\bar{x} \equiv (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$d\bar{V}_X = \sqrt{\det \bar{g}(\bar{x})} d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3 \quad (A4.8\gamma)$$

Επιφάνειες στο E_3

Μια επιφάνεια S στο E_3 ορίζεται από την αναλυτική έκφραση:

$$x^j = x_s^j(u^1, u^2), \quad j = 1, 2, 3$$

... όπου x^j είναι οι συντεταγμένες των σημείων της S και τα ζεύγη $u=(u^1, u^2)$ παίρνουν τιμές σε ένα ανοικτό, συνεκτικό υποσύνολο U του R^2 . Σε κάθε σημείο $X_S(u)$ της S μπορούμε να ορίσουμε με μονοσήμαντο τρόπο ένα **εφαπτόμενο επίπεδο**. Όπως πράξαμε και στην κατασκευή των εφαπτόμενων χώρων του E_3 , το εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο X_S της S παράγεται από τα εφαπτόμενα στο X_S διανύσματα κάθε καμπύλης C_S της S που διέρχεται από το X_S .

Οι καμπύλες της S είναι εικόνες καμπύλων του χώρου των παραμέτρων. Έστω:

$$c : u^\mu = u^\mu(\sigma), \quad \mu = 1, 2$$

...καμπύλη του χώρου των παραμέτρων U . Η εικόνα της c επί της S είναι η καμπύλη:

$$C_S : x^j(\sigma) = x_s^j(u^1(\sigma), u^2(\sigma)), \quad j = 1, 2, 3$$

Κάθε απειροστό εφαπτόμενο διάνυσμα της της C_S , γράφεται:

$$\Delta X_S = e_j(X_S) \Delta x^j(u^1(\sigma), u^2(\sigma)) = e_j(X_S) \partial_\mu x_s^j \Delta u^\mu, \quad j = 1, 2, 3; \mu = 1, 2 \quad (A4.9)$$

Η ύπαρξη εφαπτόμενου επιπέδου σε κάθε σημείο της S εξασφαλίζεται εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη^(2,4):

"Τα εφαπτόμενα διανύσματα $\Delta_1 X_S, \Delta_2 X_S$ των καμπύλων $u_2=\text{σταθερό}$ και $u_1=\text{σταθερό}$, όπου:

$$\Delta_1 X_S = e_j(X_S) \partial_1 x^j(u) \Delta u^1, \quad \Delta_2 X_S = e_j(X_S) \partial_2 x^j(u) \Delta u^2 \quad (A4.9a)$$

...είναι γραμμικά ανεξάρτητα για κάθε $u \equiv (u^1, u^2) \in U$

Εφόσον ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, σύμφωνα με την A4.9, το εφαπτόμενο επίπεδο $T_{X_S} S \equiv T_u S \subset T_{X_S} E_3$ σε κάθε σημείο $X_S(u) \in S$ είναι ένας δισδιάστατος γραμμικός χώρος που παράγεται από τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων^(2,4):

$$u_\mu = e_j(X_S) \partial_\mu x^j(u^1, u^2), \quad \mu = 1, 2, \quad \partial_\mu \equiv \partial_{u^\mu} \quad (A4.9\beta)$$

...όπου $e_j(X_S), j=1,2,3$, είναι τα διανύσματα βάσης του του εφαπτόμενου χώρου $T_{X_S} E_3$ ως προς

το σύστημα συντεταγμένων (O, x) :

$$T_u S \ni \Delta X_S = u_\mu(X_S) \Delta u^\mu, \quad \mu = 1, 2 \quad (A4.9\gamma)$$

Ο εφαπτόμενος χώρος $T_u S$ στο σημείο της $X_S(u)$ είναι ένας υπόχωρος του εφαπτόμενου χώρου του E_3 , στο ίδιο σημείο:

$$T_{X_S(u)} S \ni \Delta X_S(u) = u_\mu(u) \Delta u^\mu = e_j(X_S(u)) \partial_\mu x_s^j(u) \Delta u^\mu = e_j(X_S(u)) \Delta x_s^j(u) \in T_{X_S(u)} E_3$$

Τα διανύσματα βάσης που ορίζονται από τις σχέσεις A4.9a, και ο μετρικός τανυστής του E_3 , ως προς το σύστημα συντεταγμένων (O, x) , επάγουν στους εφαπτόμενους χώρους της S ένα εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από τον μετρικό τανυστή:

$\gamma(u) = [\gamma_{\mu\nu}(u)]$ όπου:

$$\gamma_{\mu\nu}(u) \equiv \langle u_\mu, u_\nu \rangle = \langle e_j, e_k \rangle \partial_\mu x^j_S(u) \partial_\nu x^k_S(u) = g_{jk} \partial_\mu x^j_S(u) \partial_\nu x^k_S(u) \quad (A4.9\delta)$$

$j, k = 1, 2, 3$ και $\mu, \nu = 1, 2$

Μετασχηματισμοί παραμέτρων της επιφάνειας S του E_3

Έστω $u^\mu = u^\mu(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ ένας μετασχηματισμός των παραμέτρων που προσδιορίζουν τα σημεία της επιφάνειας S του E_3 :

$$U \ni u \equiv (u^1, u^2) \leftrightarrow \bar{u} \equiv (\bar{u}^1, \bar{u}^2) \in \bar{U} : u^\mu = u^\mu(\bar{u})$$

Όπως και οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων, έτσι και οι μετασχηματισμοί παραμέτρων είναι αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις. Δηλαδή είναι αντιστρεπτοί και, τόσο ο μετασχηματισμός όσο και ο αντίστροφός του, είναι διαφορίσιμοι. Οι μετασχηματισμοί παραμέτρων επάγουν γραμμικούς μετασχηματισμούς στα εφαπτόμενα επίπεδα της S , που ορίζονται με τους ακόλουθους συλλογισμούς:

Έστω ΔX_S ένα διάνυσμα του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{x_S} S$ της S . Ως προς το $\bar{u}$ σύστημα παραμέτρων, το ΔX_S εκφράζεται με τη σχέση (βλέπε A4.9):

$$\Delta X_S = \bar{u}_\mu(\bar{u}) \Delta \bar{u}^\mu \in T_{x_S} S$$

Τότε, υπάρχει καμπύλη $\bar{c} : \bar{u}^\mu = \bar{u}^\mu(\sigma)$ του συνόλου $\bar{U}$ των παραμέτρων, ώστε: $\Delta \bar{u}^\mu = \dot{\bar{u}}^\mu(\sigma) \Delta \sigma$

Μέσω του μετασχηματισμού $u^\mu = u^\mu(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, η καμπύλη $\bar{c}$ απεικονίζεται στην c , όπου:

$$c : u^\mu = u^\mu(\bar{u}(\sigma)) : S \ni X_S \leftrightarrow (u^1(\bar{u}(\sigma)), u^2(\bar{u}(\sigma))) \in U$$

...από την οποία έπεται ότι:

$$\Delta u^\mu = \frac{d}{d\sigma} u^\mu(\bar{u}(\sigma)) \Delta \sigma = \frac{\partial_\nu u^\mu}{\partial \bar{u}^\nu} \dot{\bar{u}}^\nu \Delta \sigma = \bar{\partial}_\nu u^\mu \Delta \bar{u}^\nu \quad (A4.10)$$

Από την A4.10 και την A4.9γ συνεπάγεται ότι τα στοιχεία βάσης του $T_{x_S} S$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\Delta X_S = u_\mu(u) \Delta u^\mu = u_\mu(u) \bar{\partial}_\nu u^\mu \Delta \bar{u}^\nu = \bar{u}_\nu(\bar{u}) \Delta \bar{u}^\nu \Rightarrow \bar{u}_\nu(\bar{u}) = u_\mu(u) \bar{\partial}_\nu u^\mu \quad (A4.10a)$$

Από την οποία, προκύπτει ότι ο μετρικός τανυστής μετασχηματίζεται ως ακολούθως:

$$\gamma_{\mu\nu}(u) \equiv \langle u_\mu, u_\nu \rangle = \langle \bar{u}_\mu, \bar{u}_\nu \rangle \partial_\mu \bar{u}^\kappa \partial_\nu \bar{u}^\lambda = \bar{\gamma}_{\kappa\lambda}(\bar{u}) \partial_\mu \bar{u}^\kappa \partial_\nu \bar{u}^\lambda \quad (A4.11)$$

$$(A4.11) \Rightarrow \det[\partial_\mu \bar{u}^\kappa] = \sqrt{\frac{\det \gamma(u)}{\det \bar{\gamma}(\bar{u})}} \Rightarrow \det[\bar{\partial}_\mu u^\kappa] = \sqrt{\frac{\det \bar{\gamma}(\bar{u})}{\det \gamma(u)}} \quad (A4.11a)$$

Διαφορικές μορφές επί της επιφάνειας S και το στοιχείο εμβαδού

Κατ' αναλογία με τους ορισμούς των 1-μορφών βάσης στο E_3 ορίζουμε τις 1-μορφές βάσης στην εφαπτόμενη δέσμη της S από τις εκφράσεις:

$$du^\mu(\Delta X_S) = \Delta u^\mu \quad (A4.12)$$

Κάτω από το μετασχηματισμό παραμέτρων $u^\mu = u^\mu(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ οι 1-μορφές βάσης μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$du^\mu(\Delta X_S) = \Delta u^\mu = \bar{\partial}_\nu u^\mu \Delta \bar{u}^\nu = \bar{\partial}_\nu u^\mu d\bar{u}^\nu(\Delta X_S) \Rightarrow du^\mu = \bar{\partial}_\nu u^\mu d\bar{u}^\nu \quad (A4.12a)$$

Οι 2-μορφές επί της S ορίζονται ως οι αντισυμμετρικές διγγραμμικές μορφές:

$$T_{x_S} S \otimes T_{x_S} S \ni (\Delta_1 X_S, \Delta_2 X_S) \rightarrow q_{x_S}(\Delta_1 X_S, \Delta_2 X_S) = \lambda(u) (du^\mu \wedge du^\nu)(\Delta_1 X_S, \Delta_2 X_S) \in R \quad (A4.13)$$

$$(du^\mu \wedge du^\nu)(\Delta_1 X_S, \Delta_2 X_S) = du^\mu(\Delta_1 X_S) du^\nu(\Delta_2 X_S) - du^\mu(\Delta_2 X_S) du^\nu(\Delta_1 X_S) =$$

$$= \Delta_1 u^\mu \Delta_2 u^\nu - \Delta_2 u^\mu \Delta_1 u^\nu, \lambda(u) \in R$$

Οι Ελληνικοί δείκτες λαμβάνουν τις τιμές 1 ή 2. Έπεται ότι η γενική έκφραση μιας 2-μορφής επί της S είναι:

$$q_{x_S} = \lambda(u) (du^1 \wedge du^2) \Rightarrow q_{x_S}(\Delta_1 X_S, \Delta_2 X_S) = \lambda(u) (\Delta_1 u^1 \Delta_2 u^2 - \Delta_2 u^1 \Delta_1 u^2) \quad \text{όπου: } \lambda(u) \in R$$

Κάτω από το μετασχηματισμό παραμέτρων $u^\mu = u^\mu(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ οι 2-μορφές μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} q_{X_S} &= \lambda(u) (du^1 \wedge du^2) = \lambda(u) ((\bar{\partial}_\mu u^1 d\bar{u}^\mu) \wedge (\bar{\partial}_\nu u^2 d\bar{u}^\nu)) = \lambda(u) \bar{\partial}_\mu u^1 \bar{\partial}_\nu u^2 (d\bar{u}^\mu \wedge d\bar{u}^\nu) = \\ &= \lambda(u) (\bar{\partial}_1 u^1 \bar{\partial}_2 u^2 - \bar{\partial}_2 u^1 \bar{\partial}_1 u^2) (d\bar{u}^1 \wedge d\bar{u}^2) = \frac{\lambda(u)}{\bar{\lambda}(\bar{u})} \det [\bar{\partial}_\mu u^\nu] \bar{\lambda}(\bar{u}) (d\bar{u}^1 \wedge d\bar{u}^2) = \quad (A4.14) \\ &= \frac{\lambda(u)}{\bar{\lambda}(\bar{u})} \det [\bar{\partial}_\mu u^\nu] \bar{q}_{X_S} = \frac{\lambda(u)}{\bar{\lambda}(\bar{u})} \sqrt{\frac{\det \bar{\gamma}(\bar{u})}{\det \gamma(u)}} \bar{q}_{X_S} \end{aligned}$$

Το στοιχείο εμβαδού επί επιφανείας S του E_3 ορίζεται ως η 2-μορφή που είναι αναλλοίωτη κάτω από κάθε μετασχηματισμό παραμέτρων.

Συμβολίζουμε το στοιχείο εμβαδού με $da_{X_S} = \lambda(u) (du^1 \wedge du^2)$. Τότε, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, για κάθε μετασχηματισμό $u^\mu = u^\mu(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$, το da_{X_S} διατηρείται αναλλοίωτο. Από την A4.14 έπεται ότι πρέπει και αρκεί να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\frac{\lambda(u)}{\bar{\lambda}(\bar{u})} \sqrt{\frac{\det \bar{\gamma}(\bar{u})}{\det \gamma(u)}} = 1 \Rightarrow \frac{\lambda(u)}{\sqrt{\det \gamma(u)}} = \frac{\bar{\lambda}(\bar{u})}{\sqrt{\det \bar{\gamma}(\bar{u})}}$$

...από την οποία συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα $\frac{\lambda(u)}{\sqrt{\det \gamma(u)}}$ είναι ανεξάρτητη της επιλογής του

συστήματος των παραμέτρων και με κατάλληλη επιλογή των μονάδων μέτρησης, το στοιχείο εμβαδού προσδιορίζεται από τη 2-μορφή:

$$da_{X_S} = \sqrt{\det \gamma(u)} du^1 \wedge du^2 = \sqrt{\det \bar{\gamma}(\bar{u})} d\bar{u}^1 \wedge d\bar{u}^2 \quad (A4.15)$$

όπου: $X_S \leftrightarrow u \equiv (u^1, u^2) \leftrightarrow \bar{u} \equiv (\bar{u}^1, \bar{u}^2)$

Η **κατεύθυνση** του στοιχείου εμβαδού στο σημείο X_S , της επιφάνειας S , ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα n του εφαπτόμενου χώρου $T_{X_S} E_3$ που είναι κάθετο στα διανύσματα βάσης u_1 και u_2 του χώρου $T_{X_S} S$. Ο προσανατολισμός του n επιλέγεται έτσι, ώστε το πρόσημο της $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3(u_1, u_2, n)$ να είναι το ίδιο με το πρόσημο της $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3(e_1, e_2, e_3) > 0$. Γράφουμε:

$$n = e_1 \lambda^1 + e_2 \lambda^2 + e_3 \lambda^3$$

...όπου οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$, είναι λύσεις των εξισώσεων:

$$g_{jk}(u) \lambda^j \lambda^k = 1$$

$$\lambda^1 \langle e_1, u_1 \rangle + \lambda^2 \langle e_2, u_1 \rangle + \lambda^3 \langle e_3, u_1 \rangle = 0 \quad (A4.15a)$$

$$\lambda^1 \langle e_1, u_2 \rangle + \lambda^2 \langle e_2, u_2 \rangle + \lambda^3 \langle e_3, u_2 \rangle = 0$$

...και ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3(u_1, u_2, n) > 0 \quad (A4.15\beta)$$

Το **προσανατολισμένο** στοιχείο εμβαδού στο σημείο X_S της επιφάνειας S , εκφράζεται αναλυτικά με τη σχέση:

$$da_{X_S} = n da_{X_S} = n \sqrt{\det \gamma(u)} du^1 \wedge du^2 \quad (A4.16)$$

Μια **στοιχειώδης επιφάνεια στο σημείο X_S της S** ορίζεται από ένα παραλληλόγραμμο q_{X_S} του E_3 με κορυφή το X_S και πλευρές $\overline{X_S Y_1}, \overline{X_S Y_2}$, που προσδιορίζονται από δύο γραμμικά ανεξάρτητα απειροστά διανύσματα του εφαπτόμενου επιπέδου $T_{X_S} S$:

$$\overline{X_S Y_1} = \Delta_1 X_S, \overline{X_S Y_2} = \Delta_2 X_S \in T_{X_S} S \text{ όπου: } \Delta_1 X_S = u_\mu \Delta_1 u^\mu, \Delta_2 X_S = u_\nu \Delta_2 u^\nu$$

Το εμβαδόν του $q_{X_S} \equiv q(X_S; \Delta_1 X_S, \Delta_2 X_S)$ υπολογίζεται από την A4.16:

$$\begin{aligned} \Delta a[q_{x_s}] &= n\sqrt{\det \gamma(u)} du^1 \wedge du^2 (\Delta_1 X_s, \Delta_2 X_s) = \\ &= n\sqrt{\det \gamma(u)} \Delta_1 u^\mu \Delta_2 u^\nu du^1 \wedge du^2 (u_\mu, u_\nu) = n\sqrt{\det \gamma(u)} (\Delta_1 u^1 \Delta_2 u^2 - \Delta_1 u^2 \Delta_2 u^1) \end{aligned} \quad (A4.16a)$$

Παράδειγμα

Μια επιφάνεια S κείται επί του επιπέδου $z=0$ του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (O, x) . Η αναλυτική της έκφραση έχει τη μορφή:

$$x^1 = x_s^1(u^1, u^2), \quad x^2 = x_s^2(u^1, u^2), \quad x^3 = 0, \quad (u^1, u^2) \in U \subset R^2$$

Τα διανύσματα βάσης του εφαπτόμενου χώρου $T_{x_s} S$ στο $x_s \in S$ προσδιορίζονται από τις A4.9β:

$$u_\mu = e_j(x_s) \partial_\mu x^j(u^1, u^2), \quad \mu = 1, 2$$

$$u_1 = e_1 \partial_1 x^1(u) + e_2 \partial_1 x^2(u), \quad u_2 = e_1 \partial_2 x^1(u) + e_2 \partial_2 x^2(u)$$

Το κάθετο διάνυσμα μοναδιαίου μήκους στον $T_{x_s} S$ υπολογίζεται από τις εξισώσεις:

$$\eta = e_1 \lambda^1(u) + e_2 \lambda^2(u) + e_3 \lambda^3(u)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda^1 \langle e_1, u_1 \rangle + \lambda^2 \langle e_2, u_1 \rangle + \lambda^3 \langle e_3, u_1 \rangle &= 0 \\ \lambda^1 \langle e_1, u_2 \rangle + \lambda^2 \langle e_2, u_2 \rangle + \lambda^3 \langle e_3, u_2 \rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lambda^1 \partial_1 x^1 + \lambda^2 \partial_1 x^2 &= 0 \\ \lambda^1 \partial_2 x^1 + \lambda^2 \partial_2 x^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \{ \lambda^1(u) = \lambda^2(u) = 0 \}$$

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O, x) , ο μετρικός τανυστής του E_3 δίδεται από τη σχέση $g_{jk} = \delta_{jk}$. Δεδομένου ότι το η έχει μοναδιαίο μήκος, ισχύει:

$$(\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2 = 1$$

Έπεται ότι $\lambda^3(u) = \pm 1$ και $\eta(u) = \lambda^3 e_3$

Από τη συνθήκη A4.15β λαμβάνουμε:

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3(u_1, u_2, \eta) > 0 \Rightarrow dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3(e_1 \partial_1 x^1 + e_2 \partial_1 x^2, e_1 \partial_2 x^1 + e_2 \partial_2 x^2, \lambda^3 e_3) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_1 x^1 \partial_2 x^2 \lambda^3 \varepsilon_{123}^{123} + \partial_1 x^2 \partial_2 x^1 \lambda^3 \varepsilon_{213}^{123} = \lambda^3 (\partial_1 x^1 \partial_2 x^2 - \partial_1 x^2 \partial_2 x^1) = \lambda^3 \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} > 0$$

$$\text{Θέτουμε: } \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \equiv \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)} \quad \dots \text{και συμπεραίνουμε ότι αν } \frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)} > 0, \text{ τότε } \lambda^3=1 \text{ και αν}$$

$$\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)} < 0, \text{ τότε } \lambda^3=-1.$$

Από τη σχέση A4.16 προκύπτει ότι το στοιχείο εμβαδού της S γράφεται:

$$da_u = \eta \sqrt{\det \gamma(u)} du^1 \wedge du^2 = \lambda^3 e_3 \sqrt{\det \gamma(u)} du^1 \wedge du^2 \quad (A4.17)$$

...όπου:

$$\gamma(u) \equiv [\gamma_{\mu\nu}(u)] = \begin{pmatrix} \sum_j \partial_1 x^j_s(u) \partial_1 x^j_s(u) & \sum_j \partial_1 x^j_s(u) \partial_2 x^j_s(u) \\ \sum_j \partial_2 x^j_s(u) \partial_1 x^j_s(u) & \sum_j \partial_2 x^j_s(u) \partial_2 x^j_s(u) \end{pmatrix} \quad (A4.17a)$$

Εφόσον η επιφάνεια S ταυτίζεται με το επίπεδο $x^3=0$, η αναλυτική της έκφραση μπορεί να εκφραστεί από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x^1 = u^1, \quad x^2 = u^2, \quad x^3 = 0, \quad (u^1, u^2) \in R^2$$

Στην περίπτωση αυτή, ο πίνακας του μετρικού τανυστή επί της S (σχέση A4.17a) λαμβάνει τη μορφή:

$$\gamma(u) = [\gamma_{\mu\nu}(u)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον, ισχύει:

$$\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)} = 1 > 0$$

...από την οποία συνεπάγεται ότι $\lambda^3=1$, και το στοιχείο εμβαδού (σχέση A4.17) γράφεται:

$$da_u = e_3 \sqrt{\det \gamma(u)} du^1 \wedge du^2 = e_3 du^1 \wedge du^2$$

Το επίπεδο $S: x^3=0$, μπορεί να εκφραστεί σε πολικές παραμέτρους $(\rho, \theta) \in \bar{U} = [0, +\infty) \otimes [0, 2\pi)$ που σχετίζονται με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες με τον μετασχηματισμό:

$$x^1 = \rho \cos \theta, \quad x^2 = \rho \sin \theta$$

Στις $\bar{u} = (\rho, \theta)$ παραμέτρους, ο πίνακας του μετρικού τανυστή του επιπέδου S (σχέση A4.17a) λαμβάνει τη μορφή:

$$\bar{\gamma}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

...από την οποία προκύπτει ότι: $\det \bar{\gamma}(\rho, \theta) = \rho^2$

Ισχύει:

$$\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u^1, u^2)} = \det \begin{pmatrix} \partial_\rho x^1 & \partial_\rho x^2 \\ \partial_\theta x^1 & \partial_\theta x^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \rho > 0$$

...επομένως $\lambda^3=1$ και το στοιχείο εμβαδού (σχέση A4.17) γράφεται:

$$da_u = e_3 du^1 \wedge du^2 = e_3 \rho d\rho \wedge d\theta = d\bar{a}_{\bar{u}}$$

[Επιστροφή στα περιεχόμενα](#)

A5. Διανυσματικά πεδία - Συνοχή - Παράλληλη μετατόπιση - Συναλλοίωτη διαφορίαση - Κυκλοφορία και στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου

Σύνοψη: Στην ενότητα A5 ορίζουμε την έννοια του διανυσματικού πεδίου επί της εφαπτομενικής δέσμης του E_3 . (βλέπε [Ενότητα A3](#): Εφαπτομενικοί χώροι στα σημεία του E_3). Η δυνατότητα ποσοτικού υπολογισμού της μεταβολής ενός διανυσματικού πεδίου κατά την μετατόπισή του επί της εφαπτομενικής δέσμης του E_3 , ή επί της εφαπτομενικής δέσμης κάποιας επιφάνειας S , μας οδηγεί στην εισαγωγή της έννοιας της "συνοχής" και της παράλληλης μετατόπισης διανύσματος κατά μήκος καμπύλης του E_3 ή της S . Δείχνουμε ότι η παράλληλη μετατόπιση ενός διανυσματικού πεδίου είναι ένας ισομετρικός ισομορφισμός μεταξύ των εφαπτόμενων χώρων του συνεχούς, που προσδιορίζεται από την αναλυτική έκφραση του μετρικού τανυστή στο σύστημα συντεταγμένων που έχουμε επιλέξει. Μέσω της συνοχής διευρύνουμε την έννοια της διαφορίασης και ορίζουμε το συναλλοίωτο διαφορικό διανυσματικού πεδίου κατά μήκος καμπύλης του συνεχούς. Εκφράζουμε την αναλυτική έκφραση της συνοχής και του συναλλοίωτου διαφορικού ενός διανυσματικού πεδίου του E_3 σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

Ορίζουμε την κυκλοφορία διανυσματικού πεδίου κατά μήκος κλειστής καμπύλης του E_3 . Υπολογίζουμε την κυκλοφορία σε απειροστό βρόγχο ενός επιπέδου του E_3 και ορίζουμε τον στροβιλισμό του πεδίου. Υπολογίζουμε τον στροβιλισμό σε Καρτεσιανές και σε μη Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Διανυσματικά πεδία στο E_3 ^(2,4,6,9)

Ως **διανυσματικό πεδίο του E_3** ορίζεται κάθε απεικόνιση:

$$E_3 \ni X = X(x) \rightarrow V(x) \in \bigcup_{Y \in E_3} T_Y E_3 \equiv TE_3$$

...που είναι αναλλοίωτη ως προς κάθε μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^j = x^j(\bar{x})$ Δηλαδή, το $V(x)$ ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$V(X) = e_j(x)v^j(x) = \bar{e}_j(\bar{x})\bar{v}^j(\bar{x}) \quad (A5.1)$$

Από τον ορισμό αυτό και τις σχέσεις A3.6, συνεπάγεται ότι οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου $V(x)$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις συνακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} V(X) \equiv V(x) = V(\bar{x}) &\Rightarrow e_j v^j(x) = \bar{e}_k(\bar{x})\bar{v}^k(\bar{x}) \Rightarrow e_j v^j(x) = e_j \bar{\partial}_k x^j \bar{v}^k(\bar{x}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow v^j(x) = \bar{\partial}_k x^j \bar{v}^k(\bar{x}) \end{aligned} \quad (A5.2)$$

Η έννοια της συνοχής στο E_3 - Παράλληλη μετατόπιση διανύσματος κατά μήκος καμπύλης του E_3

Συμβολίζουμε $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ τις συντεταγμένες τυχαίου σημείου $X \in E_3$ ως προς το αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$. Με $x = (x^1, x^2, x^3)$ συμβολίζουμε τις συντεταγμένες του ίδιου σημείου ως προς το Καρτεσιανό σύστημα (O, x) : $X(x) \equiv \bar{X}(\bar{x}) \equiv X$

Έστω $V(X)$ διανυσματικό πεδίο του E_3 . Δεδομένου ότι το $V(X)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων, χρησιμοποιούμε με εναλλακτικά τους συμβολισμούς:

$$V(X) = V(x) = V(x(\bar{x})) = V(\bar{x})$$

Πώς θα υπολογίσουμε τη μεταβολή των συνιστωσών του διανυσματικού πεδίου $V(X)$ κατά την μετατόπιση του από το σημείο X στο απειροστά γειτονικό σημείο Y , ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$;

Συμβολίζουμε τις συντεταγμένες του Y :

$$\bar{y} = (\bar{x}^1 + \Delta\bar{x}^1, \bar{x}^2 + \Delta\bar{x}^2, \bar{x}^3 + \Delta\bar{x}^3) \text{ όπου: } \Delta\bar{x}^1, \Delta\bar{x}^2, \Delta\bar{x}^3 \rightarrow 0$$

Η μετατόπιση του διανυσματικού πεδίου γίνεται κατά μήκος του διανύσματος (σχέση A3.4):

$$\Delta X = \overline{XY} = e_j \Delta x^j = \bar{e}_k(\bar{x}) \Delta \bar{x}^k \in T_x E_3 \quad (A5.3)$$

Στη Στοιχειώδη Ευκλείδεια Γεωμετρία, για να υπολογίσουμε τη μεταβολή ενός διανυσματικού πεδίου $V(X)$ κατά τη μεταφορά του από ένα σημείο X σε ένα άλλο σημείο Y , κατά μήκος καμπύλης c που διέρχεται από τα X και Y , μεταφέρουμε το $V(X)$ παράλληλα προς τον εαυτό του από το X στο Y , κατά μήκος της c . Ονομάζουμε $V'(Y)$ το παράλληλο προς το $V(X)$ διάνυσμα στο Y . Η μεταβολή του διανυσματικού πεδίου ορίζεται από τη διαφορά $V'(Y) - V(Y)$.

Γενικά, το πρόβλημα στον υπολογισμό της μεταβολής ενός διανυσματικού πεδίου κατά την μετατόπισή του από ένα σημείο X σε ένα άλλο Y , εστιάζεται στο ότι τα διανύσματα $V(X)$ και $V(Y)$ ανήκουν σε διαφορετικούς διανυσματικούς χώρους: $V(X) \in T_x E_3$, $V(Y) \in T_y E_3$. Στην Στοιχειώδη Ευκλείδεια Γεωμετρία το πρόβλημα αυτό λύνεται με τη διαδικασία της παράλληλης μετατόπισης διανύσματος κατά μήκος μιας καμπύλης του Ευκλείδειου χώρου που συνδέει τους δύο χώρους (σχήμα A5.1). Σε μη Ευκλείδειες γεωμετρίες γενικεύουμε την **παράλληλη μετατόπιση διανύσματος** κατά μήκος καμπύλης και ακολουθούμε παρόμοια τεχνική με αυτή της Στοιχειώδους Γεωμετρίας. Η γενίκευση αυτή επιτυγχάνεται με την εισαγωγή της έννοιας της **συνοχής**.

Στη Στοιχειώδη Γεωμετρία η παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος καμπύλης C είναι ένας ισομετρικός ισομορφισμός^(5,8,9) μεταξύ των διανυσματικών χώρων που εφάπτονται στον Ευκλείδειο χώρο, στα σημεία της C . Έτσι, στο Ευκλείδειο συνεχές, ορίζουμε ως παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος καμπύλης C , τον **ισομετρικό ισομορφισμό**:

$$T_x E_3 \ni V \rightarrow V' = \varphi_{Y,X}(V) \in T_y E_3 \quad X, Y \in C \quad (A5.4a)$$

...όπου οι απεικονίσεις $\varphi_{Y,X}$ είναι γραμμικές, 1-1 και ικανοποιούν τις συνθήκες:

α) Για κάθε $V, U \in T_x E_3$ ισχύει:

$$\langle V, U \rangle_x = \langle \varphi_{Y,X}(V), \varphi_{Y,X}(U) \rangle_y \quad (A5.4\beta)$$

β) $\varphi_{X,X} : T_x E_3 \ni V \rightarrow \varphi_{X,X}(V) = V \in T_x E_3$

$$\text{ή: } \varphi_{X,X} \equiv \text{Id (ταυτοτική απεικόνιση)} \quad (A5.4\gamma)$$

γ) $\varphi_{Z,Y} \circ \varphi_{Y,X} = \varphi_{Z,X}$

Το σύνολο των ισομετρικών ισομορφισμών $\varphi_{Y,X}$ ορίζουν μια **συνοχή** στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 .

Έστω $\bar{x}^j = \bar{c}^j(\sigma)$, $\sigma \in I \subset \mathbb{R}$ η αναλυτική έκφραση της καμπύλης C ως προς το αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$ και διάνυσμα:

$$V = \bar{e}_j(\bar{x})\bar{V}^j \in T_{\bar{x}}E_3$$

Κατά μήκος της C ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο $V'(\bar{y})$, $\bar{y} = \bar{c}(\sigma)$ από τη σχέση:

$$\begin{aligned} T_{\bar{x}}E_3 \ni V = \bar{e}_j(\bar{x})\bar{V}^j &\rightarrow V'(\bar{y}) = \varphi_{\bar{y},\bar{x}}(V) \in T_{\bar{y}}E_3 \\ V'(\bar{y}) = \varphi_{\bar{y},\bar{x}}(V) &= \varphi_{\bar{y},\bar{x}}(\bar{e}_j(\bar{x})\bar{V}^j) = \\ &= \varphi_{\bar{y},\bar{x}}(\bar{e}_j(\bar{x}))\bar{V}^j = \bar{e}_k(\bar{y})\bar{\varphi}_j^k(\bar{y},\bar{x})\bar{V}^j \end{aligned} \quad (A5.5)$$

Το διανυσματικό πεδίο $V'(\bar{y})$ ορίζεται ως η **παράλληλη μετατόπιση του διανύσματος V** κατά μήκος της C (σχήμα A5.1, A5.2). Τα $\bar{\varphi}_j^k(\bar{y},\bar{x})$ συμβολίζουν τα στοιχεία πίνακα του ισομετρικού ισομορφισμού $\varphi_{\bar{y},\bar{x}}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$:

$$\varphi_{\bar{y},\bar{x}}(\bar{e}_j(\bar{x})) \underset{\text{ορισμ.}}{=} \bar{e}_k(\bar{y})\bar{\varphi}_j^k(\bar{y},\bar{x})$$

Απειροστή μεταβολή διανυσματικού πεδίου κατά μήκος καμπύλης του E_3

Έστω $V(\bar{x})$ διανυσματικό πεδίο του E_3 που ορίζεται επί της καμπύλης C . Θεωρούμε τα απειροστά γειτονικά σημεία X και Y της C , όπου:

$$X \leftrightarrow \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), Y \leftrightarrow \bar{x} + \Delta\bar{x} = (\bar{x}^1 + \Delta\bar{x}^1, \bar{x}^2 + \Delta\bar{x}^2, \bar{x}^3 + \Delta\bar{x}^3)$$

$$\Delta\bar{x}^j = \dot{\bar{c}}^j(\sigma)\Delta\sigma$$

Η παράλληλη μετατόπιση του $V(\bar{x})$ από τον $T_{\bar{x}}E_3$ στον $T_{\bar{x}+\Delta\bar{x}}E_3$ κατά μήκος της C , είναι το διάνυσμα $V'(\bar{x} + \Delta\bar{x}) \in T_{\bar{x}+\Delta\bar{x}}E_3$ που προσδιορίζεται από τις σχέσεις:

$$T_{\bar{x}}E_3 \ni V(\bar{x}) \rightarrow V'(\bar{x} + \Delta\bar{x}) = \varphi_{\bar{x}+\Delta\bar{x},\bar{x}}(V(\bar{x})) \in T_{\bar{x}+\Delta\bar{x}}E_3 \quad (A5.6)$$

$$\begin{aligned} V'(\bar{x} + \Delta\bar{x}) &= \bar{e}_k(\bar{x} + \Delta\bar{x})\bar{V}'^k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) = \\ &= \varphi_{\bar{x}+\Delta\bar{x},\bar{x}}(\bar{e}_j(\bar{x}))\bar{V}^j(\bar{x}) = \bar{e}_k(\bar{x} + \Delta\bar{x})\bar{\varphi}_j^k(\bar{x} + \Delta\bar{x},\bar{x})\bar{V}^j(\bar{x}) \end{aligned}$$

...όπου $[\bar{\varphi}_j^k(\bar{x} + \Delta\bar{x},\bar{x})]$ είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $\varphi_{\bar{x}+\Delta\bar{x},\bar{x}}$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$

Οι συνιστώσες του $V'(\bar{x} + \Delta\bar{x})$ υπολογίζονται από την έκφραση:

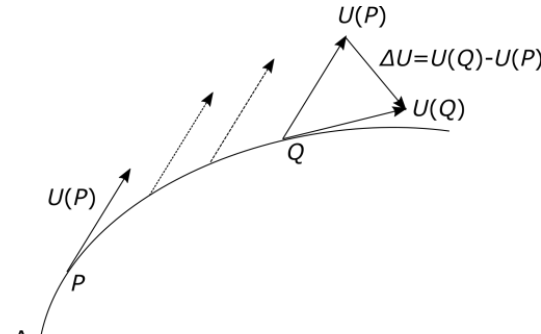
$$\bar{V}'^k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) = \bar{\varphi}_j^k(\bar{x} + \Delta\bar{x},\bar{x})\bar{V}^j(\bar{x})$$

Αναπτύσσουμε κατά Taylor και διατηρούμε όρους μέχρι και πρώτης τάξης ως προς τις απειροστές ποσότητες:

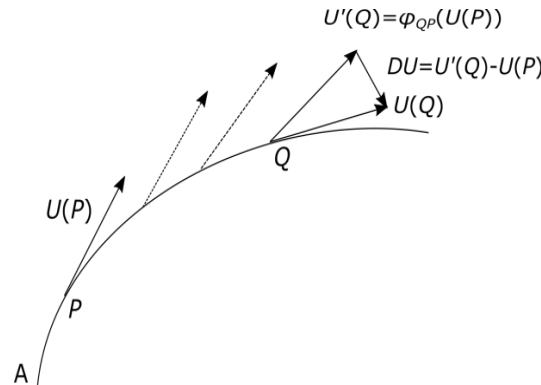
$$\bar{V}'^k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) = (\delta_j^k - \bar{\Gamma}_{jn}^k(\bar{x})\Delta\bar{x}^n)\bar{V}^j(\bar{x}), \quad \bar{\Gamma}_{jn}^k(\bar{x}) \equiv - \left. \frac{\partial \bar{\varphi}_j^k(\bar{y},\bar{x})}{\partial \bar{y}^n} \right|_{\bar{y}=\bar{x}} \quad (A5.7)$$

Οι ποσότητες $\bar{\Gamma}_{jn}^k(\bar{x})$ καθορίζουν τη συνοχή και ονομάζονται "**Σύμβολα Christoffel**".

Η μεταβολή του διανυσματικού πεδίου κατά την μετατόπισή του από το σημείο X στο γειτονικό σημείο Y της C , υπολογίζεται από τη διαφορά:



Σχήμα A5.1: Παράλληλη μετατόπιση και διαφορίση στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.



Σχήμα A5.2 Παράλληλη μετατόπιση και διαφορίση σε μη Ευκλείδεια Γεωμετρία.

$$\begin{aligned}
V(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - V'(\bar{x} + \Delta\bar{x}) &= \bar{e}_k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) \left(\bar{V}^k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - \bar{V}'^k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) \right) \approx \\
&\approx \bar{e}_k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) \left(\bar{V}^k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - \bar{V}^k(\bar{x}) + \bar{F}_{jn}^k(\bar{x}) \Delta\bar{x}^n \bar{V}^j(\bar{x}) \right) \approx \\
&\approx \bar{e}_k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) \Delta\bar{x}^n \left(\bar{\partial}_n \bar{V}^k(\bar{x}) + \bar{F}_{jn}^k(\bar{x}) \bar{V}^j(\bar{x}) \right)
\end{aligned} \tag{A5.7a}$$

Για να μπορούμε να εφαρμόζουμε την A5.7a στην επίλυση προβλημάτων, απαιτείται η γνώση των συμβόλων Christoffel. Τα υπολογίζουμε στην περίπτωση που η συνοχή μας είναι **ισομετρική και συμμετρική**. Μια συνοχή ορίζεται ως “**συμμετρική**” εφόσον τα σύμβολα Christoffel $\bar{F}_{jk}^i(\bar{x})$ είναι συμμετρικά ως προς τους δείκτες j, k :

$$\bar{F}_{jk}^i(\bar{x}) = \bar{F}_{kj}^i(\bar{x}) \tag{A5.8a}$$

[Οι συνοχές που ορίζονται στην εργασία αυτή, είναι συμμετρικές και ισομετρικές]

Από τον ορισμό του πίνακα $\left[\bar{\varphi}_j^k(\bar{x} + \Delta\bar{x}, \bar{x}) \right]$ και τις ιδιότητες της συνοχής, συνεπάγεται ότι αληθεύει η ταυτότητα:

$$\begin{aligned}
&\bar{\varphi}_k^j(\bar{x}, \bar{y}) \bar{\varphi}_n^k(\bar{x}, \bar{y}) = \delta_n^j \\
&\dots \text{από την οποία προκύπτει ότι:} \\
&\frac{\partial \bar{\varphi}_k^j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y^l} \bar{\varphi}_n^k(\bar{y}, \bar{x}) + \bar{\varphi}_k^j(\bar{x}, \bar{y}) \frac{\partial \bar{\varphi}_n^k(\bar{y}, \bar{x})}{\partial y^l} = 0 \Rightarrow \bar{F}_{kl}^j(\bar{x}) \delta_n^k + \delta_k^j \frac{\partial \bar{\varphi}_n^k(\bar{y}, \bar{x})}{\partial y^l} \Big|_{\bar{y}=\bar{x}} = 0 \Rightarrow \bar{F}_{nl}^j(\bar{x}) = - \frac{\partial \bar{\varphi}_n^j(\bar{y}, \bar{x})}{\partial y^l} \Big|_{\bar{y}=\bar{x}}
\end{aligned}$$

Η φ είναι ισομετρική συνοχή, επομένως αληθεύει η ισότητα:

$$\left\langle \varphi_{\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}}(\bar{e}_m(\bar{x} + \Delta\bar{x})), \varphi_{\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}}(\bar{e}_n(\bar{x} + \Delta\bar{x})) \right\rangle = \left\langle \bar{e}_m(\bar{x} + \Delta\bar{x}), \bar{e}_n(\bar{x} + \Delta\bar{x}) \right\rangle$$

...από την οποία προκύπτουν οι ταυτότητες:

$$\varphi_{\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}}(\bar{e}_m(\bar{x} + \Delta\bar{x})) = \bar{e}_n(\bar{x}) \bar{\varphi}_m^n(\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}) = \bar{e}_n(\bar{x}) \left(\delta_m^n + \frac{\partial \bar{\varphi}_m^n(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y^k} \Big|_{\bar{y}=\bar{x}} \Delta\bar{x}^k \right) = \bar{e}_n(\bar{x}) \left(\delta_m^n + \bar{F}_{mk}^n(\bar{x}) \Delta\bar{x}^k \right)$$

$$\left\langle \varphi_{\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}}(\bar{e}_m(\bar{x} + \Delta\bar{x})), \varphi_{\bar{x}, \bar{x} + \Delta\bar{x}}(\bar{e}_n(\bar{x} + \Delta\bar{x})) \right\rangle = \left\langle \bar{e}_j(\bar{x}), \bar{e}_l(\bar{x}) \right\rangle \left(\delta_m^j + \bar{F}_{mk}^j(\bar{x}) \Delta\bar{x}^k \right) \left(\delta_n^l + \bar{F}_{nl}^l(\bar{x}) \Delta\bar{x}^q \right)$$

$$\bar{g}_{mn}(\bar{x} + \Delta\bar{x}) = \bar{g}_{mn}(\bar{x}) + \bar{g}_{mi}(\bar{x}) \bar{F}_{nk}^i(\bar{x}) \Delta\bar{x}^k + \bar{g}_{jn}(\bar{x}) \bar{F}_{mk}^j(\bar{x}) \Delta\bar{x}^k$$

...και τελικά:

$$\bar{\partial}_k \bar{g}_{mn} = \bar{F}_{mnk} + \bar{F}_{nmk} \quad \text{όπου: } \bar{F}_{mnk} = \bar{g}_{mi} \bar{F}_{nk}^i \tag{A5.8\beta}$$

Με δεδομένο ότι η συνοχή είναι συμμετρική, ισχύει: $\bar{F}_{nmk} = \bar{F}_{nkm}$ Με την προϋπόθεση αυτή μπορούμε να επιλύσουμε τις γραμμικές εξισώσεις A5.8α και A5.8β ως προς τα σύμβολα Christoffel, και να τα εκφράσουμε συναρτήσει των στοιχείων πίνακα του μετρικού τανυστή. Επιβεβαιώστε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\bar{F}_{kl}^i = \bar{g}^{ij} \bar{F}_{jkl}, \quad \bar{F}_{jkl} = \frac{1}{2} \left(-\bar{\partial}_j \bar{g}_{kl} + \bar{\partial}_l \bar{g}_{jk} + \bar{\partial}_k \bar{g}_{lj} \right) \tag{A5.8\gamma}$$

Παρατήρηση 1

Με βάση τις A5.8γ και τον τρόπο που μετασχηματίζονται τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^j = x^j(\bar{x})$ (σχέση A3.7), μπορούμε να δείξουμε ότι τα σύμβολα Christoffel μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\bar{F}_{nk}^m = \partial_s \bar{x}^m \bar{\partial}_k \bar{\partial}_n x^s + \partial_r \bar{x}^m \bar{\partial}_n x^s \bar{\partial}_k x^l \Gamma_{sl}^r \tag{A5.8\delta}$$

Παρατήρηση 2

Ως προς ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O, x) , τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή $[g_{ij}]$, δίδονται από τις σχέσεις: $g_{ij} = \delta_{ij}$. Τότε, σύμφωνα με την A5.8γ, τα σύμβολα Christoffel είναι όλα ίσα με το μηδέν. Ωστόσο, από την A5.8δ προκύπτει ότι σε ένα τυχαίο σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$ του Ευκλείδειου συνεχούς που συνδέεται με τις Καρτεσιανές

συντεταγμένες μέσω του μετασχηματισμού $x^j = x^j(\bar{x})$, τα σύμβολα Christoffel δεν είναι κατ' ανάγκη ίσα με το μηδέν. Υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$\bar{\Gamma}_{nk}^m = \partial_s \bar{x}^m \bar{\partial}_k \bar{\partial}_n x^s \quad (\text{A5.8ε})$$

Συναλλοίωτο διαφορικό διανυσματικού πεδίου κατά μήκος απειροστής μετατόπισης

Έστω $V(\bar{x})$ διανυσματικό πεδίο του E_3 που ορίζεται επί της καμπύλης C . Θεωρούμε τα απειροστά γειτονικά σημεία X και Y της C , όπου:

$$X \leftrightarrow \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), Y \leftrightarrow \bar{x} + \Delta \bar{x} = (\bar{x}^1 + \Delta \bar{x}^1, \bar{x}^2 + \Delta \bar{x}^2, \bar{x}^3 + \Delta \bar{x}^3) \quad (\text{A5.9})$$

$$\Delta \bar{x}^j = \dot{\bar{c}}^j(\sigma) \Delta \sigma$$

Το συναλλοίωτο διαφορικό $D_{\Delta x} V(\bar{x})$ του $V(X)$ ορίζεται με τη βοήθεια της έννοιας της παράλληλης μετατόπισης, κατ' αναλογία με την τεχνική που χρησιμοποιούμε στην Στοιχειώδη Ευκλείδεια Γεωμετρία:

$$\begin{aligned} D_{\Delta x} V(\bar{x}) &= \varphi_{\bar{x}, \bar{x} + \Delta \bar{x}}^{\text{ορισμ.}} (V(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - V(\bar{x})) = \varphi_{\bar{x}, \bar{x} + \Delta \bar{x}} (\bar{e}_j(\bar{x} + \Delta \bar{x}) \bar{V}^j(\bar{x} + \Delta \bar{x}) - \bar{e}_k(\bar{x}) \bar{V}^k(\bar{x})) = \\ &= \bar{e}_k(\bar{x}) (\bar{\varphi}_j^k(\bar{x}, \bar{x} + \Delta \bar{x}) (\bar{V}^j(\bar{x}) + \bar{\partial}_n \bar{V}^j(\bar{x}) \Delta \bar{x}^n) - \bar{V}^k(\bar{x})) = \\ &= \bar{e}_k(\bar{x}) ((\bar{\partial}_j^k + \bar{\Gamma}_{jn}^k(\bar{x}) \Delta \bar{x}^n) (\bar{V}^j(\bar{x}) + \bar{\partial}_n \bar{V}^j(\bar{x}) \Delta \bar{x}^n) - \bar{V}^k(\bar{x})) = \\ &= \bar{e}_k(\bar{x}) (\bar{\partial}_n \bar{V}^k(\bar{x}) + \bar{\Gamma}_{jn}^k(\bar{x}) \bar{V}^j(\bar{x}) \Delta \bar{x}^n) \end{aligned} \quad (\text{A5.10})$$

$$\dots \text{όπου: } \bar{\Gamma}_{nl}^j(\bar{x}) = \left. \frac{\partial \bar{\varphi}_n^j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}^l} \right|_{\bar{y}=\bar{x}}$$

Είναι φανερό από την A5.10, ότι σε Καρτεσιανές συντεταγμένες ισχύει η (αναμενόμενη) σχέση:

$$D_{\Delta x} V(x) = e_k(x) \partial_n V^k(x) \Delta x^n = e_k(x) d_{\Delta x} V^k(x)$$

...όπου $d_{\Delta x} V^k(x)$ το κατευθυνόμενο διαφορικό της $V^k(x)$, κατά μήκος του Δx .

Οι συνιστώσες του $D_{\Delta x} V(\bar{x})$ προκύπτουν άμεσα από την A5.10:

$$D_{\Delta x}^k V(\bar{x}) = (\bar{\partial}_n \bar{V}^k(\bar{x}) + \bar{\Gamma}_{jn}^k(\bar{x}) \bar{V}^j(\bar{x})) \Delta \bar{x}^n \quad (\text{A5.10α})$$

Υπολογισμός της κυκλοφορίας (circulation) διανυσματικού πεδίου κατά μήκος κλειστής καμπύλης - Στροβιλισμός του πεδίου

Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $U(X) \in \bigcup_{Y \in E_3} T_Y E_3$ του Ευκλείδειου συνεχούς E_3 , το οποίο στο

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O, x) εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός της Καρτεσιανής βάσης $\{e_1, e_2, e_3\}$, σύμφωνα με τη σχέση:

$$U(X) = e_j u^j(x), \quad x = (x^1, x^2, x^3)$$

Ως **δυϊκή (dual)⁽⁹⁾ 1-μορφή p_U του πεδίου $U(X)$** ορίζεται η γραμμική απεικόνιση⁽⁹⁾:

$$T_X E_3 \xrightarrow{p_U} R: p_U(\Delta X) \stackrel{\text{def}}{=} \langle U(x), \Delta X \rangle = g_{jk}(x) u^j(x) \Delta x^k = g_{jk}(x) u^j(x) dx^k(\Delta X) \quad (\text{A5.11})$$

$$p_U = g_{jk}(x) u^j(x) dx^k \quad \text{για κάθε } U(X) \in \bigcup_{Y \in E_3} T_Y E_3$$

Ισχύει:

$$p_U(U) = \langle U, U \rangle = g_{jk}(x) u^j(x) dx^k(U) = g_{jk}(x) u^j(x) u^k(x) = \|U(x)\|^2 \quad (\text{A5.11α})$$

Θεωρούμε μια κλειστή καμπύλη του E_3 $C: x^j = c^j(\sigma), \sigma \in R$. Ορίζουμε την “**κυκλοφορία**” (circulation) του διανυσματικού πεδίου $U(X)$ κατά μήκος της C , από τη σχέση:

$$\Gamma_C \stackrel{\text{def}}{=} \oint_C p_U(\Delta C) = \oint_C g_{jk}(x) u^j(x) dx^k(\Delta C) = \oint_C g_{jk}(x) u^j(x) \dot{c}^k d\sigma \quad (\text{A5.11β})$$

Επιλέγουμε ένα Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O, x) . Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο $U(X)$ εφαπτόμενο στο επίπεδο $z=0$ του E_3 , και έναν απειροστό βρόγχο p που

κείται επί του επιπέδου. Από την A5.11β, υπολογίζουμε την κυκλοφορία του $U(X)$ επί του p_x

Αφού το $U(X)$ είναι εφαπτόμενο στο επίπεδο E_z : $z=0$, ως προς το Καρτεσιανό σύστημα (O,x) έχει τη μορφή:

$$U(X) = e_x u^x(x, y) + e_y u^y(x, y)$$

...όπου e_x, e_y, e_z η Καρτεσιανή βάση διανυσμάτων στους εφαπτόμενους χώρους του E_3 , ως προς το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O,x) (βλέπε [Ενότητα A3](#)).

Η δυϊκή μορφή του U υπολογίζεται από την A5.11, όπου: $g_{jk}(x) = \delta_{jk}$

$$p_U(\Delta X) = \langle U(x), \Delta X \rangle = \delta_{jk} u^j(x) \Delta x^k = (u^x(x, y) dx + u^y(x, y) dy) (\Delta X) \quad (A5.11\gamma)$$

Θεωρούμε ένα απειροστό παραλληλόγραμμο $p(X; \Delta_1 X, \Delta_2 X)$ του E_z , με κορυφή το σημείο $X \leftrightarrow (x, y, 0)$ και πλευρές τα διανύσματα $\Delta_1 X = e_x \Delta x, \Delta_2 X = e_y \Delta y$

Το σύνορο του p , ορίζεται από την καμπύλη $C = \partial p(X; \Delta_1 X, \Delta_2 X)$. Η καμπύλη C αποτελείται από τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα C_1, C_2, C_3 και C_4 . Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων τους υπολογίζονται από τις αναλυτικές εκφράσεις:

$$C_1 \leftrightarrow c_1(\sigma) = (x + \sigma \Delta x, y, 0), C_2 \leftrightarrow c_2(\sigma) = (x + \Delta x, y + \sigma \Delta y, 0),$$

$$C_3 \leftrightarrow c_3(\sigma) = (x + \Delta x - \sigma \Delta x, y + \Delta y, 0), C_4 \leftrightarrow c_4(\sigma) = (x, y + \Delta y - \sigma \Delta y, 0)$$

$$\dots \text{όπου: } \sigma \in [0, 1]$$

Τα απειροστά εφαπτόμενα διανύσματα σε κάθε τμήμα της C δίδονται από τις σχέσεις:

$$\delta C_1(\sigma) = e_x \delta \sigma \Delta x, \delta C_2(\sigma) = e_y \delta \sigma \Delta y, \delta C_3(\sigma) = -e_x \delta \sigma \Delta x, \delta C_4(\sigma) = -e_y \delta \sigma \Delta y$$

...και η δράση των 1-μορφών dx και dy σε αυτά, μας υπολογίζεται από τις:

$$dx(\delta C_1(\sigma)) = \delta \sigma \Delta x, dx(\delta C_2(\sigma)) = 0, dx(\delta C_3(\sigma)) = -\delta \sigma \Delta x, dx(\delta C_4(\sigma)) = 0$$

$$dy(\delta C_1(\sigma)) = 0, dy(\delta C_2(\sigma)) = \delta \sigma \Delta y, dy(\delta C_3(\sigma)) = 0, dy(\delta C_4(\sigma)) = -\delta \sigma \Delta y$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση A5.11β και A5.11γ, η κυκλοφορία του διανυσματικού πεδίου $U(X)$ κατά μήκος της περιμέτρου του απειροστού παραλληλογράμμου p , είναι:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\partial p} &= \oint_{C=\partial p} (u^x dx + u^y dy) (\delta c) = \int_{C_1} (u^x dx + u^y dy) (\delta c_1) + \int_{C_2} (u^x dx + u^y dy) (\delta c_2) + \\ &+ \int_{C_3} (u^x dx + u^y dy) (\delta c_3) + \int_{C_4} (u^x dx + u^y dy) (\delta c_4) = \int_0^1 u^x(x + \sigma \Delta x, y) \delta \sigma \Delta x + \\ &+ \int_0^1 u^y(x + \Delta x, y + \sigma \Delta y) \delta \sigma \Delta y - \int_0^1 u^x(x + \sigma \Delta x, y + \Delta y) \delta \sigma \Delta x - \int_0^1 u^y(x, y + \sigma \Delta y) \delta \sigma \Delta y \approx \\ &\approx u^x(x, y) \Delta x + u^y(x + \Delta x, y) \Delta y - u^x(x, y + \Delta y) \Delta x - u^y(x, y) \Delta y \approx \\ &\approx u^x(x, y) \Delta x + u^y(x, y) \Delta y + \partial_x u^y(x, y) \Delta x \Delta y - u^x(x, y) \Delta y - \partial_y u^x(x, y) \Delta x \Delta y - u^y(x, y) \Delta y \approx \\ &\approx (\partial_x u^y(x, y) - \partial_y u^x(x, y)) \Delta x \Delta y = (-\partial_y u^x(x, y) + \partial_x u^y(x, y)) dx \wedge dy (\Delta_1 X, \Delta_2 X) = \\ &= d(u^x dx + u^y dy) (\Delta_1 X, \Delta_2 X) = dp_U(\Delta_1 X, \Delta_2 X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dp_U &= d(u^x dx + u^y dy) = (-\partial_y u^x(x, y) + \partial_x u^y(x, y)) dx \wedge dy = \\ &= (\partial_x u^y(x, y) - \partial_y u^x(x, y)) da_z \quad \text{όπου: } da_z = dx \wedge dy \end{aligned} \quad (A5.12)$$

$$\Gamma_{\partial p} = dp_U(\Delta_1 X, \Delta_2 X) = (\partial_x u^y(x, y) - \partial_y u^x(x, y)) da_z(\Delta_1 X, \Delta_2 X)$$

Με dp_U συμβολίζουμε το “εξωτερικό διαφορικό” της 1-μορφής: $p_U = u^x dx + u^y dy$. Το εξωτερικό διαφορικό μιας 1-μορφής ορίζεται από τη σχέση:

$$d(f_j(x) dx^j) \Big|_{\text{ορισμ.}} = \partial_k f_j(x) dx^k \wedge dx^j$$

Από την A5.12 προκύπτει ότι η κυκλοφορία ενός διανυσματικού πεδίου επί ενός απειροστού βρόγχου εκφράζεται μέσω του εξωτερικού διαφορικού της δυϊκής μορφής του πεδίου (σχέση A5.12). Ορίζουμε τον στροβιλισμό ω του διανυσματικού πεδίου $U(X)$ στο επίπεδο E_z , από την έκφραση:

$$\omega_{\text{ορισμ.}} = -\partial_y u^x(x, y) + \partial_x u^y(x, y) \quad (\text{A5.12a})$$

Το στοιχείο εμβαδού του επιπέδου E_z δίδεται από τη 2-μορφή (Ενότητα A4): $da_z = dx \wedge dy$ οπότε, από τις A5.12 και τον ορισμό A5.12a έχουμε:

$$dp_U = (\partial_x u^y(x, y) - \partial_y u^x(x, y)) dx \wedge dy = \omega dx \wedge dy = \omega da_z \quad (\text{A5.12β})$$

$$dp_U = \omega dx \wedge dy, \Gamma_{\varphi} = dp_U(\Delta_1 X, \Delta_2 X) = \omega dx \wedge dy(\Delta_1 X, \Delta_2 X) = \omega \Delta a[p]$$

...όπου: $\Delta a[p] = dx \wedge dy(\Delta_1 X, \Delta_2 X)$ το εμβαδόν του απειροστού βρόγχου p .

Σε ένα αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$, η 1-μορφή p_U προσδιορίζεται επί του επιπέδου E_z από την έκφραση:

$$p_U = \bar{g}_{kj} \bar{U}^k d\bar{x}^j = \bar{U}_j d\bar{x}^j, j, k = 1, 2$$

Το εξωτερικό διαφορικό της p_U είναι η 2-μορφή:

$$dp_U = \bar{\partial}_n (\bar{g}_{kj} \bar{U}^k) d\bar{x}^n \wedge d\bar{x}^j = (\bar{\partial}_1 (\bar{g}_{k2} \bar{U}^k) - \bar{\partial}_2 (\bar{g}_{k1} \bar{U}^k)) d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 = (\bar{\partial}_1 \bar{U}_2 - \bar{\partial}_2 \bar{U}_1) d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2$$

Σύμφωνα με την A4.15 (Ενότητα A4) η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$dp_U = \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_z}} (\bar{\partial}_1 (\bar{g}_{k2} \bar{U}^k) - \bar{\partial}_2 (\bar{g}_{k1} \bar{U}^k)) da_z = \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}_z}} (\bar{\partial}_1 \bar{U}_2 - \bar{\partial}_2 \bar{U}_1) da_z \equiv \bar{\omega} da_z$$

(Θυμηθείτε ότι το στοιχείο εμβαδού επιφάνειας είναι αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό των παραμέτρων της επιφάνειας (Ενότητα A4))

Συμπεραίνουμε ότι ο στροβιλισμός του $U(X)$ επί του επιπέδου E_z , στο σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$ υπολογίζεται από την αναλυτική έκφραση:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}}} (\bar{\partial}_1 (\bar{g}_{k2} \bar{U}^k) - \bar{\partial}_2 (\bar{g}_{k1} \bar{U}^k)) = \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}}} (\bar{\partial}_1 \bar{U}_2 - \bar{\partial}_2 \bar{U}_1) \quad (\text{A5.13})$$

Στη γενική περίπτωση, η δυϊκή 1-μορφή p_U του διανυσματικού πεδίου $U = \bar{e}_j \bar{U}^j$ του E_3 , ως προς αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$, προσδιορίζεται από την αναλυτική έκφραση:

$$p_U(\Delta X) = \langle U, \Delta X \rangle = \bar{g}_{jk} \bar{U}^j d\bar{x}^k(\Delta X) \Rightarrow p_U = \bar{g}_{jk} \bar{U}^j d\bar{x}^k = \bar{U}_k d\bar{x}^k \quad (\text{A5.14})$$

Η κυκλοφορία του U κατά μήκος απειροστού βρόγχου, ισούται με το εξωτερικό διαφορικό της 1-μορφής p_U :

$$\begin{aligned} dp_U &= \bar{\partial}_n (\bar{g}_{jk} \bar{U}^j) d\bar{x}^n \wedge d\bar{x}^k = \\ &= \bar{\partial}_n (\bar{g}_{j1} \bar{U}^j) d\bar{x}^n \wedge d\bar{x}^1 + \bar{\partial}_n (\bar{g}_{j2} \bar{U}^j) d\bar{x}^n \wedge d\bar{x}^2 + \bar{\partial}_n (\bar{g}_{j3} \bar{U}^j) d\bar{x}^n \wedge d\bar{x}^3 = \\ &= (-\bar{\partial}_2 \bar{U}_1 + \bar{\partial}_1 \bar{U}_2) d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 + (\bar{\partial}_2 \bar{U}_3 - \bar{\partial}_3 \bar{U}_2) d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3 + (\bar{\partial}_3 \bar{U}_1 - \bar{\partial}_1 \bar{U}_3) d\bar{x}^3 \wedge d\bar{x}^1 \end{aligned} \quad (\text{A5.15})$$

Χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις των στοιχείων εμβαδού επί των επιπέδων:

$$\Delta \bar{x}^3 = 0, \Delta \bar{x}^1 = 0, \Delta \bar{x}^2 = 0$$

...που διέρχονται από το σημείο X του E_3 ($X \leftrightarrow (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$)

$$d\bar{a}_{12} = \sqrt{\det \bar{g}^{(3)}} d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2, d\bar{a}_{23} = \sqrt{\det \bar{g}^{(1)}} d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3, d\bar{a}_{31} = \sqrt{\det \bar{g}^{(2)}} d\bar{x}^3 \wedge d\bar{x}^1 \quad (\text{A5.15a})$$

...όπου:

$$\bar{g}^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{22} & \bar{g}_{23} \\ \bar{g}_{32} & \bar{g}_{33} \end{pmatrix}, \bar{g}^{(2)} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{13} \\ \bar{g}_{31} & \bar{g}_{33} \end{pmatrix}, \bar{g}^{(3)} = \begin{pmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} \end{pmatrix}$$

...είναι οι αντίστοιχοι πίνακες του μετρικού τανυστή σε καθένα από τα επίπεδα. Συμπεραίνουμε ότι:

$$dp_U = \bar{\omega}^1 d\bar{a}_{23} + \bar{\omega}^2 d\bar{a}_{31} + \bar{\omega}^3 d\bar{a}_{12} \quad (\text{A5.15}\beta)$$

και οι συνιστώσες του στροβιλισμού του διανυσματικού πεδίου U υπολογίζονται από τις:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^1 &= \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}^{(1)}}} (\bar{\partial}_2 \bar{U}_3 - \bar{\partial}_3 \bar{U}_2), \quad \bar{\omega}^2 = \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}^{(2)}}} (\bar{\partial}_3 \bar{U}_1 - \bar{\partial}_1 \bar{U}_3), \\ \bar{\omega}^3 &= \frac{1}{\sqrt{\det \bar{g}^{(3)}}} (\bar{\partial}_1 \bar{U}_2 - \bar{\partial}_2 \bar{U}_1) \end{aligned} \quad (\text{A5.15}\gamma)$$

...όπου: $\bar{U}_j = \bar{g}_{jk} \bar{U}^k$ είναι οι συναλλοίωτες συνιστώσες του διανύσματος U ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$

Σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, από τις A5.15β προκύπτουν οι εκφράσεις:

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \partial_2 U^3 - \partial_3 U^2, \quad \omega^2 = \partial_3 U^1 - \partial_1 U^3, \quad \omega^3 = \partial_1 U^2 - \partial_2 U^1 \\ \omega &= e_1 (\partial_2 U^3 - \partial_3 U^2) + e_2 (\partial_3 U^1 - \partial_1 U^3) + e_3 (\partial_1 U^2 - \partial_2 U^1) = \nabla \times U \end{aligned} \quad (\text{A5.15}\delta)$$

[Επιστροφή στα περιεχόμενα](#)

A6. Αναλυτική έκφραση του στροβιλισμού, της συνοχής και της συναλλοίωτης διαφορίσης σε πολικές και σφαιρικές συντεταγμένες

Σύνοψη: Στην παρούσα ενότητα εφαρμόζουμε τις σχέσεις και τα συμπεράσματα που παρήχθησαν στις προηγούμενες Ενότητες. Ορίζουμε τους μετασχηματισμούς που σχετίζουν ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με ένα πολικό.

Ως προς το πολικό σύστημα συντεταγμένων, διεξάγουμε τις ακόλουθες εφαρμογές:

α) Παράγουμε τον επαγόμενο μετασχηματισμό συντεταγμένων στους εφαιπτόμενους χώρους του E_3 και υπολογίζουμε τα στοιχεία βάσης.

β) Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο του E_3 και το εκφράζουμε ως γραμμικό συνδυασμό των πολικών στοιχείων βάσης. Υπολογίζουμε τον πίνακα του μετρικού τανυστή σε κάθε εφαιπτόμενο χώρο.

γ) Παράγουμε την αναλυτική έκφραση του στοιχείου όγκου του E_3 .

δ) Παράγουμε την αναλυτική έκφραση του στροβιλισμού διανυσματικού πεδίου του E_3 .

ε) Υπολογίζουμε τα σύμβολα Christoffel που προσδιορίζουν τη συνοχή του E_3 . Εκφράζουμε το συναλλοίωτο διαφορικό διανυσματικού πεδίου κατά μήκος καμπύλης του E_3 .

ζ) Επαναλαμβάνουμε τις παραπάνω δραστηριότητες για ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

A6-A: Πολικές συντεταγμένες

Ο μετασχηματισμός που συνδέει ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του E_3 , με ένα πολικό, ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (\text{A6.1})$$

Χρησιμοποιούμε κατά περίπτωση τους συμβολισμούς:

$$\begin{aligned} x^1 &\equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z \quad \text{και:} \quad r \equiv \bar{x}^1, \quad \theta \equiv \bar{x}^2, \quad z \equiv \bar{x}^3 \\ \bar{x}^1 &\in [0, +\infty), \quad \bar{x}^2 \in [0, 2\pi), \quad \bar{x}^3 \in (-\infty, +\infty) \end{aligned} \quad (\text{A6.1a})$$

Ο επαγόμενος μετασχηματισμός στους εφαιπτόμενους χώρους

Έστω $V(X) \in \bigcup_{Y \in E_3} T_Y E_3$ διανυσματικό πεδίο του E_3 . Πώς μετασχηματίζονται οι συνιστώσες του $V(X)$

κάτω από τον μετασχηματισμό A6.1;

Στο Καρτεσιανό σύστημα (O, x) συντεταγμένων το $V(X)$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των Καρτεσιανών στοιχείων βάσης e_j , $j=1,2,3$:

$$V(X) = e_j V^j(x), \quad x \equiv (x^1, x^2, x^3) \in R^3$$

Υπάρχει καμπύλη C του E_3 που αντιστοιχεί στην καμπύλη $c(s) = \overline{OC}(s) = e_j c^j(s)$ του συσχετισμένου χώρου V_3 ([Ενότητα A3](#)) ώστε:

$$V^j(x) = \dot{c}^j(s), \quad \dot{c}^j(s) \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta c^j(s)}{\Delta s} \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta x^j}{\Delta s} \quad (\text{A6.2})$$

Οι Καρτεσιανές συνιστώσες Δx^j του απειροστού διανύσματος $\Delta X = e_j \Delta x^j \in T_{c(s)} E_3$ κάτω από τον μετασχηματισμό A6.1, μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$(\Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3) = (\Delta \bar{x}^1, \Delta \bar{x}^2, \Delta \bar{x}^3) \begin{pmatrix} \bar{\partial}_1 x^1 & \bar{\partial}_1 x^2 & \bar{\partial}_1 x^3 \\ \bar{\partial}_2 x^1 & \bar{\partial}_2 x^2 & \bar{\partial}_2 x^3 \\ \bar{\partial}_3 x^1 & \bar{\partial}_3 x^2 & \bar{\partial}_3 x^3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta x^j = \Delta \bar{x}^k \bar{\partial}_k x^j(\bar{x}) \Rightarrow \begin{cases} \Delta x = \Delta r \cos \theta - \Delta \theta r \sin \theta \\ \Delta y = \Delta r \sin \theta + \Delta \theta r \cos \theta \\ \Delta z = \Delta \bar{z} \end{cases} \quad (A6.3)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός του A6.3 δίδεται από τις:

$$(\Delta \bar{x}^1, \Delta \bar{x}^2, \Delta \bar{x}^3) = (\Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3) \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{x}^1 & \partial_1 \bar{x}^2 & \partial_1 \bar{x}^3 \\ \partial_2 \bar{x}^1 & \partial_2 \bar{x}^2 & \partial_2 \bar{x}^3 \\ \partial_3 \bar{x}^1 & \partial_3 \bar{x}^2 & \partial_3 \bar{x}^3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta r = \Delta x \cos \theta + \Delta y \sin \theta, \Delta \theta = \frac{1}{r}(-\Delta x \sin \theta + \Delta y \cos \theta), \Delta \bar{z} = \Delta z \quad (A6.4)$$

Από τις A6.2, A6.3, A6.4 συνεπάγεται ότι οι συνιστώσες του $V(X)$ μετασχηματίζονται με έναν παρόμοιο τρόπο:

$$V^j = \bar{V}^k \bar{\partial}_k x^j(\bar{x}) \Rightarrow \begin{cases} V^x = V^r \cos \theta - V^\theta r \sin \theta \\ V^y = V^r \sin \theta + V^\theta r \cos \theta \\ V^z = V^{\bar{z}} \end{cases} \quad (A6.4a)$$

ή:

$$\begin{cases} V^r = V^x \cos \theta + V^y \sin \theta \\ V^\theta = \frac{1}{r}(-V^x \sin \theta + V^y \cos \theta) \\ V^z = V^{\bar{z}} \end{cases} \quad (A6.4\beta)$$

Μετασχηματισμός των στοιχείων βάσης του εφαιπόμενου χώρου $T_x E_3$

Τα στοιχεία βάσης του $T_x E_3$ μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\{\Delta X = e_j \Delta x^j = \bar{e}_k \Delta \bar{x}^k = e_j \Delta \bar{x}^k \bar{\partial}_k x^j\} \Rightarrow \bar{e}_k = e_j \bar{\partial}_k x^j \quad (A6.5)$$

$$e_r = e_x \cos \theta + e_y \sin \theta, e_\theta = -e_x r \sin \theta + e_y r \cos \theta, e_z = e_z \quad (A6.5a)$$

$$\Delta X = e_r \Delta r + e_\theta \Delta \theta + e_z \Delta z$$

Ο Ιακωβιανός (Jacobian) πίνακας του μετασχηματισμού από πολικές σε Καρτεσιανές συντεταγμένες υπολογίζεται από την έκφραση (σχέση A.3):

$$[\bar{\partial}_i x^j] = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_1 x^1 & \bar{\partial}_1 x^2 & \bar{\partial}_1 x^3 \\ \bar{\partial}_2 x^1 & \bar{\partial}_2 x^2 & \bar{\partial}_2 x^3 \\ \bar{\partial}_3 x^1 & \bar{\partial}_3 x^2 & \bar{\partial}_3 x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A6.5\beta)$$

$$\det[\bar{\partial}_i x^j] = r$$

...και ο αντίστροφός του:

$$[\bar{\partial}_i x^j]^{-1} = [\partial_j \bar{x}^i] = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{x}^1 & \partial_1 \bar{x}^2 & \partial_1 \bar{x}^3 \\ \partial_2 \bar{x}^1 & \partial_2 \bar{x}^2 & \partial_2 \bar{x}^3 \\ \partial_3 \bar{x}^1 & \partial_3 \bar{x}^2 & \partial_3 \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A6.5\gamma)$$

$$\det[\partial_j \bar{x}^i] = \frac{1}{r}$$

Ο μετρικός τανυστής σε πολικές συντεταγμένες

Στο πολικό σύστημα συντεταγμένων, τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\bar{g}_{jk} = \langle \bar{e}_j, \bar{e}_k \rangle \Rightarrow \begin{cases} \bar{g}_{11} = g_{rr} = 1, \bar{g}_{22} = g_{\theta\theta} = r^2, \bar{g}_{33} = g_{zz} = 1 \\ \bar{g}_{12} = \bar{g}_{21} = g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0, \bar{g}_{13} = \bar{g}_{31} = g_{rz} = g_{zr} = 0 \\ \bar{g}_{23} = \bar{g}_{32} = g_{\theta z} = g_{z\theta} = 0 \end{cases} \quad (A6.6)$$

$$[\bar{g}_{jk}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{x}^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det[\bar{g}_{jk}] = r^2 \quad (A6.6a)$$

Το μήκος του απειροστού διανύσματος $\Delta X \in T_x E_3$ διατηρείται αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων. Η αναλυτική του έκφραση σε Καρτεσιανές και σε πολικές συντεταγμένες εκφράζεται με τις ισότητες:

$$\Delta s^2 = \langle \Delta X, \Delta X \rangle = \bar{g}_{ij} \Delta \bar{x}^i \Delta \bar{x}^j = \Delta r^2 + r^2 \Delta \theta^2 + \Delta z^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \quad (A6.7)$$

Από τη διατήρηση του μήκους, κάτω από κάθε μετασχηματισμό συντεταγμένων μπορούμε να εξάγουμε μια σχέση που συνδέει την οριζουσα του Ιακωβιανού πίνακα του μετασχηματισμού με την οριζουσα του μετρικού τανυστή:

$$\bar{g}_{jk}(X) \Delta \bar{x}^j \Delta \bar{x}^k = g_{jk} \Delta x^j \Delta x^k \Rightarrow \bar{g}_{jk}(X) \Delta \bar{x}^j \Delta \bar{x}^k = g_{jk} \Delta \bar{x}^j \Delta \bar{x}^k \bar{\partial}_j x^j \bar{\partial}_k x^k \quad (A6.7a)$$

$$\bar{g}_{jk}(X) = g_{jk} \bar{\partial}_j x^j \bar{\partial}_k x^k \Rightarrow \det[\bar{g}_{jk}(X)] = \det[g_{jk}(X)] (\det[\bar{\partial}_j x^k])^2$$

Σε Καρτεσιανές συντεταγμένες ισχύει: $g_{jk}(X) = \delta_{jk}$ και από την A6.7a συνεπάγεται ότι:

$$\det[\bar{\partial}_j x^j(\bar{x})] = r \quad (A6.7\beta)$$

...που συμφωνεί με την A6.5β.

Μετασχηματισμός των 1-μορφών σε πολικές συντεταγμένες

Σύμφωνα με τα πορίσματα της [Ενότητας A4](#), οι μετασχηματισμοί που συνδέουν τις 1-μορφές βάσης σε Καρτεσιανές συντεταγμένες με τις 1-μορφές βάσης σε πολικές συντεταγμένες, προκύπτουν από τις ακόλουθες ταυτότητες:

$$dr = dx \cos \theta + dy \sin \theta, d\theta = -\frac{1}{r} dx \sin \theta + \frac{1}{r} dy \cos \theta, dz = dz \quad (A6.8)$$

$$dx = dr \cos \theta - d\theta r \sin \theta, dy = dr \sin \theta + d\theta r \cos \theta, dz = dz \quad (A6.8a)$$

Η 3-μορφή όγκου σε πολικές συντεταγμένες

Η 3-μορφή όγκου διατηρείται αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Σε Καρτεσιανές συντεταγμένες προσδιορίζεται από την 3-μορφή:

$$dvol = dx \wedge dy \wedge dz$$

Αντικαθιστούμε τις 1-μορφές σύμφωνα με τις A6.8a και βρίσκουμε:

$$dvol = dx \wedge dy \wedge dz = (dr \cos \theta - d\theta r \sin \theta) \wedge (dr \sin \theta + d\theta r \cos \theta) \wedge dz = r dr \wedge d\theta \wedge dz \quad (A6.9)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε εφαρμόζοντας τη σχέση A4.8γ:

$$dvol = \det[\bar{\partial}_j x^k] dr \wedge d\theta \wedge dz = \sqrt{\det \bar{g}_{jk}(X)} dr \wedge d\theta \wedge dz = r dr \wedge d\theta \wedge dz$$

Οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου $U(X)$ σε πολικές συντεταγμένες

Από τις σχέσεις A6.4β προκύπτει ότι:

$$\left. \begin{aligned} U^r &= U^x \cos \theta + U^y \sin \theta, U^\theta = \frac{1}{r} (-U^x \sin \theta + U^y \cos \theta), U^z = U^z \\ e_r &= e_x \cos \theta + e_y \sin \theta, e_\theta = -e_x r \sin \theta + e_y r \cos \theta, e_z = e_z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (A6.10)$$

$$U = e_r U^r + e_\theta U^\theta + e_z U^z = e_x U^x + e_y U^y + e_z U^z$$

Ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $U(X)$ σε πολικές συντεταγμένες

Η δυϊκή μορφή του διανυσματικού πεδίου $U(X)$ είναι η 1-μορφή:

$$\rho_U(\Delta X) = \langle U, \Delta X \rangle = \bar{g}_{jk} \bar{U}^j d\bar{x}^k(\Delta X) \Rightarrow \rho_U = \bar{g}_{jk} \bar{U}^j d\bar{x}^k \equiv \bar{U}_k d\bar{x}^k$$

Το εξωτερικό διαφορικό της ρ_U , υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} d\rho_U &= \bar{\partial}_n (\bar{g}_{jk} \bar{U}^j) d\bar{x}^n \wedge d\bar{x}^k = \bar{\partial}_1 (\bar{g}_{j2} \bar{U}^j) d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 + \bar{\partial}_1 (\bar{g}_{j3} \bar{U}^j) d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^3 + \\ &+ \bar{\partial}_2 (\bar{g}_{j1} \bar{U}^j) d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^1 + \bar{\partial}_2 (\bar{g}_{j3} \bar{U}^j) d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3 + \bar{\partial}_3 (\bar{g}_{j1} \bar{U}^j) d\bar{x}^3 \wedge d\bar{x}^1 + \bar{\partial}_3 (\bar{g}_{j2} \bar{U}^j) d\bar{x}^3 \wedge d\bar{x}^2 = \\ &= (\bar{\partial}_1 (\bar{g}_{j2} \bar{U}^j) - \bar{\partial}_2 (\bar{g}_{j1} \bar{U}^j)) d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 + (\bar{\partial}_2 (\bar{g}_{j3} \bar{U}^j) - \bar{\partial}_3 (\bar{g}_{j2} \bar{U}^j)) d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3 + \\ &+ (\bar{\partial}_3 (\bar{g}_{j1} \bar{U}^j) - \bar{\partial}_1 (\bar{g}_{j3} \bar{U}^j)) d\bar{x}^3 \wedge d\bar{x}^1 \end{aligned} \quad (A6.11)$$

Από τις A6.6α, A6.10 και A6.11, υπολογίζουμε σε πολικές συντεταγμένες τις συνιστώσες του στροβιλισμού του πεδίου $U(X)$:

$$U = e_r U^r + e_\theta U^\theta + e_z U^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_U = g_{rr} U^r dr + g_{\theta\theta} U^\theta d\theta + g_{zz} U^z dz = U^r dr + r^2 U^\theta d\theta + U^z dz$$

$$d\rho_U = (\partial_r (r^2 U^\theta) - \partial_\theta U^r) dr \wedge d\theta + (\partial_\theta U^z - r^2 \partial_z U^\theta) d\theta \wedge dz + (\partial_z U^r - \partial_r U^z) dz \wedge dr$$

Τα στοιχεία εμβαδού στα επίπεδα $\Delta z=0$, $\Delta r=0$, $\Delta \theta=0$, υπολογίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις (βλέπε A5.15α και A6.6α):

$$da_z = \sqrt{\det \bar{g}_z} dr \wedge d\theta = r dr \wedge d\theta, da_r = \sqrt{\det \bar{g}_r} d\theta \wedge dz = r d\theta \wedge dz,$$

$$da_\theta = \sqrt{\det \bar{g}_\theta} dz \wedge dr = dz \wedge dr$$

...από τις οποίες συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} d\rho_U &= \frac{1}{r} (\partial_r (r^2 U^\theta) - \partial_\theta U^r) da_z + \frac{1}{r} (\partial_\theta U^z - r^2 \partial_z U^\theta) da_\theta + (\partial_z U^r - \partial_r U^z) da_\theta \\ \omega_z &= \frac{1}{r} (\partial_r (r^2 U^\theta) - \partial_\theta U^r), \omega_r = \frac{1}{r} (\partial_\theta U^z - r^2 \partial_z U^\theta), \omega_\theta = (\partial_z U^r - \partial_r U^z) \end{aligned} \quad (A6.11a)$$

Συνοχή και συναλλοίωτη διαφορίση σε πολικές συντεταγμένες στο E_3

Υπολογίζουμε τα σύμβολα Christoffel σε ένα σύστημα πολικών συντεταγμένων του E_3 (σχέσεις A6.6α, A5.8γ):

$$[\bar{g}_{jk}]^{-1} = [\bar{g}^{jk}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \bar{\Gamma}_{jkl} = \frac{1}{2} (-\bar{\partial}_j \bar{g}_{kl} + \bar{\partial}_k \bar{g}_{lj} + \bar{\partial}_l \bar{g}_{jk}), \bar{\Gamma}_{kl}^j = \bar{g}^{jm} \bar{\Gamma}_{mkl}$$

Μετά από μερικές πράξεις μπορείτε να επικυρώσετε ότι:

$$\bar{\Gamma}_{r\theta\theta} = \frac{1}{2} (-\partial_r r^2) = -r, \bar{\Gamma}_{\theta\theta r} = \bar{\Gamma}_{\theta r\theta} = \frac{1}{2} (\partial_r r^2) = r \quad (A6.12)$$

$$\bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r = g^{rr} \bar{\Gamma}_{r\theta\theta} = -r, \bar{\Gamma}_{r\theta}^\theta = \bar{\Gamma}_{\theta r}^\theta = g^{\theta\theta} \bar{\Gamma}_{\theta\theta r} = r^{-2} r = r^{-1} \quad (A6.12a)$$

...τα υπόλοιπα σύμβολα Christoffel είναι ίσα με το μηδέν.

Υπολογίζουμε το συναλλοίωτο διαφορικό του διανυσματικού πεδίου $V(X)$ κατά μήκος του απειροστού διανύσματος $\Delta X \in T_X E_3$ σε πολικές συντεταγμένες, σύμφωνα με τις A5.10α και A6.12α:

$$\begin{aligned} D_{\Delta X} V(X) &= \bar{e}_k(\bar{x}) (\bar{\partial}_n \bar{V}^j(\bar{x}) + \bar{\Gamma}_{jn}^k(\bar{x}) \bar{V}^j(\bar{x})) \Delta \bar{x}^n = \\ &= e_r (\Delta V^r + \Gamma_{\theta\theta}^r V^\theta \Delta \theta) + e_\theta (\Delta V^\theta + \Gamma_{r\theta}^\theta V^r \Delta \theta + \Gamma_{\theta r}^\theta V^\theta \Delta r) + e_z \Delta V^z = \\ &= e_r (\Delta V^r - r V^\theta \Delta \theta) + e_\theta \left(\Delta V^\theta + \frac{1}{r} V^r \Delta \theta + \frac{1}{r} V^\theta \Delta r \right) + e_z \Delta V^z \end{aligned} \quad (A6.13)$$

Από την A6.13 συνεπάγεται ότι:

$$\begin{cases} D_{\Delta x}^r V(X) = \Delta V^r - r V^\theta \Delta \theta \\ D_{\Delta x}^\theta V(X) = \Delta V^\theta + \frac{1}{r} V^r \Delta \theta + \frac{1}{r} V^\theta \Delta r \\ D_{\Delta x}^z V(X) = \Delta V^z \end{cases} \quad (A6.13a)$$

...ή:

$$\begin{cases} D_{\Delta x}^r V(X) = \partial_r V^r \Delta r + (\partial_\theta V^r - r V^\theta) \Delta \theta + \partial_z V^r \Delta z \\ D_{\Delta x}^\theta V(X) = \left(\partial_r V^\theta + \frac{1}{r} V^r \right) \Delta r + \left(\partial_\theta V^\theta + \frac{1}{r} V^\theta \right) \Delta \theta + \partial_z V^\theta \Delta z \\ D_{\Delta x}^z V(X) = \partial_r V^z \Delta r + \partial_\theta V^z \Delta \theta + \partial_z V^z \Delta z \end{cases} \quad (A6.13\beta)$$

[Επιστροφή στα περιεχόμενα](#)

A6-B: Σφαιρικές συντεταγμένες

Ο μετασχηματισμός που συνδέει το Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O, x) με το σφαιρικό $(O, \bar{x})$, στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 , εκφράζεται αναλυτικά από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta \\ r &\equiv \bar{x}^1, \quad \theta \equiv \bar{x}^2, \quad \varphi \equiv \bar{x}^3 \end{aligned} \quad (A6.14)$$

Ο επαγόμενος μετασχηματισμός στους εφαπτόμενους χώρους

Έστω ΔX ένα απειροστό διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου $T_x E_3$. Ως προς το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O, x) , το ΔX εκφράζεται με τη σχέση:

$$\Delta X = e_x \Delta x + e_y \Delta y + e_z \Delta z$$

Οι Καρτεσιανές συνιστώσες του ΔX εκφράζονται συναρτήσει των σφαιρικών, από το μετασχηματισμό A6.14:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta r \cos \theta \cos \varphi - \Delta \theta r \sin \theta \cos \varphi - \Delta \varphi r \cos \theta \sin \varphi \\ \Delta y &= \Delta r \cos \theta \sin \varphi - \Delta \theta r \sin \theta \sin \varphi + \Delta \varphi r \cos \theta \cos \varphi \\ \Delta z &= \Delta r \sin \theta + \Delta \theta r \cos \theta \end{aligned} \quad (A6.14a)$$

...ή:

$$\begin{aligned} \Delta x^j &= \Delta \bar{x}^k \bar{\partial}_k x^j \Rightarrow [\bar{\partial}_k x^j] = \begin{pmatrix} \bar{\partial}_1 x^1 & \bar{\partial}_1 x^2 & \bar{\partial}_1 x^3 \\ \bar{\partial}_2 x^1 & \bar{\partial}_2 x^2 & \bar{\partial}_2 x^3 \\ \bar{\partial}_3 x^1 & \bar{\partial}_3 x^2 & \bar{\partial}_3 x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ (\Delta x, \Delta y, \Delta z) &= (\Delta r, \Delta \theta, \Delta \varphi) \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \\ -r \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \\ -r \cos \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (A6.14\beta)$$

$$\det [\bar{\partial}_k x^j] = -r^2 \cos \theta \quad (A6.14\gamma)$$

Μετασχηματισμός των στοιχείων βάσης του εφαπτόμενου χώρου $T_x E_3$

Το απειροστό διάνυσμα ΔX της εφαπτόμενης δέσμης του E_3 εκφράζεται ως προς τις Καρτεσιανές και τις σφαιρικές συντεταγμένες σύμφωνα με τις ισότητες:

$$\Delta X = e_x \Delta x + e_y \Delta y + e_z \Delta z = e_r \Delta r + e_\theta \Delta \theta + e_\varphi \Delta \varphi \quad (A6.15)$$

...από την A6.15 και την A6.14β, προκύπτουν οι ταυτότητες:

$$\begin{aligned} e_r &= e_x \cos \theta \cos \varphi + e_y \cos \theta \sin \varphi + e_z \sin \theta \Rightarrow \|e_r\| = 1 \\ e_\theta &= -e_x r \sin \theta \cos \varphi - e_y r \sin \theta \sin \varphi + e_z r \cos \theta \Rightarrow \|e_\theta\| = r \\ e_\varphi &= -e_x r \cos \theta \sin \varphi + e_y r \cos \theta \cos \varphi \Rightarrow \|e_\varphi\| = r \cos \theta \end{aligned} \quad (A6.15a)$$

Ο μετρικός τανυστής σε σφαιρικές συντεταγμένες

Από τις A6.15a συνεπάγονται οι σχέσεις:

$$g_{rr} = \langle \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_r \rangle = 1, g_{\theta\theta} = \langle \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\theta \rangle = r^2, g_{\varphi\varphi} = \langle \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\varphi \rangle = r^2 \cos^2 \theta \quad (\text{A6.16})$$

...τα λοιπά στοιχεία πίνακα είναι μηδέν:

$$\bar{g} = [\bar{g}_{jk}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}, \det \bar{g} = r^4 \cos^2 \theta \quad (\text{A6.16a})$$

$$\bar{g}^{-1} = [\bar{g}_{jk}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \end{pmatrix}, \det \bar{g}^{-1} = \frac{1}{r^4 \cos^2 \theta} \quad (\text{A6.16β})$$

Η απειροστή απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων:

$$X \leftrightarrow (r, \theta, \varphi) \text{ and } Y \leftrightarrow (r + \Delta r, \theta + \Delta \theta, \varphi + \Delta \varphi)$$

..υπολογίζεται από την αναλυτική έκφραση:

$$\Delta s = (\Delta r^2 + r^2 \Delta \theta^2 + r^2 \cos^2 \theta \Delta \varphi^2)^{1/2} \quad (\text{A6.17})$$

Η απόσταση μεταξύ σημείων του E_3 είναι αναλλοίωτη κάτω από κάθε μετασχηματισμό συντεταγμένων. επομένως ισχύει:

$$\Delta s^2 = g_{jk} \Delta x^j \Delta x^k = \bar{g}_{mn} \Delta \bar{x}^m \Delta \bar{x}^n \Rightarrow g_{jk} \Delta \bar{x}^m \bar{\partial}_m x^j \Delta \bar{x}^n \bar{\partial}_n x^k = \bar{g}_{mn} \Delta \bar{x}^m \Delta \bar{x}^n \Rightarrow$$

$$g_{jk} \bar{\partial}_m x^j \bar{\partial}_n x^k = \bar{g}_{mn} \Rightarrow \left| \det [\bar{\partial}_m x^j] \right| = \sqrt{\det [\bar{g}_{mn}]} \quad (\text{A6.17a})$$

...όπου $g_{jk} = \delta_{jk}$ είναι ο πίνακας του μετρικού τανυστή σε Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Από τις A6.17a και A6.16a συνεπάγεται ότι:

$$\left| \det [\bar{\partial}_m x^j] \right| = r^2 \cos \theta$$

...που συμφωνεί με την A6.14γ.

Συνοχή και συναλλοίωτη διαφορίση σε σφαιρικές συντεταγμένες στο E_3 - Υπολογισμός των συμβόλων Christoffel

Σε ένα αυθαίρετο σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$ του E_3 , τα σύμβολα Christoffel που είναι συμβατά με την αναλυτική έκφραση της μετρικής ως προς το $(O, \bar{x})$ και ορίζουν τη συνοχή του συνεχούς, υπολογίζονται από τις εξισώσεις A5.8γ:

$$\bar{\Gamma}_{jkl} = \frac{1}{2} (-\partial_j \bar{g}_{kl} + \partial_l \bar{g}_{jk} + \partial_k \bar{g}_{lj}), \bar{\Gamma}_{kl}^i = \bar{g}^{ij} \bar{\Gamma}_{jkl} \quad (\text{A6.18})$$

Στο σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων, ο πίνακας του μετρικού τανυστή δίδεται από τις A6.16a και A6.16β. Κάνοντας μερικές πράξεις, βρίσκουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\bar{\Gamma}_{rrr} = 0, \bar{\Gamma}_{rr\varphi} = \bar{\Gamma}_{r\varphi r} = 0, \bar{\Gamma}_{rr\theta} = \bar{\Gamma}_{r\theta r} = 0, \bar{\Gamma}_{r\theta\theta} = -r \quad (\text{A6.18a})$$

$$\bar{\Gamma}_{r\theta\varphi} = \bar{\Gamma}_{r\varphi\theta} = 0, \bar{\Gamma}_{r\varphi\varphi} = -r \cos^2 \theta$$

$$\bar{\Gamma}_{\theta\theta\theta} = 0, \bar{\Gamma}_{\theta\theta r} = \bar{\Gamma}_{\theta r\theta} = r, \bar{\Gamma}_{\theta\theta\varphi} = \bar{\Gamma}_{\theta\varphi\theta} = 0, \bar{\Gamma}_{\theta r\varphi} = \bar{\Gamma}_{\theta\varphi r} = 0 \quad (\text{A6.18β})$$

$$\bar{\Gamma}_{\theta\varphi\varphi} = r^2 \cos \theta \sin \theta, \bar{\Gamma}_{\theta rr} = 0$$

$$\bar{\Gamma}_{\varphi\varphi\varphi} = 0, \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi r} = \bar{\Gamma}_{\varphi r\varphi} = r \cos^2 \theta, \bar{\Gamma}_{\varphi rr} = 0, \bar{\Gamma}_{\varphi\theta\theta} = 0 \quad (\text{A6.18γ})$$

$$\bar{\Gamma}_{\varphi\varphi\theta} = \bar{\Gamma}_{\varphi\theta\varphi} = -r^2 \cos \theta \sin \theta, \bar{\Gamma}_{\varphi r\theta} = \bar{\Gamma}_{\varphi\theta r} = 0$$

...και εφαρμόζοντας την ταυτότητα: $\bar{\Gamma}_{kl}^j = \bar{g}^{jn} \bar{\Gamma}_{nkl}$ καταλήγουμε στις:

$$\bar{\Gamma}_{rr}^r = \bar{g}^{rr} \bar{\Gamma}_{rrr} = 0, \bar{\Gamma}_{r\theta}^r = \bar{\Gamma}_{\theta r}^r = \bar{g}^{rr} \bar{\Gamma}_{rr\theta} = 0, \bar{\Gamma}_{r\varphi}^r = \bar{\Gamma}_{\varphi r}^r = \bar{g}^{rr} \bar{\Gamma}_{rr\varphi} = 0 \quad (\text{A6.18δ})$$

$$\bar{\Gamma}_{\theta\varphi}^r = \bar{\Gamma}_{\varphi\theta}^r = \bar{g}^{rr} \bar{\Gamma}_{r\theta\varphi} = 0, \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r = \bar{g}^{rr} \bar{\Gamma}_{r\theta\theta} = -r, \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r = \bar{g}^{rr} \bar{\Gamma}_{r\varphi\varphi} = -r \cos^2 \theta$$

$$\bar{\Gamma}_{\theta\theta}^{\theta} = \bar{g}^{\theta\theta} \bar{\Gamma}_{\theta\theta\theta} = 0, \bar{\Gamma}_{\theta r}^{\theta} = \bar{\Gamma}_{r\theta}^{\theta} = \bar{g}^{\theta\theta} \bar{\Gamma}_{\theta\theta r} = \frac{1}{r}, \bar{\Gamma}_{\theta\varphi}^{\theta} = \bar{\Gamma}_{\varphi\theta}^{\theta} = \bar{g}^{\theta\theta} \bar{\Gamma}_{\theta\theta\varphi} = 0 \quad (\text{A6.18}\epsilon)$$

$$\bar{\Gamma}_{r\varphi}^{\theta} = \bar{\Gamma}_{\varphi r}^{\theta} = \bar{g}^{\theta\theta} \bar{\Gamma}_{\theta r\varphi} = 0, \bar{\Gamma}_{rr}^{\theta} = \bar{g}^{\theta\theta} \bar{\Gamma}_{\theta rr} = 0, \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^{\theta} = \bar{g}^{\theta\theta} \bar{\Gamma}_{\theta\varphi\varphi} = \cos\theta \sin\theta$$

$$\bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^{\varphi} = \bar{g}^{\varphi\varphi} \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi\varphi} = 0, \bar{\Gamma}_{\varphi r}^{\varphi} = \bar{\Gamma}_{r\varphi}^{\varphi} = \bar{g}^{\varphi\varphi} \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi r} = \frac{1}{r}, \bar{\Gamma}_{\varphi\theta}^{\varphi} = \bar{\Gamma}_{\theta\varphi}^{\varphi} = \bar{g}^{\varphi\varphi} \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi\theta} = -\tan\theta \quad (\text{A6.18}\sigma\tau)$$

$$\bar{\Gamma}_{r\theta}^{\varphi} = \bar{\Gamma}_{\theta r}^{\varphi} = \bar{g}^{\varphi\varphi} \bar{\Gamma}_{\varphi r\theta} = 0, \bar{\Gamma}_{rr}^{\varphi} = \bar{g}^{\varphi\varphi} \bar{\Gamma}_{\varphi rr} = 0, \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^{\varphi} = \bar{g}^{\varphi\varphi} \bar{\Gamma}_{\varphi\theta\theta} = 0$$

Η συναλλοίωτη διαφόριση σε σφαιρικές συντεταγμένες

Η συναλλοίωτη διαφόριση ενός διανυσματικού πεδίου $U(X)$, κατά μήκος καμπύλης $X=C(t)$ του E_3 ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$, υπολογίζεται από την εφαρμογή των σχέσεων A5.10, A5.10α:

$$\frac{DU}{Dt} = \bar{e}_j \frac{D^j \bar{U}}{Dt} \quad \text{όπου:} \quad \frac{D^j \bar{U}}{Dt} = \frac{d\bar{U}^j}{dt} + \bar{\Gamma}_{kl}^j \bar{U}^k \bar{U}^l \quad (\text{A6.19})$$

Στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, αντικαθιστούμε στις A6.19 τα σύμβολα Christoffel σύμφωνα με τις σχέσεις A6.18δ,ε,στ, και διαμορφώνουμε τις ταυτότητες:

$$\begin{aligned} \frac{DU}{Dt} &= e_r \frac{D^r \bar{U}}{Dt} + e_\theta \frac{D^\theta \bar{U}}{Dt} + e_\varphi \frac{D^\varphi \bar{U}}{Dt} \\ \frac{D^r \bar{U}}{Dt} &= \frac{dU^r}{dt} + \bar{\Gamma}_{kl}^r \bar{U}^k \bar{U}^l = \frac{dU^r}{dt} - r(U^\theta)^2 - r \cos^2 \theta (U^\varphi)^2 \\ \frac{D^\theta \bar{U}}{Dt} &= \frac{dU^\theta}{dt} + \bar{\Gamma}_{kl}^\theta \bar{U}^k \bar{U}^l = \frac{dU^\theta}{dt} + \frac{2}{r} U^\theta U^r + \cos\theta \sin\theta (U^\varphi)^2 \\ \frac{D^\varphi \bar{U}}{Dt} &= \frac{dU^\varphi}{dt} + \bar{\Gamma}_{kl}^\varphi \bar{U}^k \bar{U}^l = \frac{dU^\varphi}{dt} + \frac{2}{r} U^\varphi U^r - 2 \tan\theta U^\varphi U^\theta \end{aligned} \quad (\text{A6.20})$$

[Επιστροφή στα περιεχόμενα](#)

Μέρος Β

Μαθηματικά μοντέλα της Νευτώνειας Μηχανικής στο Ευκλείδειο συνεχές E_3

B1. Ο 2ος Νόμος του Newton σε αυθαίρετο σύστημα αναφοράς του E_3

Σύνοψη: Τα δομικά στοιχεία κάθε μοντέλου της Νευτώνειας Μηχανικής είναι: α) ένα Ευκλείδειο συνεχές E_3 , β) ένα σύνολο σημειακών σωματιδίων που μεταβάλλουν τις θέσεις τους (κινούνται) εντός του E_3 , γ) οι νόμοι του Newton, που προσδιορίζουν τις κινήσεις των σωματιδίων, δ) πεδία δυνάμεων που δρουν επί των σωματιδίων. Η αναλυτική έκφραση των πεδίων δυνάμεων ως προς ένα σύστημα αναφοράς (O, x) του E_3 καθορίζει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του μηχανικού μοντέλου.

Οι τροχιές των σωματιδίων εκφράζονται αναλυτικά από παραμετρικές εξισώσεις με ελεύθερη παράμετρο τον “απόλυτο” χρόνο. Η έννοια του απόλυτου χρόνου συνδέεται με το αξίωμα της Νευτώνειας Μηχανικής: “τα χρονόμετρα που χρησιμοποιούμε για την μέτρηση του χρόνου σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς του E_3 μπορούν να συγχρονιστούν, ώστε να δείχνουν πάντοτε κοινή ένδειξη, ανεξάρτητα από το σύστημα αναφοράς στο οποίο έχουν προσαρτηθεί”.

Οι παραμετρικές εξισώσεις κάθε τροχιάς προκύπτουν από την εφαρμογή του 2ου Νόμου του Newton για κάθε σωματίδιο του συστήματος. Ο 2ος Νόμος του Newton προσδιορίζει πώς μεταβάλλεται η ταχύτητα κάθε σωματιδίου σε ένα απειροστό διάστημα $[t, t+Dt]$ του απόλυτου χρόνου t . Δεδομένου ότι το σύστημα αναφοράς (O, x) δεν είναι κατ’ ανάγκη Καρτεσιανό, η μεταβολή της ταχύτητας κάθε σωματιδίου κατά μήκος της τροχιάς του υπολογίζεται μέσω των εννοιών της παράλληλης μετατόπισης και του συναλλοιώτου διαφορικού, όπως αναπτύχθηκαν στην **Ενότητα A5**. Αν θεωρήσουμε ότι το (O, x) είναι ένα **αδρανειακό** σύστημα αναφοράς^(3,6), τότε σε ένα **ελεύθερο σωματίδιο** Σ ασκούνται δυνάμεις με μηδενική συνισταμένη. Το συναλλοιώτο διαφορικό της ταχύτητας κατά μήκος της καμπύλης που διαγράφει το Σ είναι ίσο με το μηδέν. Οι καμπύλες που έχουν αυτή την ιδιότητα καλούνται **γεωδαιτικές** του συνεχούς. Οδηγούμαστε σε μια γενίκευση του 1ου Νόμου του Newton: “Κάθε ελεύθερο σωματίδιο που κινείται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα ενός συνεχούς S διαγράφει μια γεωδαιτική καμπύλη του S ”.

Μαθηματικά μοντέλα της Νευτώνειας Μηχανικής

Στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής ένα φυσικό σύστημα αναλύεται και μοντελοποιείται με ένα σύνολο **κινουμένων σωματιδίων** και **πεδίων δυνάμεων** που ορίζονται και κινούνται μέσα στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 ^(1,3,4) (βλέπε **Μέρος Α**).

Η κίνηση κάθε σωματιδίου περιγράφεται με τις παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς του, ως προς ένα σύστημα αναφοράς του Ευκλείδειου συνεχούς E_3 . Στην αναλυτική έκφραση των παραμετρικών εξισώσεων της τροχιάς, ως ελεύθερη παράμετρος θεωρείται ο χρόνος. Ο χρόνος μετράται με χρονόμετρα που προσαρτώνται στα συστήματα αναφοράς. Στη Νευτώνεια Μηχανική δεχόμαστε ότι **τα χρονόμετρα μπορούν να συγχρονιστούν ώστε, ανεξάρτητα από το σύστημα αναφοράς στο οποίο έχουν προσαρτηθεί, να δείχνουν πάντοτε κοινή ένδειξη**. Η παραδοχή αυτή συνεπάγεται ότι δύο γεγονότα που συμβαίνουν ταυτόχρονα ως προς ένα σύστημα αναφοράς, είναι ταυτόχρονα ως προς κάθε σύστημα αναφοράς. Έτσι, ο χρόνος δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς στο οποίο έχει προσαρτηθεί το χρονόμετρο με το οποίο τον μετράμε και, με την έννοια αυτή, έχει έναν “απόλυτο” χαρακτήρα.

Τα “Νευτώνεια” σωματίδια είναι διακριτά αντικείμενα χωρίς διαστάσεις. Μπορούμε να τα ονομάσουμε με έναν δείκτη που λαμβάνει τιμές στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Για παράδειγμα, λέμε: το σωματίδιο Σ_1 , το Σ_2 ,... το Σ_μ , όπου $\mu \in N$. Τα σωματίδια κατά την κίνησή τους διατηρούν το όνομα και την ταυτότητά τους (μία ιδιότητα που δεν ισχύει πάντοτε στο πλαίσιο της Κβαντικής Μηχανικής). Η **μηχανική κατάσταση** ενός σωματιδίου προσδιορίζεται από δύο γεωμετρικά στοιχεία: τη θέση και την ταχύτητά του, και από μια “εσωτερική” ποσότητα: τη **μάζα** του. Η μάζα είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, στοιχείο της **ταυτότητας** κάθε σωματιδίου, που δεν εξαρτάται από το είδος της κίνησής του. Η μάζα λαμβάνει πάντοτε θετικές τιμές.

Ως προς ένα αυθαίρετο σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$ του E_3 η ταχύτητα U ενός σωματιδίου Σ είναι ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται επί της τροχιάς του Σ (βλέπε **Ενότητα A3**). Η τροχιά του Σ είναι μια καμπύλη του E_3 με αναλυτική έκφραση:

$$X_t = C_\Sigma(t) \leftrightarrow \bar{x}^j = \bar{c}_\Sigma^j(t), t \in R$$

...όπου t συμβολίζει τον απόλυτο χρόνο. Έπεται ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα $\bar{e}_j \frac{d\bar{x}^j}{dt} = \bar{e}_j \dot{\bar{c}}_\Sigma^j(t)$

της C_Σ , ισούται με την ταχύτητα του Σ τη χρονική στιγμή t :

$$U(X_t) = \bar{e}_j \frac{d\bar{x}^j}{dt} = \bar{e}_j \dot{\bar{c}}_\Sigma^j(t) \Rightarrow \bar{U}^j = \dot{\bar{c}}_\Sigma^j(t) \quad (B1.1)$$

Η απειροστή μεταβολή της ταχύτητας του Σ κατά μήκος της τροχιάς του, υπολογίζεται από την έκφραση του συναλλοίωτου διαφορικού του πεδίου $U(X)$ επί της C_Σ , ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$ (βλέπε **Ενότητα A5**). Ο 2ος νόμος του Newton ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$ λαμβάνει τη μορφή:

$$m \frac{D_{\Delta x} U}{Dt} = F \Rightarrow m \frac{\bar{D}_{\Delta x}^k U}{Dt} = \bar{F}^k \quad \text{όπου: } \Delta X = \bar{e}_j(\bar{x}) \dot{\bar{c}}^j(t) Dt \quad (B1.2a)$$

$$\frac{\bar{D}_{\Delta x}^k U}{Dt} = \bar{\partial}_n \bar{U}^k(\bar{x}) \dot{\bar{x}}^n + \bar{F}_{jn}^k(\bar{x}) \bar{U}^j(\bar{x}) \dot{\bar{x}}^n \xRightarrow[\substack{B1.1 \\ B1.2a}]{\substack{B1.1 \\ B1.2a}} \frac{d\bar{U}^k}{dt} + \bar{F}_{jn}^k \bar{U}^j \bar{U}^n = \frac{1}{m} \bar{F}^k \quad (B1.2\beta)$$

... $F(X) = \bar{e}_j(\bar{x}) \bar{F}^j(\bar{x})$ είναι η ολική δύναμη (συνισταμένη) που ασκείται στο Σ και $\bar{F}^j(\bar{x})$ οι συνιστώσες της ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$. Η αναλυτική έκφραση των $\bar{F}^j(\bar{x})$ αποφασίζεται από το υποκείμενο που συνθέτει το θεωρητικό μοντέλο με το οποίο επιδιώκει την περιγραφή κάποιου φυσικού συστήματος. Το θεωρητικό μοντέλο αξιολογείται από πειραματικές διαδικασίες που σχεδιάζονται έτσι, ώστε τα πειραματικά αποτελέσματα να μπορούν να επικυρώσουν ή να διαψεύσουν τις προβλέψεις του μοντέλου.

Αδρανειακά συστήματα αναφοράς, ελεύθερα σωματίδια και γεωδαιτικές γραμμές

Ας θεωρήσουμε ότι το $(O, \bar{x})$ είναι ένα **αδρανειακό** σύστημα αναφοράς^(3,6). Ένα σωματίδιο Σ που κινείται στο E_3 ορίζεται ως "**ελεύθερο σωματίδιο**" εφόσον στο Σ ασκούνται δυνάμεις με μηδενική συνισταμένη. Η αναλυτική έκφραση $\bar{x}^j = \bar{c}_\Sigma^j(t)$ της καμπύλης C_Σ που διαγράφει το Σ στο E_3 είναι λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων B1.2β:

$$\frac{D_{\Delta x}^k \bar{U}}{Dt} = 0 \quad \text{ή:} \quad \bar{\partial}_n \bar{U}^k(\bar{x}) \dot{\bar{x}}^n + \bar{F}_{jn}^k(\bar{x}) \bar{U}^j(\bar{x}) \dot{\bar{x}}^n = 0 \xRightarrow{\bar{U}^k = \dot{\bar{x}}^k} \quad (B1.3)$$

$$\frac{d^2 \bar{x}^k}{dt^2} + \bar{F}_{jn}^k(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^j}{dt} \frac{d\bar{x}^n}{dt} = 0$$

Η ταχύτητα $U(t)$ του Σ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης C_Σ . Σύμφωνα με την B1.3, το συναλλοίωτο διαφορικό της ταχύτητας κατά μήκος της καμπύλης που διαγράφει το Σ είναι ίσο με το μηδέν. Οι καμπύλες που έχουν αυτή την ιδιότητα καλούνται **γεωδαιτικές** του συνεχούς.

Βέβαια, στην περίπτωση του Ευκλείδειου συνεχούς E_3 , οι γεωδαιτικές είναι για κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς ευθείες γραμμές. Αυτό που αλλάζει με κάθε μετασχηματισμό συντεταγμένων είναι η αναλυτική έκφραση της ευθείας. Ωστόσο, οι διαφορικές εξισώσεις B1.3 μπορούν να εφαρμοστούν και στην περίπτωση κίνησης του σωματιδίου σε επιφάνειες του E_3 και να μας οδηγήσουν σε μια γενίκευση της έννοιας του ελεύθερου σωματιδίου σε πολλαπλότητες Riemann^(2,9) με μη Ευκλείδεια γεωμετρία.

Κίνηση σωματιδίου σε επιφάνεια S του E_3

Έστω ότι το σωματίδιο Σ κινείται επί επιφανείας S του E_3 (**Ενότητα A4**) με αναλυτική έκφραση ως προς το **αδρανειακό** σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$:

$$\bar{x}^j = \bar{x}_S^j(u^1, u^2), j = 1, 2, 3, (u^1, u^2) \in R^2 \quad (B1.4)$$

Τα εφαπτόμενα επίπεδα στα σημεία X_S της S είναι υπόχωροι των αντίστοιχων εφαπτόμενων χώρων $T_{X_S} E_3$ του E_3 . Κάθε απειροστό διάνυσμα $\Delta X_S \in T_{X_S} S$ γράφεται (B1.4):

$$\Delta X_S = \bar{e}_j(\bar{x}_S) \partial_\mu \bar{x}^j(u) \Delta u^\mu, \quad \text{όπου: } j = 1, 2, 3, \mu = 1, 2, u \equiv (u^1, u^2) \quad (B1.4a)$$

Τα διανύσματα βάσης u_1, u_2 του $T_{X_S} S$ υπολογίζονται από τις σχέσεις A4.9β (**Ενότητα A4**):

$$u_\mu = \bar{e}_j(\bar{x}_S) \partial_\mu \bar{x}^j(u^1, u^2) \quad (B1.4\beta)$$

(Οι Ελληνικοί δείκτες λαμβάνουν τιμές στο σύνολο {1,2})

Από τη B1.4β προκύπτουν τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή $\gamma(u) = [\gamma_{\mu\nu}(u)]$ στην S :

$$\gamma_{\mu\nu}(u) \equiv \langle u_\mu, u_\nu \rangle_S = \langle \bar{e}_j, \bar{e}_k \rangle \partial_\mu \bar{x}_S^j(u) \partial_\nu \bar{x}_S^k(u) = \bar{g}_{jk} \partial_\mu \bar{x}_S^j(u) \partial_\nu \bar{x}_S^k(u) \quad (B1.4\gamma)$$

Από τις B1.4γ και A5.8γ (Ενότητα 5) βρίσκουμε τα σύμβολα Christoffel που καθορίζουν τη συνοχή της S :

$$\bar{\gamma}_{\kappa\lambda}^\mu = \gamma^{\mu\nu} \bar{\gamma}_{\nu\kappa\lambda}, \quad \bar{\gamma}_{\nu\kappa\lambda} = \frac{1}{2} (-\partial_\nu \gamma_{\kappa\lambda} + \partial_\lambda \gamma_{\nu\kappa} + \partial_\kappa \gamma_{\lambda\nu}) \quad (B1.4\delta)$$

Το σωματίδιο Σ διαγράφει μια καμπύλη C_S της S , με παραμετρικές εξισώσεις $u^\mu = c_S^\mu(t)$ η οποία ικανοποιεί τον 2ο Νόμο του Newton:

$$\frac{D_S U_S}{Dt} = \frac{1}{m} F_S \Rightarrow \frac{D_S^\mu U_S}{Dt} = \frac{1}{m} F_S^\mu \quad (B1.5)$$

όπου:

$$\frac{D_S U_S}{Dt} = u_\mu \frac{D_S^\mu U_S}{Dt} = u_\mu (\partial_\nu U_S^\mu(u) \dot{u}^\nu + \bar{\gamma}_{\kappa\nu}^\mu(u) U_S^\kappa(u) \dot{u}^\nu)$$

...είναι η συναλλοίωτη παράγωγος του εφαπτόμενου διανύσματος U_S επί της καμπύλης C_S της S :

$$U_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta X_S}{\Delta t} = u_\mu U_S^\mu \quad \text{όπου: } U_S^\mu = \frac{du^\mu}{dt} \equiv \dot{u}^\mu = \frac{dc_S^\mu(t)}{dt}$$

Οπότε, η B1.5 γράφεται:

$$\partial_\nu U_S^\mu(u) \dot{u}^\nu + \bar{\gamma}_{\kappa\nu}^\mu(u) U_S^\kappa(u) \dot{u}^\nu = \frac{1}{m} F_S^\mu \Rightarrow \frac{d^2 u^\mu}{dt^2} + \bar{\gamma}_{\kappa\nu}^\mu(u) \frac{du^\kappa}{dt} \frac{du^\nu}{dt} = \frac{1}{m} F_S^\mu \quad (B1.5a)$$

Το $F_S(X_S)$ είναι ένα δυναμικό πεδίο ορισμένο επί της S που καθορίζει την κίνηση του σωματιδίου πάνω στην επιφάνεια. Η αναλυτική έκφραση του $F_S(X_S)$ προκύπτει από την αντίστοιχη έκφραση της συνισταμένης δύναμης F που ασκείται στο Σ και καθορίζει την κίνησή του εντός του E_3 , και από την μορφή της S . Υπολογίζεται από τις συνακόλουθες σχέσεις:

$$F = \bar{e}_j \bar{F}^j = u_1 F_S^1 + u_2 F_S^2 + F_{S\perp} \quad \text{όπου: } \langle F_{S\perp}, u_1 \rangle_S = \langle F_{S\perp}, u_2 \rangle_S = 0 \quad (B1.6)$$

Η $F_S = u_1 F_S^1 + u_2 F_S^2$ είναι η συνισταμένη δύναμη, εφαπτόμενη της S , που καθορίζει το είδος της κίνησης του Σ επί της S . Η κάθετη στην S δύναμη $F_{S\perp}$ είναι μια "δύναμη συνδέσμου"⁽³⁾ που εξασφαλίζει την παραμονή του Σ επί της S . Υπολογίζουμε τις F_S και $F_{S\perp}$ συναρτήσει των δεδομένων:

$$\bar{x}^j = \bar{x}_S^j(u^1, u^2) \quad \text{και} \quad F(X_S) = \bar{e}_j(\bar{x}) \bar{F}^j(\bar{x})$$

Από την B1.6 και την B1.4β προκύπτει βρίσκουμε:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} F_S^1 + \gamma_{21} F_S^2 &= \langle \bar{e}_j, u_1 \rangle \bar{F}^j = \bar{g}_{jk} \bar{F}^j \partial_1 \bar{x}^k(u^1, u^2) \equiv \bar{F}_k \partial_1 \bar{x}^k(u^1, u^2) \\ \gamma_{12} F_S^1 + \gamma_{22} F_S^2 &= \bar{F}_j \partial_2 \bar{x}^j(u^1, u^2) \end{aligned} \right\} \quad (B1.6a)$$

Επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων B1.6a με άγνωστες ποσότητες τις συνιστώσες F_S^1, F_S^2 :

$$F_S^1 = \frac{1}{\det \gamma} \det \begin{pmatrix} \bar{F}_j \partial_1 \bar{x}^j & \gamma_{12} \\ \bar{F}_k \partial_2 \bar{x}^k & \gamma_{22} \end{pmatrix}, \quad F_S^2 = \frac{1}{\det \gamma} \det \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \bar{F}_j \partial_1 \bar{x}^j \\ \gamma_{21} & \bar{F}_k \partial_2 \bar{x}^k \end{pmatrix} \quad (B1.6\beta)$$

Η δύναμη συνδέσμου υπολογίζεται από την B1.6 και την B1.4β:

$$F_{S\perp} = \bar{e}_j (\bar{F}^j - F_S^1 \partial_1 \bar{x}^j - F_S^2 \partial_2 \bar{x}^j) \quad (B1.6\gamma)$$

Ώστε, ο 2ος νόμος του Newton που περιγράφει την κίνηση ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$, σωματιδίου Σ κινούμενου επί επιφανείας $S: \bar{x}^j = \bar{x}_S^j(u^1, u^2)$ του E_3 , εκφράζεται με τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{d^2 u^\mu}{dt^2} + \bar{\gamma}_{\kappa\nu}^\mu(u) \frac{du^\kappa}{dt} \frac{du^\nu}{dt} = \frac{1}{m} F_S^\mu \quad (B1.7)$$

...όπου:

α) $u^\mu = c_s^\mu(t)$ είναι η αναλυτική έκφραση της ζητούμενης τροχιάς στο χώρο των παραμέτρων u^1, u^2 της επιφάνειας S .

β) $\bar{\gamma}_{\kappa\nu}^\mu(u)$ είναι τα σύμβολα Christoffel που προσδιορίζουν τη συνοχή της S και υπολογίζονται από τις σχέσεις B1.4γ και B1.4δ.

γ) F_s^μ ($\mu=1,2$) είναι οι συνιστώσες του εφαπτομενικού δυναμικού πεδίου στην S , που προσδιορίζεται από το συγκεκριμένο μηχανικό μοντέλο, και υπολογίζονται από τις σχέσεις B1.6β.

Ελεύθερη κίνηση σωματιδίου επί της επιφάνειας S

Λέμε ότι το Σ κινείται ελεύθερα επί της επιφανείας S , ως προς το αδρανειακό σύστημα $(O, \bar{x})$ τότε και μόνον αν η εφαπτομενική στην S συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στο Σ είναι ίση με το μηδέν.

Σύμφωνα με τις B1.6, η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το Σ να κινείται ελεύθερα επί της S προσδιορίζεται από τις συνθήκες:

$$F_s^1(X_s) = 0, F_s^2(X_s) = 0 \text{ για κάθε } X_s \in S \quad (\text{B1.8})$$

Εφόσον ικανοποιούνται οι συνθήκες B1.8, το Σ διαγράφει μια καμπύλη επί της S που είναι λύση των εξισώσεων (σχέση B1.5):

$$\frac{D_s U_s}{Dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{D_s^\mu U_s}{Dt} = 0 \quad (\text{B1.8a})$$

ή:

$$\partial_\nu U^\mu(u) \dot{u}^\nu + \bar{\gamma}_{\kappa\nu}^\mu(u) U^\kappa(u) \dot{u}^\nu = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u^\mu}{dt^2} + \bar{\gamma}_{\kappa\nu}^\mu(u) \frac{du^\kappa}{dt} \frac{du^\nu}{dt} = 0 \quad (\text{B1.8β})$$

Οι λύσεις των εξισώσεων B1.8a αντιστοιχούν σε καμπύλες της S με την ιδιότητα: “η συναλλοίωτη παράγωγος του εφαπτόμενου διανύσματος $U_s(t)$ είναι ίση με το μηδέν” ή, ισοδύναμα, “το εφαπτόμενο διάνυσμα $U_s(t)$ μεταφέρεται κατά μήκος της καμπύλης παράλληλα με τον εαυτό του (βλέπε [Ενότητα A5](#))”. Οι καμπύλες που έχουν την ιδιότητα αυτή, καλούνται “γεωδαιτικές της επιφάνειας S ”^(2,4,6,9).

Οδηγούμαστε σε μια γενίκευση του 1ου Νόμου του Newton: **“Κάθε σωματίδιο που κινείται ελεύθερα επί επιφανείας S του E_3 ως προς ένα αδρανειακό σύστημα του E_3 , διαγράφει μια γεωδαιτική καμπύλη της S ”.**

Δύο ιδιότητες μιας γεωδαιτικής καμπύλης

A) Έστω $U(t)$ η ταχύτητα σωματιδίου Σ που κινείται ελεύθερα επί επιφανείας $S \subset E_3$ ως προς το αδρανειακό σύστημα $(O, \bar{x})$ του E_3 . Τότε, το $U(t)$ μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του κατά μήκος γεωδαιτικής καμπύλης της S και διατηρεί το μέτρο του αναλλοίωτο.

Απόδειξη:

Με δεδομένο ότι το Σ κινείται ελεύθερα επί της S ως προς το αδρανειακό σύστημα $(O, \bar{x})$, από τον 2ο νόμο του Newton έπεται ότι το συναλλοίωτο διαφορικό της ταχύτητας $U(t)$ του Σ κατά μήκος της τροχιάς του C είναι ίσο με το μηδέν: $D_{\Delta X_C} U = 0$ όπου ΔX_C απειροστή μετατόπιση επί της C . Τότε, από τις σχέσεις A5.6 και A5.10 της [Ενότητας A5](#), συνεπάγεται ότι:

$$D_{\Delta X_C} U = \varphi_{t+\Delta t, t}^{c_s} (U(t)) - U(t + \Delta t) = 0 \Rightarrow U(t + \Delta t) = \varphi_{t+\Delta t, t}^{c_s} (U(t)) \quad (\text{B1.9})$$

...όπου φ είναι η συνοχή που επάγεται στην επιφάνεια S ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(O, \bar{x})$ του E_3 . Από τον ορισμό της παράλληλης μετατόπισης ([Ενότητα A5](#)), το διανυσματικό πεδίο:

$$V(t') = \varphi_{t', t}^{c_s} (U(t)) \quad (\text{B1.9a})$$

...αποτελείται από την κλάση των διανυσμάτων που είναι παράλληλα με το $U(t)$ και ανήκουν στους εφαπτόμενους χώρους της καμπύλης C . Από τις B1.9 και B1.9a συμπεραίνουμε ότι το $U(t) = V(t')$, για κάθε t' δηλαδή, το $U(t)$ μεταφέρεται παράλληλα με τον εαυτό του κατά μήκος της C .

Επιπλέον, όπως είδαμε στην [Ενότητα A5](#), η απεικόνιση $\varphi_{t', t}^{c_s}$ είναι ισομετρική. Άρα, το μέτρο του $U(t)$ κατά την μετατόπιση του Σ επί της C διατηρείται σταθερό:

$$\begin{aligned} U(t + \Delta t) &= \varphi^C_{t+\Delta t, t}(U(t)) \Rightarrow \|U(t + \Delta t)\|_S = \|\varphi^C_{t+\Delta t, t}(U(t))\|_S = \|U(t)\|_S \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt} \|U(t)\|_S = 0 \end{aligned} \quad (B1.9\beta)$$

ΟΕΔ

Β) Το μήκος L_C του τμήματος της γεωδαιτικής καμπύλης C της S μεταξύ δύο σημείων της A και B έχει ακρότατη τιμή στο σύνολο των γειτονικών στη C καμπύλων C_ε της S , που διέρχεται από τα A και B .

Απόδειξη:

Έστω:

$$u^\mu = c^\mu(t), \quad c^\mu(0) = a^\mu, \quad c^\mu(T) = b^\mu$$

...η παραμετρική έκφραση της γεωδαιτικής, όπου $(a^1, a^2), (b^1, b^2)$ οι συντεταγμένες των A και B επί της S .

Μια καμπύλη C_ε γειτονική της C , που διέρχεται από τα A και B , έχει τη μορφή:

$$C_\varepsilon \leftrightarrow c_\varepsilon : u_\varepsilon^\mu = c^\mu(t) + \varepsilon \cdot f^\mu(t) \quad (B1.10)$$

...όπου f^μ αυθαίρετες, παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις του t που ικανοποιούν τις συνθήκες: $f^\mu(0) = f^\mu(T) = 0$

Το ε είναι αυθαίρετος θετικός αριθμός που θεωρούμε ότι τείνει στο μηδέν.

Το στοιχειώδες μήκος επί της C και επί της C_ε δίδεται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις:

$$\Delta s^2 = \gamma_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu \Delta t^2, \quad \Delta s_\varepsilon^2 = \gamma_{\mu\nu} (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2) \dot{u}_\varepsilon^\mu \dot{u}_\varepsilon^\nu \Delta t^2 \quad (B1.10a)$$

$$[\gamma_{\mu\nu} \equiv \gamma_{\mu\nu}(u^1, u^2)]$$

Από τις B1.10 και B1.10a, διατηρώντας όρους μέχρι και 1ης τάξης ως προς το ε , έπονται οι διαδοχικές ισότητες:

$$\begin{aligned} \Delta s_\varepsilon^2 &= \gamma_{\mu\nu} (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2) \dot{u}_\varepsilon^\mu \dot{u}_\varepsilon^\nu \Delta t^2 \approx (\gamma_{\mu\nu} + \varepsilon f^\lambda \partial_\lambda \gamma_{\mu\nu}) (\dot{u}^\mu + \varepsilon \cdot \dot{f}^\mu) (\dot{u}^\nu + \varepsilon \cdot \dot{f}^\nu) \Delta t^2 \approx \\ &\approx \Delta s^2 + \varepsilon \Delta t^2 (2\gamma_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{f}^\nu + f^\nu \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \dot{u}^\mu \dot{u}^\kappa) = \Delta t^2 (\gamma_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu + \varepsilon (2\gamma_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{f}^\nu + f^\nu \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \dot{u}^\mu \dot{u}^\kappa)) \\ \Delta s_\varepsilon &\approx (\Delta s^2 + \varepsilon \Delta t^2 (2\gamma_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{f}^\nu + f^\nu \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \dot{u}^\mu \dot{u}^\kappa))^{1/2} \approx \Delta t (\gamma_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu + \varepsilon (2\gamma_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{f}^\nu + f^\nu \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \dot{u}^\mu \dot{u}^\kappa))^{1/2} \approx \\ &\approx \Delta t \left(\sqrt{\gamma_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu} + \varepsilon \frac{1}{2\sqrt{\gamma_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{u}^\nu}} (2\gamma_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{f}^\nu + f^\nu \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \dot{u}^\mu \dot{u}^\kappa) \right) = \Delta s + \frac{\varepsilon \Delta s}{\Delta s^2} \Delta t^2 (2\gamma_{\mu\nu} \dot{u}^\mu \dot{f}^\nu + f^\nu \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \dot{u}^\mu \dot{u}^\kappa) = \\ &= \Delta s + \varepsilon \Delta s \left(\gamma_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{ds} \frac{df^\nu}{ds} + \frac{1}{2} f^\nu \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} \right) \Rightarrow \\ \delta_\varepsilon L_{C_\varepsilon} &= L_{C_\varepsilon} - L_C = \varepsilon \int_A^B ds \left(\gamma_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{ds} \frac{df^\nu}{ds} + \frac{1}{2} f^\nu \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} \right) = \\ &= \varepsilon \int_A^B ds f^\nu \left(-\frac{d}{ds} \left(\gamma_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{ds} \right) + \frac{1}{2} \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} \right) \\ \text{Η } C \text{ έχει ακρότατο μήκος στο σύνολο των } C_\varepsilon, \text{ τότε και μόνον αν ισχύει: } \delta_\varepsilon L_{C_\varepsilon} &= 0 \text{ Εφόσον οι } f^\nu \text{ είναι αυθαίρετες, συνεπάγεται ότι πρέπει και αρκεί να ισχύει:} \\ 0 &= -\frac{d}{ds} \left(\gamma_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{ds} \right) + \frac{1}{2} \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} = -\partial_\kappa \gamma_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} - \gamma_{\mu\nu} \frac{d^2 u^\mu}{ds^2} + \frac{1}{2} \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} = \\ &= -\gamma_{\mu\nu} \frac{d^2 u^\mu}{ds^2} - \frac{1}{2} \left(\partial_\kappa \gamma_{\mu\nu} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} + \partial_\mu \gamma_{\kappa\nu} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} \right) + \frac{1}{2} \partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} = \\ &= -\gamma_{\mu\nu} \frac{d^2 u^\mu}{ds^2} - \frac{1}{2} (-\partial_\nu \gamma_{\mu\kappa} + \partial_\kappa \gamma_{\nu\mu} + \partial_\mu \gamma_{\kappa\nu}) \frac{du^\mu}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} \Rightarrow \frac{d^2 u^\mu}{ds^2} + \gamma^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\lambda\kappa} \frac{du^\lambda}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2 u^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\kappa} \frac{du^\lambda}{ds} \frac{du^\kappa}{ds} = 0 \end{aligned} \quad (B1.10\beta)$$

Από την B1.10β και την B1.8β συμπεραίνουμε ότι αν η καμπύλη C έχει ακρότατο μήκος, τότε είναι γεωδαιτική της S και αντίστροφα, αν η C είναι γεωδαιτική, τότε έχει ακρότατο μήκος.

ΟΕΔ

[Επιστροφή στα περιεχόμενα](#)

B2. Ο 2ος Νόμος του Newton σε πολικές συντεταγμένες

Σύνοψη: Εφαρμόζουμε τις γενικές σχέσεις που παρήχθησαν στην ενότητα B1 στη μελέτη της κίνησης σωματιδίου Σ ως προς ένα αδρανειακό πολικό σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$ του E_3 .

α) Παράγουμε τις γενικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης ου Σ σε πολικές συντεταγμένες.

β) Εκφράζουμε την τροχιά του Σ ως προς το πολικό σύστημα $(O, \bar{x})$

γ) Μελετάμε την ελεύθερη κίνηση σωματιδίου επί κυλινδρικής επιφάνειας.

Έστω σωματίδιο Σ μάζας m , που κινείται στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 , κάτω από τη δράση ενός πεδίου δυνάμεων F . Γράφουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου (2ος Νόμος του Newton: εξισώσεις B1.1 και B1.2, [Ενότητα B1](#)) ως προς το πολικό, αδρανειακό σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$ όπου: $\bar{x}^1 \equiv r$, $\bar{x}^2 \equiv \theta$, $\bar{x}^3 \equiv z$ (βλέπε [Ενότητα A6.A](#)):

$$\frac{d\bar{U}^k}{dt} + \bar{\Gamma}_{jn}^k(\bar{x})\bar{U}^j(\bar{x})\bar{U}^n = \frac{1}{m}\bar{F}^k \quad (\text{B2.1})$$

...όπου $U(X)$ είναι η ταχύτητα του Σ στο σημείο $X = C_\Sigma(t)$ της τροχιάς του.

Από την επίλυση των εξισώσεων B2.1 βρίσκουμε την αναλυτική έκφραση της καμπύλης $\bar{x}^j = \bar{C}_\Sigma^j(t)$ που προσδιορίζει την τροχιά C_Σ του Σ ως προς το $(O, \bar{x})$.

Σε πολικές συντεταγμένες (βλέπε [Ενότητα A6.A](#)) η διατεταγμένη τριάδα των συντεταγμένων του σημείου $X \in E_3$ γράφεται: $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \equiv (r, \theta, z)$

...και οι συνιστώσες της ταχύτητας του Σ στο X : $U^r = \frac{dr}{dt}$, $U^\theta = \frac{d\theta}{dt}$, $U^z = \frac{dz}{dt}$

Τα στοιχεία βάσης $\{e_r(X), e_\theta(X), e_z(X)\}$ των εφαπτόμενων χώρων $T_X E_3$ ως προς τις πολικές συντεταγμένες, σε συνάρτηση με τα Καρτεσιανά στοιχεία βάσης, δίδονται από τις σχέσεις A6.5a, και ο μετρικός ταυιστής έχει τη μορφή (A6.6a):

$$[\bar{g}_{jk}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{x}^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det[\bar{g}_{jk}] = r^2 \quad (\text{B2.2})$$

Η ταχύτητα του Σ και το πεδίο δυνάμεων F γράφονται:

$$\begin{aligned} U(X) &= e_r(\bar{x})U^r(\bar{x}) + e_\theta(\bar{x})U^\theta(\bar{x}) + e_z(\bar{x})U^z(\bar{x}) = e_r(\bar{x})\dot{r} + e_\theta(\bar{x})\dot{\theta} + e_z(\bar{x})\dot{z} \\ F(X) &= e_r(\bar{x})F^r(\bar{x}) + e_\theta(\bar{x})F^\theta(\bar{x}) + e_z(\bar{x})F^z(\bar{x}) \end{aligned} \quad (\text{B2.3})$$

Τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel που προσδιορίζουν τη συνοχή του E_3 σε πολικές συντεταγμένες, και εμφανίζονται στην έκφραση B2.1 του 2ου Νόμου του Newton, έχουν υπολογιστεί στην [Ενότητα A6](#) (σχέσεις A6.12a):

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = r^{-1}$$

Οι εξισώσεις B2.1 λαμβάνουν τη μορφή:

$$\frac{dU^r}{dt} + \Gamma_{\theta\theta}^r U^\theta(\bar{x})\dot{\theta} = \frac{1}{m}F^r \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{m}F^r \quad (\text{B2.4a})$$

$$\frac{dU^\theta}{dt} + \Gamma_{r\theta}^\theta U^r(\bar{x})\dot{r} + \Gamma_{\theta r}^\theta U^\theta(\bar{x})\dot{r} = \frac{1}{m}F^\theta \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{m}F^\theta \quad (\text{B2.4β})$$

$$\frac{dU^z}{dt} = \frac{1}{m}F^z \Rightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{m}F^z \quad (\text{B2.4γ})$$

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση σε πολικές συντεταγμένες

Έστω ότι το πολικό σύστημα $(O, \bar{x})$ είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς και το σωματίδιο Σ είναι ένα ελεύθερο σωματίδιο⁽³⁾. Επιπλέον, θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ η θέση του Σ ταυτίζεται με την αρχή O του συστήματος αναφοράς: $r(0)=0$. Τότε, οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης B2.4α,β,γ λαμβάνουν τη μορφή:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 0, \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (\text{B2.5})$$

Από την B2.5β συνεπάγονται οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (r^2) &= 2r \frac{dr}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \Rightarrow r^2 \frac{d\theta}{dt} = A$$

Δεδομένου ότι $r(0)=0$, έπεται ότι η σταθερά A είναι ίση με το μηδέν:

$$A = 0 \Rightarrow r^2 \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 = \text{σταθερά} \quad (\text{B2.6a})$$

Από τις B2.5α και B2.6α και την αρχική συνθήκη $r(0)=0$, προκύπτει ότι:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = 0 \Rightarrow r = v_r \cdot t \quad \text{όπου } v_r = \text{σταθερό}$$

Τέλος, η λύση της B2.5γ με αρχικές συνθήκες $z(0) = z_0$, $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = v_z$ είναι η συνάρτηση:

$$z = v_z t + z_0$$

Καταλήγουμε ότι η τροχιά του ελεύθερου σωματιδίου σε πολικές συντεταγμένες, προσδιορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$r = v_r \cdot t, \quad \theta = \theta_0, \quad z = v_z \cdot t + z_0 \quad (\text{B2.7})$$

Οι B2.7 ορίζουν μια ευθεία του E_3 που διέρχεται από την αρχή O του αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων $(O, \bar{x})$

Κίνηση σωματιδίου επί κυλινδρικής επιφάνειας

Θεωρούμε ότι το σωματίδιο Σ κινείται επί κυλινδρικής επιφάνειας K με άξονα συμμετρίας τον Oz και ακτίνα a . Βρίσκουμε τις διαφορικές εξισώσεις που προσδιορίζουν την κίνηση του Σ επί της K . Υπολογίζουμε τις δυνάμεις συνδέσμων ως προς το αδρανειακό σύστημα $(O, \bar{x})$ του E_3 , στην περίπτωση που το Σ κινείται επί γεωδαιτικών καμπύλων της K (βλέπε [Ενότητα B1](#)).

Σε πολικές συντεταγμένες, η K ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\bar{x}^1 \equiv r = a (= \text{σταθ.}), \quad \bar{x}^2 \equiv \theta, \quad \bar{x}^3 \equiv z \quad (\text{B2.8})$$

Το τυχαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\Delta X_K \in T_{X_K} K$, όπου: $X_K \in K$ σε πολικές συντεταγμένες γράφεται (σχέση A6.5α):

$$X_K \in K \Rightarrow \Delta r = 0 \Rightarrow \Delta X_K = e_\theta \Delta \theta + e_z \Delta z \quad (\text{B2.8a})$$

Ο μετρικός τανυστής στα εφαπτόμενα επίπεδα $T_{X_K} K$, $X_K \in K$ προκύπτει από τις B2.8a και A6.6 ([Ενότητα A6](#)):

$$\gamma_{\theta\theta} = \langle e_\theta, e_\theta \rangle = a^2, \quad \gamma_{zz} = \langle e_z, e_z \rangle = 1, \quad \gamma_{\theta z} = \langle e_\theta, e_z \rangle = \langle e_z, e_\theta \rangle = \gamma_{z\theta} = 0$$

ή:

$$\gamma = [\gamma_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B2.8β})$$

Παρατηρούμε ότι στο πολικό, αδρανειακό σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$ τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή της κυλινδρικής επιφάνειας είναι σταθερά, ανεξάρτητα της θέσης του εφαπτόμενου επιπέδου στο οποίο αναφέρονται. Επομένως, τα σύμβολα Christoffel που προσδιορίζουν τη συνοχή της K ως προς το $(O, \bar{x})$ είναι ίσα με το μηδέν (βλέπε σχέσεις B1.4δ,

Ενότητα B1). Οι διαφορικές εξισώσεις B1.5α που περιγράφουν την κίνηση του Σ επί της K , λαμβάνουν τη μορφή:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0, \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (\text{B2.8γ})$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις των καμπύλων της K που είναι λύσεις των B2.8γ, έχουν τη μορφή:

$$\theta(t) = \theta_0 + U_\theta t, z(t) = z_0 + U_z t \quad (\text{B2.8δ})$$

...όπου $\theta_0, U_\theta, z_0, U_z$ σταθερές.

Οι καμπύλες B2.8δ προσδιορίζουν τις γεωδαιτικές καμπύλες της κυλινδρικής επιφάνειας K (βλέπε **Ενότητα B1**).

Το Σ κινείται ελεύθερα επί της κυλινδρικής επιφάνειας K , ωστόσο, δεν είναι ένα ελεύθερο σωματίδιο στο E_3 : επί του Σ ενεργεί "δύναμη συνδέσμου"⁽³⁾, που το "εξαναγκάζει" να παραμένει επί της K . Για να υπολογίσουμε τη δύναμη αυτή, γράφουμε τις διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από το 2ο νόμο του Newton για την κίνηση του Σ στο E_3 ως προς το $(O, \bar{x})$ (σχέσεις B2.4α,β,γ), με δεδομένες τις συνθήκες B2.8 και B2.8δ, και βρίσκουμε:

$$\left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{1}{m} F^r, \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{m} F^\theta, \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{m} F^z \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{ F^r = -maU_\theta^2, F^\theta = 0, F^z = 0 \} \quad (\text{B2.8ε})$$

Επιστροφή στα περιεχόμενα

B3: Ο 2ος νόμος του Newton σε σφαιρικές συντεταγμένες

Σύνοψη: Εφαρμόζουμε τις γενικές σχέσεις που παρήχθησαν στην ενότητα B1 στη μελέτη της κίνησης σωματιδίου Σ ως προς ένα αδρανειακό σφαιρικό σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$ του E_3 .

α) Παράγουμε τις γενικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης του Σ σε σφαιρικές συντεταγμένες.

β) Γράφουμε τις γενικές διαφορικές εξισώσεις κίνησης του Σ επί σφαιρικής επιφάνειας S του E_3 . Μελετάμε την ελεύθερη κίνηση του Σ επί της S και υπολογίζουμε τις δυνάμεις συνδέσμων που εξαναγκάζουν το Σ να κινηθεί επί της S .

Θεωρούμε ότι το σωματίδιο Σ μάζας m , κινείται στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 κάτω από τη δράση πεδίου δυνάμεων F . Γράφουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου (εξισώσεις B1.2β, της **Ενότητας B1**) ως προς το αδρανειακό, σφαιρικό σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$:

$$\frac{d\bar{U}^k(\bar{x})}{dt} + \bar{\Gamma}_{jn}^k(\bar{x}) \bar{U}^j(\bar{x}) \bar{U}^n(\bar{x}) = \frac{1}{m} \bar{F}^k(\bar{x}) \quad (\text{B3.1})$$

...όπου $U(X)$ είναι η ταχύτητα του Σ στο σημείο $X = C_\Sigma(t)$ της τροχιάς του.

Από την επίλυση των εξισώσεων B3.1 βρίσκουμε την αναλυτική έκφραση της καμπύλης $\bar{x}^j = \bar{c}_\Sigma^j(t)$ που προσδιορίζει την τροχιά C_Σ του Σ ως προς το $(O, \bar{x})$.

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η διατεταγμένη τριάδα των συντεταγμένων του σημείου $X \in E_3$ γράφεται: $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \equiv (r, \theta, \varphi)$ (βλέπε **Ενότητα A6.B**).

...και οι συνιστώσες της ταχύτητας του Σ στο X : $U^r = \frac{dr}{dt}, U^\theta = \frac{d\theta}{dt}, U^\varphi = \frac{d\varphi}{dt}$

Τα στοιχεία βάσης $\{e_r(X), e_\theta(X), e_\varphi(X)\}$ των εφαπτόμενων χώρων $T_X E_3$ ως προς τις σφαιρικές συντεταγμένες, σε συνάρτηση με τα Καρτεσιανά στοιχεία βάσης, δίδονται από τις σχέσεις A6.15, και ο μετρικός ταυιστής έχει τη μορφή (σχέσεις A6.16, A6.16α):

$$\bar{g} = [\bar{g}_{jk}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}, \det \bar{g} = r^4 \cos^2 \theta \quad (\text{B3.2})$$

Η ταχύτητα του Σ και το πεδίο δυνάμεων F γράφονται:

$$\begin{aligned}
U(X) &= e_r(\bar{x})U^r(\bar{x}) + e_\theta(\bar{x})U^\theta(\bar{x}) + e_\varphi(\bar{x})U^\varphi(\bar{x}) = e_r(\bar{x})\dot{r} + e_\theta(\bar{x})\dot{\theta} + e_\varphi(\bar{x})\dot{\varphi} \\
F(X) &= e_r(\bar{x})F^r(\bar{x}) + e_\theta(\bar{x})F^\theta(\bar{x}) + e_\varphi(\bar{x})F^\varphi(\bar{x})
\end{aligned} \tag{B3.3}$$

Τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel που προσδιορίζουν τη συνοχή του E_3 ως προς το $(O, \bar{x})$ και εμφανίζονται στον 2ο νόμο του Newton (εξίσωση B3.1), έχουν υπολογιστεί στην [Ενότητα A6](#), σχέσεις A6.18δ έως A6.18στ:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r, \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \cos^2 \theta, \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = \cos \theta \sin \theta \\
\Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = -\tan \theta
\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις B3.1 λαμβάνουν τη μορφή:

$$\frac{dU^r}{dt} + \Gamma_{\theta\theta}^r U^\theta \dot{\theta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r U^\varphi \dot{\varphi} = \frac{1}{m} F^r \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \cos^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{m} F^r \tag{B3.4a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dU^\theta}{dt} + \Gamma_{\theta r}^\theta U^r \dot{r} + \Gamma_{r\theta}^\theta U^\theta \dot{\theta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta U^\varphi \dot{\varphi} &= \frac{1}{m} F^\theta \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \sin \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 &= \frac{1}{m} F^\theta
\end{aligned} \tag{B3.4β}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dU^\varphi}{dt} + \Gamma_{\varphi r}^\varphi U^r \dot{r} + \Gamma_{r\varphi}^\varphi U^\theta \dot{\theta} + \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi U^\theta \dot{\varphi} + \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi U^\varphi \dot{\theta} &= \frac{1}{m} F^\varphi \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dt} - 2 \tan \theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{m} F^\varphi
\end{aligned} \tag{B3.4γ}$$

Κίνηση σωματιδίου επί σφαιρικής επιφάνειας

Θεωρούμε ότι το σωματίδιο Σ κινείται επί της επιφάνειας σφαίρας S που έχει κέντρο την αρχή O του αδρανειακού συστήματος $(O, \bar{x})$ και ακτίνα a . Βρίσκουμε τις διαφορικές εξισώσεις που προσδιορίζουν την κίνηση του Σ επί της S . Υπολογίζουμε τις δυνάμεις συνδέσμων ως προς το αδρανειακό σύστημα $(O, \bar{x})$ του E_3 , στην περίπτωση που το Σ κινείται επί γεωδαιτικών καμπύλων της S (βλέπε [Ενότητα B1](#)).

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η S ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\bar{x}^1 \equiv r = a (= \text{σταθ.}), \bar{x}^2 \equiv \theta, \bar{x}^3 \equiv \varphi \tag{B3.5}$$

Το τυχαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\Delta X_S \in T_{X_S} S$, όπου: $X_S \in S$ σε σφαιρικές συντεταγμένες γράφεται (σχέση A6.15):

$$X_S \in S \Rightarrow \Delta r = 0 \Rightarrow \Delta X_S = e_\theta \Delta \theta + e_\varphi \Delta \varphi \tag{B3.5a}$$

Ο μετρικός τανυστής στα εφαπτόμενα επίπεδα $T_{X_S} S$, $X_S \in S$ προκύπτει από τις B3.5a και A6.16 ([Ενότητα A6](#)):

$$\gamma_{\theta\theta} = \langle e_\theta, e_\theta \rangle = a^2, \gamma_{\varphi\varphi} = \langle e_\varphi, e_\varphi \rangle = a^2 \cos^2 \theta$$

$$\gamma_{\theta\varphi} = \langle e_\theta, e_\varphi \rangle = \langle e_\varphi, e_\theta \rangle = \gamma_{\varphi\theta} = 0$$

ή:

$$\gamma = [\gamma_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} = a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \tag{B3.6}$$

$$\gamma^{-1} = \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos^2 \theta} \end{pmatrix} \tag{B3.6a}$$

Για να γράψουμε τον 2ο νόμο του Newton που προσδιορίζει την κίνηση του Σ επί της σφαιρικής επιφάνειας S , χρειαζόμαστε τα σύμβολα Christoffel που ορίζουν τη συνοχή της S (σχέσεις B1.1,

B1.2, **Ενότητα B1**). Τα σύμβολα Christoffel υπολογίζονται από τις σχέσεις B1.4δ και την έκφραση B3.6 του μετρικού τανυστή της S :

$$\gamma_{\theta\theta} = 0, \gamma_{\theta\varphi} = \gamma_{\varphi\theta} = 0, \gamma_{\varphi\theta\theta} = 0, \gamma_{\varphi\theta\varphi} = a^2 \cos\theta \sin\theta \quad (B3.7)$$

$$\gamma_{\varphi\theta\varphi} = \gamma_{\varphi\varphi\theta} = -a^2 \cos\theta \sin\theta, \gamma_{\varphi\varphi\varphi} = 0$$

$$\gamma^\theta_{\theta\theta} = \gamma^{\theta\theta}\gamma_{\theta\theta\theta} = 0, \gamma^\theta_{\theta\varphi} = \gamma^\theta_{\varphi\theta} = \gamma^{\theta\theta}\gamma_{\theta\varphi\theta} = 0, \gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \gamma^{\theta\theta}\gamma_{\varphi\varphi\theta} = \cos\theta \sin\theta \quad (B3.7a)$$

$$\gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = \gamma^{\varphi\varphi}\gamma_{\varphi\varphi\varphi} = 0, \gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \gamma^{\varphi\varphi}\gamma_{\varphi\theta\varphi} = -\tan\theta, \gamma^\varphi_{\theta\theta} = \gamma^{\varphi\varphi}\gamma_{\varphi\theta\theta} = 0$$

Οι διαφορικές εξισώσεις B1.5α που περιγράφουν την κίνηση του Σ επί της S , λαμβάνουν τη μορφή:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma^\theta_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{m} F_s^\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos\theta \sin\theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{m} F_s^\theta \quad (B3.8a)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma^\varphi_{\theta\varphi} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \gamma^\varphi_{\varphi\theta} \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{m} F_s^\varphi \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} - 2 \tan\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{m} F_s^\varphi \quad (B3.8\beta)$$

Αν το Σ κινείται ελεύθερα επί της S , ισχύει:

$$F_s^\theta = 0 \text{ και } F_s^\varphi = 0 \quad (B3.8\gamma)$$

...και οι B3.8α και B3.8β γράφονται:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \cos\theta \sin\theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0, \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \tan\theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (B3.8\delta)$$

Οι λύσεις των εξισώσεων B3.8δ προσδιορίζουν τις γεωδαιτικές καμπύλες της σφαιρικής επιφάνειας S . Για παράδειγμα, οι καμπύλες: $\varphi = \varphi_0 = \text{σταθερό}$, $\theta = \theta_0 + \omega t$, όπου θ_0 , ω σταθερές ποσότητες, είναι λύσεις των B3.8δ και αντιστοιχούν σε μέγιστους κύκλους της σφαιρικής επιφάνειας. Έπεται ότι, όπως γνωρίζουμε από την Στοιχειώδη Ευκλείδεια Γεωμετρία, οι μέγιστοι κύκλοι είναι γεωδαιτικές καμπύλες της S .

Όταν ικανοποιούνται οι συνθήκες B3.8γ, το Σ κινείται ελεύθερα επί της σφαιρικής επιφάνειας S , ωστόσο, δεν είναι ένα ελεύθερο σωματίδιο στο E_3 : επί του Σ ενεργεί "δύναμη συνδέσμου"⁽³⁾, που το "εξαναγκάζει" να παραμένει επί της S . Για να υπολογίσουμε τη δύναμη αυτή, γράφουμε τις διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από το 2ο νόμο του Newton για την κίνηση του Σ στο E_3 ως προς το $(O, \bar{x})$ (εξισώσεις B3.4α, β και γ), με δεδομένες τις συνθήκες B3.8γ και τις: $\varphi = \varphi_0 = \text{σταθερό}$, $\theta = \theta_0 + \omega t$ και $r = a = \text{σταθερό}$. Βρίσκουμε την (αναμενόμενη) λύση:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \cos^2\theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{m} F^r \Rightarrow F^r = -m a \omega^2 \quad (B3.8\epsilon)$$

[Επιστροφή στα περιεχόμενα](#)

B4: Κίνηση ασυμπίεστου ρευστού στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 - Η εξίσωση του Euler - Το θεώρημα του Bernoulli⁽¹⁰⁾

Σύνοψη: Ορίζουμε την έννοια του **ασυμπίεστου ρευστού** και της **ροής** στο Ευκλείδειο συνεχές E_3 . Θεωρούμε την κίνηση ΔN σωματιδίων του ρευστού που βρίσκονται σε απειροστή περιοχή (region) του E_3 , ορίζουμε την έννοια της **γραμμής ροής** και παράγουμε την ικανή και αναγκαία αναλυτική συνθήκη που ικανοποιεί η ροή ενός ασυμπίεστου ρευστού. Θεωρούμε τις κατηγορίες των δυνάμεων που ασκούνται σε απειροστή περιοχή ασυμπίεστου ρευστού και ορίζουμε το **ιδανικό ρευστό**. Διατυπώνουμε τον 2ο Νόμο του Newton που διέπει την κίνηση μιας απειροστής περιοχής του ρευστού και παράγουμε την **εξίσωση του Euler**. Από την εξίσωση του Euler παράγουμε την βασική εξίσωση της Υδροστατικής για ιδανικά ρευστά, την αρχή του Αρχιμήδη και την εξίσωση του Bernoulli. Επεξεργαζόμαστε δύο απλές εφαρμογές.

Ασυμπίεστο ρευστό και ροή στο Ευκλείδειο συνεχές E_3

Ένα σύστημα N **διακριτών σωματιδίων, με ίσες μάζες** (m) ονομάζεται "ασυμπίεστο ρευστό" εφόσον ικανοποιεί τις ακόλουθες προϋποθέσεις:

α) Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή t σε μια απειροστή περιοχή $q[X_t]$ σημείου $X_t \in E_3$, όγκου $\Delta V(q_t)$, υπάρχουν ΔN σωματίδια του ρευστού. Τότε, τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ **τα ίδια σωματίδια** καταλαμβάνουν μια απειροστή περιοχή $q[X_{t+\Delta t}]$ ενός γειτονικού σημείου $X_{t+\Delta t}$ του E_3 , που έχει όγκο $\Delta V(q_{t+\Delta t})$, ίσο με τον όγκο της $q[X_t]$:

$$\Delta V(q_{t+\Delta t}) = \Delta V(q_t) \quad (\text{B4.1})$$

Από τη B4.1 συνεπάγεται ότι κάθε χρονική στιγμή t , σε κάθε σημείο X_t , η πυκνότητα του ρευστού έχει την ίδια τιμή:

$$\rho = \frac{m\Delta N(q[X_t])}{\Delta V(q[X_t])} = \text{σταθερή} \quad (\text{B4.1a})$$

β) Τα σημεία $X_t = X(t)$ που ορίζονται από τις διαδοχικές περιοχές $q[X_t]$, σχηματίζουν μια λεία (smooth) καμπύλη⁽⁸⁾ του E_3 , που θα την ονομάζουμε **“γραμμή ροής”** του ρευστού.

Έστω $\bar{x}^j(t)$, $j = 1, 2, 3$ οι συντεταγμένες του $X(t)$ ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$. Το διανυσματικό πεδίο:

$$U(X_t) = \bar{e}_j(X_t) \frac{d\bar{x}^j(t)}{dt} \equiv \bar{e}_j \dot{\bar{x}}^j \quad (\text{B4.2})$$

...ονομάζεται **ταχύτητα της ροής** του ρευστού στην περιοχή του σημείου X_t . Το πεδίο των ταχυτήτων $U(X_t)$ ορίζει τη ροή του ρευστού στο E_3 .

Η συνθήκη της ροής ασυμπίεστου ρευστού

Θεωρούμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$ του E_3 και τη ροή ασυμπίεστου ρευστού πυκνότητας ρ , που προσδιορίζεται από το πεδίο ταχυτήτων B4.2.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t στο απειροστό παραλληλεπίπεδο $P_t = P(X_t; \Delta_1 X_t, \Delta_2 X_t, \Delta_3 X_t)$ του E_3 υπάρχουν ΔN σωματίδια του ρευστού. Επιλέγουμε το P_t να είναι εικόνα του απειροστού παραλληλεπιπέδου $\rho_t(\bar{x}; \Delta\bar{x}^1, \Delta\bar{x}^2, \Delta\bar{x}^3)$ του χώρου των συντεταγμένων:

$$X_t \leftrightarrow \bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), \Delta_k X_t = \bar{e}_j(\bar{x}) \Delta_k \bar{x}^j \text{ όπου: } \Delta_k \bar{x}^j = \delta^{jk} \Delta\bar{x}^k \quad (\text{B4.3})$$

Οι κορυφές του P_t ορίζονται από τα σημεία με συντεταγμένες:

$$\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), \bar{x}_{(1)} = (\bar{x}^1 + \Delta\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3), \bar{x}_{(2)} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2 + \Delta\bar{x}^2, \bar{x}^3), \bar{x}_{(3)} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3 + \Delta\bar{x}^3)$$

$$\bar{x}_{(12)} = (\bar{x}^1 + \Delta\bar{x}^1, \bar{x}^2 + \Delta\bar{x}^2, \bar{x}^3), \bar{x}_{(13)} = (\bar{x}^1 + \Delta\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3 + \Delta\bar{x}^3)$$

$$\bar{x}_{(23)} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2 + \Delta\bar{x}^2, \bar{x}^3 + \Delta\bar{x}^3), \bar{x}_{(123)} = (\bar{x}^1 + \Delta\bar{x}^1, \bar{x}^2 + \Delta\bar{x}^2, \bar{x}^3 + \Delta\bar{x}^3)$$

Τη χρονική στιγμή $t+\delta t$ η κορυφή X_t του P_t , έχει μετατοπιστεί στο σημείο $X_{t+\delta t}$ με συντεταγμένες:

$$\bar{x}' = (\bar{x}'^1, \bar{x}'^2, \bar{x}'^3) = (\bar{x}^1 + \delta t \bar{U}^1, \bar{x}^2 + \delta t \bar{U}^2, \bar{x}^3 + \delta t \bar{U}^3) \quad (\text{B4.3a})$$

... και οι πλευρές του έχουν παραμορφωθεί σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\Delta_k \bar{x}'^j \approx \Delta_k \bar{x}^j + \delta t \Delta_k \bar{U}^j = \Delta_k \bar{x}^j + \delta t \Delta_k \bar{x}^n \bar{\partial}_n \bar{U}^j = \delta^{jk} \Delta\bar{x}^k + \delta t \delta^{nk} \Delta\bar{x}^k \bar{\partial}_n \bar{U}^j =$$

$$= (\delta^{jk} + \delta t \bar{\partial}_k \bar{U}^j) \Delta\bar{x}^k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 \bar{x}'^j \approx \delta_1^j \Delta\bar{x}^1 + \delta t \Delta_1 \bar{U}^j = \delta_1^j \Delta\bar{x}^1 + \delta t \Delta_1 \bar{x}^n \bar{\partial}_n \bar{U}^j = (\delta_1^j + \delta t \bar{\partial}_1 \bar{U}^j) \Delta\bar{x}^1 \\ \Delta_2 \bar{x}'^j \approx \delta_2^j \Delta\bar{x}^2 + \delta t \Delta_2 \bar{U}^j = \delta_2^j \Delta\bar{x}^2 + \delta t \Delta_2 \bar{x}^n \bar{\partial}_n \bar{U}^j = (\delta_2^j + \delta t \bar{\partial}_2 \bar{U}^j) \Delta\bar{x}^2 \\ \Delta_3 \bar{x}'^j \approx \delta_3^j \Delta\bar{x}^3 + \delta t \Delta_3 \bar{U}^j = \delta_3^j \Delta\bar{x}^3 + \delta t \Delta_3 \bar{x}^n \bar{\partial}_n \bar{U}^j = (\delta_3^j + \delta t \bar{\partial}_3 \bar{U}^j) \Delta\bar{x}^3 \end{cases} \quad (\text{B4.3β})$$

$$\Delta_1 X_{t+\delta t} = \bar{e}_j(\bar{x}') \Delta_1 \bar{x}'^j = (\bar{e}_1(\bar{x}') (1 + \delta t \bar{\partial}_1 \bar{U}^1) + \bar{e}_2(\bar{x}') \delta t \bar{\partial}_1 \bar{U}^2 + \bar{e}_3(\bar{x}') \delta t \bar{\partial}_1 \bar{U}^3) \Delta\bar{x}^1$$

$$\Delta_2 X_{t+\delta t} = \bar{e}_j(\bar{x}') \Delta_2 \bar{x}'^j = (\bar{e}_1(\bar{x}') \delta t \bar{\partial}_2 \bar{U}^1 + \bar{e}_2(\bar{x}') (1 + \delta t \bar{\partial}_2 \bar{U}^2) + \bar{e}_3(\bar{x}') \delta t \bar{\partial}_2 \bar{U}^3) \Delta\bar{x}^2 \quad (\text{B4.3γ})$$

$$\Delta_3 X_{t+\delta t} = \bar{e}_j(\bar{x}') \Delta_3 \bar{x}'^j = (\bar{e}_1(\bar{x}') \delta t \bar{\partial}_3 \bar{U}^1 + \bar{e}_2(\bar{x}') \delta t \bar{\partial}_3 \bar{U}^2 + \bar{e}_3(\bar{x}') (1 + \delta t \bar{\partial}_3 \bar{U}^3)) \Delta\bar{x}^3$$

Τα συγκεκριμένα ΔN σωματίδια που τη χρονική στιγμή t βρίσκονταν στην περιοχή P_t , την στιγμή $t+\delta t$ καταλαμβάνουν την περιοχή $P_{t+\delta t}$ που ορίζεται από τις σχέσεις B4.3α,3β,3γ. Δεδομένου ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο, ισχύει η συνθήκη:

$$m\Delta N = \rho \text{vol} P_t = \rho \text{vol} P_{t+\delta t} \Rightarrow \text{vol} P_t = \text{vol} P_{t+\delta t} \quad (\text{B4.4})$$

...όπου $\text{vol}(P_t)$, $\text{vol}(P_{t+\delta t})$ οι όγκοι των περιοχών P_t , $P_{t+\delta t}$ αντίστοιχα.

Υπολογίζουμε τα $\text{vol} P_t$, $\text{vol} P_{t+\delta t}$ εφαρμόζοντας τη σχέση A4.8γ της Ενότητας A4:

$$\text{vol} P_t = \sqrt{\det \bar{g}(\bar{x})} (d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3) (\Delta_1 X_t, \Delta_2 X_t, \Delta_3 X_t) = \sqrt{\det \bar{g}(\bar{x})} \Delta \bar{x}^1 \Delta \bar{x}^2 \Delta \bar{x}^3 \quad (\text{B4.4a})$$

$$\begin{aligned} \text{vol} P_{t+\delta t} &= \sqrt{\det \bar{g}(\bar{x})} (d\bar{x}^1 \wedge d\bar{x}^2 \wedge d\bar{x}^3) (\Delta_1 X_{t+\delta t}, \Delta_2 X_{t+\delta t}, \Delta_3 X_{t+\delta t}) \approx \\ &\approx \sqrt{\det \bar{g}(\bar{x})} \Delta \bar{x}^1 \Delta \bar{x}^2 \Delta \bar{x}^3 \left(1 + \frac{\delta t}{2 \det \bar{g}(\bar{x})} \bar{\partial}_j (\det \bar{g}(\bar{x})) \bar{U}^j(\bar{x}) \right) (1 + \delta t \bar{\partial}_j \bar{U}^j(\bar{x})) \approx \end{aligned} \quad (\text{B4.4β})$$

$$\approx \text{vol} P_t \left(1 + \delta t \left(\bar{\partial}_j \bar{U}^j(\bar{x}) + \frac{1}{2 \det \bar{g}(\bar{x})} \bar{U}^j(\bar{x}) \bar{\partial}_j (\det \bar{g}(\bar{x})) \right) \right)$$

Από τις B4.4, B4.4α και B4.4β προκύπτει η συνθήκη της ροής ασυμπίεστου ρευστού:

$$\text{vol} P_{t+\delta t} = \text{vol} P_t \Rightarrow \bar{\partial}_j \bar{U}^j(\bar{x}) + \frac{1}{2 \det \bar{g}(\bar{x})} \bar{U}^j(\bar{x}) \bar{\partial}_j (\det \bar{g}(\bar{x})) = 0 \quad (\text{B4.5})$$

Σε Καρτεσιανές συντεταγμένες η B4.5 λαμβάνει τη μορφή:

$$\det g(x) = 1 \Rightarrow \partial_j U^j(x) = 0 \quad (\text{B4.5a})$$

Σε πολικές συντεταγμένες ισχύει: $\det \bar{g}(\bar{x}) = r^2$ και η B4.5 γράφεται:

$$\partial_r U^r + \partial_\theta U^\theta + \partial_z U^z + \frac{1}{2r^2} U^r \partial_r (r^2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} U^r + \partial_r U^r + \partial_\theta U^\theta + \partial_z U^z = 0 \quad (\text{B4.5β})$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες ισχύει: $\det \bar{g} = r^4 \cos^2 \theta$... και από την B4.5 έπεται ότι:

$$\bar{\partial}_j \bar{U}^j(\bar{x}) + \frac{1}{2 \det \bar{g}(\bar{x})} \bar{U}^j(\bar{x}) \bar{\partial}_j (\det \bar{g}(\bar{x})) = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_r U^r + \partial_\theta U^\theta + \partial_\varphi U^\varphi + \frac{1}{2r^4 \cos^2 \theta} (U^r 4r^3 \cos^2 \theta - U^\theta 2r^4 \cos \theta \sin \theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_r U^r + \partial_\theta U^\theta + \partial_\varphi U^\varphi + \left(\frac{2}{r} U^r - U^\theta \tan \theta \right) = 0 \quad (\text{B4.5γ})$$

Η εξίσωση του Euler⁽¹⁰⁾

Τη χρονική στιγμή t θεωρούμε ένα απειροστό χωρίο (region) $q_t = q(X_t)$ του E_3 , στο οποίο περιέχονται ΔN σωματίδια του ρευστού. Τα **ίδια** ΔN σωματίδια, τη χρονική στιγμή $t+\delta t$ καταλαμβάνουν ένα γειτονικό χωρίο $q_{t+\delta t} = q(X_{t+\delta t})$ του E_3 . Η κίνηση της συγκεκριμένης ομάδας των ΔN σωματιδίων, και κατ' επέκταση η ροή του ρευστού, καθορίζεται από την εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton στο απειροστό χωρίο $q(X_t)$ που καταλαμβάνουν τα συγκεκριμένα σωματίδια την τυχαία χρονική στιγμή t .

Η διατύπωση του 2ου νόμου του Newton απαιτεί τη γνώση των δυνάμεων που ασκούνται στο $q(X_t)$ τη χρονική στιγμή t . Οι δυνάμεις αυτές κατηγοριοποιούνται σε δύο είδη⁽¹⁰⁾: α) Δυνάμεις που ενεργούν σε κάθε σωματίδιο του ρευστού, όπως συμβαίνει με τις βαρυτικές δυνάμεις και γενικά με τις δυνάμεις πεδίου. Ας τις ονομάσουμε "**χωρικές δυνάμεις**".

β) Δυνάμεις που ενεργούν στο σύνορο του χωρίου $q(X_t)$ από τις γειτονικές με αυτό περιοχές του ρευστού. Ας τις ονομάσουμε "**επιφανειακές δυνάμεις**".

Υπολογίζουμε την αναλυτική έκφραση κάθε τύπου δύναμης, για την ειδική περίπτωση ενός **ασυμπίεστου ρευστού** και υποθέτοντας ότι οι επιφανειακές δυνάμεις που ασκούνται στο σύνορο του $q(X_t)$ είναι κάθετες σε αυτό. Εφόσον ισχύουν οι προϋποθέσεις αυτές, λέμε ότι το ρευστό είναι **ιδανικό**.

Έστω ότι ως προς το **Καρτεσιανό αδρανειακό σύστημα αναφοράς** (O, x) , στο απειροστό χωρίο $q_t = q(X_t)$ του E_3 υπάρχουν ΔN σωματίδια του ασυμπίεστου ρευστού. Υποθέτουμε ότι τη

χρονική στιγμή t το q_t είναι ένα απειροστό παραλληλεπίπεδο με κορυφή το σημείο X . Οι πλευρές $\overline{XY_1}, \overline{XY_2}, \overline{XY_3}$ που ορίζουν το παραλληλεπίπεδο, καθορίζονται από τα απειροστά διανύσματα $\Delta_1 X, \Delta_2 X, \Delta_3 X \in T_x E_3$. Ως προς το Καρτεσιανό σύστημα (O, x) , οι συντεταγμένες του X και οι συνιστώσες των $\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3$, προσδιορίζονται από τις σχέσεις:
 $X \leftrightarrow x \equiv (x, y, z)$ και: $\Delta_1 X = e_x \Delta x, \Delta_2 X = e_y \Delta y, \Delta_3 X = e_z \Delta z$

Θεωρούμε ότι η μοναδική χωρική δύναμη που ασκείται στα σωματίδια του ρευστού προέρχεται από το βαρυτικό πεδίο $g_w(x)$ που προκύπτει από το βαθμωτό δυναμικό $\Phi(x)$:

$$g_w(x) = -\sum_{j=1}^3 e_j \partial_j \Phi(x) \quad (B4.6a)$$

Συμβολίζουμε $\Delta V[q_t]$ τον όγκο του χωρίου q_t , οπότε η χωρική δύναμη που ασκείται στο μέρος του ρευστού που περιλαμβάνεται τη χρονική στιγμή t σε αυτό είναι:

$$\Delta F_V[q_t] = g_w(x) \rho \Delta V[q_t] = \rho \Delta V[q_t] e_n g_w^n(x) = -\rho \Delta V[q_t] \sum_{n=1}^3 e_n \partial_n \Phi(x) \quad (B4.6\beta)$$

...όπου ρ η σταθερή πυκνότητα του ασυμπίεστου ρευστού.

Θεωρούμε μια στοιχειώδη επιφάνεια (Ενότητα A4) $S(X)$ του συνόρου ∂q_t του χωρίου q_t , που έχει εμβαδόν Δa_S . Δεχόμαστε ότι η επιφανειακή δύναμη που ασκείται στην $S(X)$ από το ρευστό που περιβάλλει το χωρίο, δίδεται από την αναλυτική έκφραση:

$$\Delta F_S(x) = -n_S p(x) \Delta a_S \quad (B4.7a)$$

...όπου:

α) n_S είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στην $S(x)$, που ορίζει τον προσανατολισμό του στοιχείου εμβαδού στο σημείο X της ∂q_t (Ενότητα A4, σχέσεις A4.15a και επόμενα),

β) $p(x) > 0$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση των συντεταγμένων που ορίζεται ως η **πίεση** του ρευστού στο σημείο X του E_3 .

γ) Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες του X συμβολίζονται με: $x = (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$

Η συνολική επιφανειακή δύναμη που ασκείται στο σύνολο του q_t , υπολογίζεται από την έκφραση:

$$\begin{aligned} \Delta F_S[q_t] &= -\oint_{\partial q_t} n_S(x) p(X) da_S = e_x \oint_{\partial q_t} p(x, y, z) dy \wedge dz - e_x \oint_{\partial q_t} p(x + \Delta x, y, z) dy \wedge dz + \\ &+ e_y \oint_{\partial q_t} p(x, y, z) dz \wedge dx - e_y \oint_{\partial q_t} p(x, y + \Delta y, z) dz \wedge dx + \\ &+ e_z \oint_{\partial q_t} p(x, y, z) dx \wedge dy - e_z \oint_{\partial q_t} p(x, y, z + \Delta z) dx \wedge dy \Rightarrow \\ &= -e_x \int_{q_t} \partial_x p(x) dx \wedge dy \wedge dz - e_y \int_{q_t} \partial_y p(x) dx \wedge dy \wedge dz - e_z \int_{q_t} \partial_z p(x) dx \wedge dy \wedge dz = \\ &= -\int_{q_t} \nabla p(x) dx \wedge dy \wedge dz \approx -\nabla p(x) dx \wedge dy \wedge dz (\Delta_1 X, \Delta_2 X, \Delta_3 X) = -\nabla p(x) \Delta V[q_t] = \\ &= -\Delta V[q_t] \sum_{j=1}^3 e_j \partial_j p(x) = -\Delta V[q_t] \nabla p(x) \end{aligned} \quad (B4.7\beta)$$

$$\dots \text{όπου: } \nabla p(x) \equiv e_x \partial_x p(x) + e_y \partial_y p(x) + e_z \partial_z p(x) \equiv \sum_{j=1}^3 e_j \partial_j p(x)$$

Από τις B4.6β και B4.7β συνεπάγεται ότι η συνολική δύναμη $\Delta F[q_t]$ που ασκείται στο σύνολο των ΔN συγκεκριμένων σωματιδίων του ασυμπίεστου ρευστού που τη χρονική στιγμή t καταλαμβάνουν την απειροστή περιοχή q_t του E_3 , σε Καρτεσιανές συντεταγμένες δίδεται από την έκφραση:

$$\Delta F[q_t] = \Delta F_V[q_t] + \Delta F_S[q_t] = -\rho \Delta V[q_t] \sum_{n=1}^3 e_n \partial_n \left(\Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) \quad (B4.7\gamma)$$

Κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^j = x^j(\bar{x})$, ο όγκος του q_t διατηρείται αμετάβλητος (**Ενότητα A4**). Τα στοιχεία βάσης και οι διαφορικοί τελεστές μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$e_j = \bar{e}_k \partial_j \bar{x}^k, \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \bar{\partial}_k$$

...οπότε, στο **αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων** $(O, \bar{x})$, η B4.7γ γράφεται:

$$\Delta F[q_t] = -\rho \Delta V[q_t] \sum_{j=1}^3 \bar{e}_k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} \bar{\partial}_l \left(\bar{\Phi}(\bar{x}) + \frac{1}{\rho} \bar{\rho}(\bar{x}) \right) \quad (B4.7\delta)$$

όπου: $\bar{\Phi}(\bar{x}) \equiv \Phi(x(\bar{x})), \bar{\rho}(\bar{x}) \equiv \rho(x(\bar{x}))$

Η κίνηση του απειροστού τμήματος των ΔN σωματιδίων του ρευστού καθορίζεται από τον 2ο νόμο του Newton (εξισώσεις B1.2β, **Ενότητα B1**). Έτσι, ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \bar{x})$ η “συλλογική” ταχύτητα $U(X_t)$ των ΔN σωματιδίων, είναι λύση των εξισώσεων:

$$\frac{D}{Dt} U(X_t) = - \sum_{j=1}^3 \bar{e}_k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} \bar{\partial}_l \left(\bar{\Phi}(\bar{x}) + \frac{1}{\rho} \bar{\rho}(\bar{x}) \right) \Leftrightarrow \quad (B4.8)$$

$$\frac{\bar{D}^k U(X_t)}{Dt} = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} \bar{\partial}_l \left(\bar{\Phi}(\bar{x}) + \frac{1}{\rho} \bar{\rho}(\bar{x}) \right) \Leftrightarrow \quad (B4.8a)$$

$$\frac{d\bar{U}^k(\bar{x})}{dt} + \bar{\Gamma}_{ni}^k(\bar{x}) \bar{U}^n(\bar{x}) \bar{U}^i(\bar{x}) = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j} \bar{\partial}_l \left(\bar{\Phi}(\bar{x}) + \frac{1}{\rho} \bar{\rho}(\bar{x}) \right) \quad (B4.8\beta)$$

Οι εξισώσεις B4.8,8α,8β είναι ισοδύναμες μορφές του 2ου νόμου του Newton για το ασυμπίεστο ρευστό. Ονομάζονται **“εξισώσεις του Euler”**.

Σημειώνεται ότι η κίνηση του ασυμπίεστου ρευστού ικανοποιεί ταυτόχρονα και τη “συνθήκη ροής ασυμπίεστου ρευστού” (σχέση B4.5, **Ενότητα B4**):

$$\text{vol } q_{t+\delta t} = \text{vol } q_t \Rightarrow \bar{\partial}_j \bar{U}^j(\bar{x}) + \frac{1}{2 \det \bar{g}(\bar{x})} \bar{U}^j(\bar{x}) \bar{\partial}_j (\det \bar{g}(\bar{x})) = 0 \quad (B4.8\gamma)$$

Από τη λύση των εξισώσεων του Euler και τη συνθήκη ροής ασυμπίεστου ρευστού, προκύπτουν καμπύλες που σε κάθε σημείο τους $X_t \leftrightarrow \bar{x}(t)$ το διανυσματικό πεδίο $U(X_t)$ των ταχυτήτων είναι εφαπτόμενο:

$$\frac{d\bar{x}^k(t)}{dt} = \bar{U}^k(\bar{x}_t) \quad (B4.8\delta)$$

Κάθε καμπύλη που προκύπτει από τη λύση της B4.8δ είναι μια “γραμμή ροής” του ρευστού.

Σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, οι εξισώσεις του Euler και η συνθήκη B4.8γ, εκφράζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{d}{dt} U(x) = (U(x) \cdot \nabla) U(x) = -\nabla \left(\Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} U^j(x) = -\partial_j \left(\Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) \quad (B4.9)$$

$$\partial_j U^j(x) = 0, \text{ όπου: } x \equiv (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3) \quad (B4.9a)$$

Εφαρμογές

Η εξίσωση της Υδροστατικής

Στην περίπτωση που το ρευστό παραμένει ακίνητο ως προς το αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα (O, x) ισχύει:

$$\frac{d}{dt} U(x) = 0 \quad (B4.10)$$

...οπότε, από τις εξισώσεις του Euler B4.9, βρίσκουμε ότι η πίεση ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\nabla p(x) = -\rho \nabla \Phi(x) \Rightarrow \nabla p(x) = \rho g_w(x) \quad (B4.10a)$$

Για παράδειγμα, αν το ρευστό βρίσκεται εντός του ομοιογενούς πεδίου βαρύτητας:

$$g_w = -e_y g_0, g_0 = \text{const.}, g_0 > 0$$

...από τη B4.10α συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g_0, \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Αν $p(0)=p_0$ και $y<0$, προκύπτει η γνωστή εξίσωση της Υδροστατικής:

$$p(y) = p_0 - \rho g_0 y \quad (\text{B4.10}\beta)$$

Το θεώρημα του Αρχιμήδη

Ένα στερεό σώμα καταλαμβάνει μια περιοχή B του E_3 που έχει όγκο V και το σύνορό της ∂B έχει εμβαδόν a . Το σώμα είναι πλήρως βυθισμένο σε ρευστό πυκνότητας ρ , που είναι ακίνητο ως προς το αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα (O, x, y, z) . Η πίεση του ρευστού οφείλεται στο ομοιογενές πεδίο βαρύτητας κατά μήκος του άξονα Oy : $g = -e_y g_0$. Υπολογίστε τη συνολική επιφανειακή δύναμη που ασκείται στο σώμα από το ρευστό.

Λύση:

Η συνολική επιφανειακή δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια του σώματος από το ρευστό υπολογίζεται από την B4.7β και τη B4.10β:

$$F_s[B] = -\int_B dV \sum_{j=1}^3 e_j \partial_j p(x) = e_y \int_B dx \wedge dy \wedge dz \rho g_0 = e_y \rho V g_0 \quad (\text{B4.10}\gamma)$$

Η B4.10γ μας λέει ότι η επιφανειακή δύναμη που ασκείται στο στερεό σώμα από το ρευστό, έχει κατεύθυνση αντίθετη με την κατεύθυνση του πεδίου βαρύτητας και μέτρο ίσο με το βάρος ρευστού που έχει όγκο ίσο με τον όγκο του βυθισμένου σώματος, όπως προβλέπεται από την "Αρχή" του Αρχιμήδη.

Το σχήμα της ελεύθερης επιφάνειας ενός ομαλά περιστρεφόμενου ασυμπίεστου ρευστού⁽¹⁰⁾

Ένα κυλινδρικό δοχείο είναι μισογεμάτο με ασυμπίεστο ρευστό. Το δοχείο περιστρέφεται μαζί με το ρευστό με κοινή, σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω , γύρω από τον κατακόρυφο άξονα Oz , ο οποίος είναι ο άξονας συμμετρίας του κυλινδρικού δοχείου (σχήμα B4.1). Γράψτε τις εξισώσεις του Euler που καθορίζουν την κίνηση του ρευστού και εκφράστε το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του από τον πυθμένα του δοχείου σε συνάρτηση με την απόσταση r από τον άξονα περιστροφής: $z=h(r)$.

Λύση:

A. Περιγραφή του μοντέλου

Η γαλάζια περιοχή στο σχήμα B4.1, δείχνει το χωρίο B του E_3 που καταλαμβάνεται από το ρευστό. Κάθε απειροστή περιοχή του ρευστού περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω γύρω από τον κάθετο άξονα Oz του αδρανειακού συστήματος αναφοράς (O, x) , όπου $x=(x, y, z)$. Το ρευστό διατηρείται αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό στροφής γύρω από τον άξονα Oz . Εκφράζουμε τη ροή του ρευστού, σε πολικές συντεταγμένες. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, το πεδίο ταχυτήτων της ροής σε πολικές συντεταγμένες, προσδιορίζεται από τις σχέσεις:

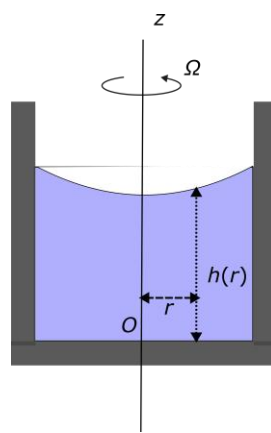
$$\left\{ U^r = 0, U^\theta = \frac{d\theta}{dt} = \Omega, U^z = 0 \right\} \Rightarrow \quad (\text{B4.11})$$

$$U(\bar{x}) = e_\theta(\bar{x})\Omega \in T_{\bar{x}}E_3, \quad X \in B, \quad \bar{x} = (r, \theta, z)$$

...(βλέπε [Ενότητα A6](#)).

B. Η συνθήκη ασυμπίεστης ροής

Σε πολικές συντεταγμένες, η συνθήκη ασυμπίεστης ροής εκφράζεται από τη σχέση B4.5β:



Σχήμα B4.1
Ομαλή περιστροφική κίνηση
ασυμπίεστου ρευστού

$$\frac{U^r}{r} + \partial_r U^r + \partial_\theta U^\theta + \partial_z U^z \equiv 0$$

...η οποία, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος (εξισώσεις B4.11) ικανοποιείται ταυτοτικά.

Γ. Οι εξισώσεις του Euler

Στο σύστημα πολικών συντεταγμένων $(O, \bar{x})$ οι εξισώσεις του Euler που καθορίζουν την κίνηση του ρευστού εκφράζονται με τις εξισώσεις B4.8β:

$$\frac{\bar{D}^k U}{Dt} = \frac{d\bar{U}^k(\bar{x})}{dt} + \bar{F}_{ni}^k(\bar{x}) \bar{U}^n(\bar{x}) \bar{U}^i(\bar{x}) = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \bar{\partial}_i \left(\bar{\Phi}(\bar{x}) + \frac{1}{\rho} \bar{p}(\bar{x}) \right) \quad (B4.11a)$$

...όπου οι συναλλοίωτες παράγωγοι υπολογίζονται από τις σχέσεις A6.13β, **Ενότητα A6**:

$$\begin{cases} \frac{D^r U}{Dt} = U^r \partial_r U^r + U^\theta (\partial_\theta U^r - r U^\theta) + U^z \partial_z U^r \\ \frac{D^\theta U}{Dt} = U^r \left(\partial_r U^\theta + \frac{1}{r} U^\theta \right) + U^\theta \left(\partial_\theta U^\theta + \frac{1}{r} U^r \right) + U^z \partial_z U^\theta \\ \frac{D^z U}{Dt} = U^r \partial_r U^z + U^\theta \partial_\theta U^z + U^z \partial_z U^z \end{cases} \quad (B4.11\beta)$$

...και το δυναμικό του πεδίου βαρύτητας δίδεται από τη:

$$\bar{\Phi}(\bar{x}) = \bar{\Phi}(z) = g_0 z \Rightarrow g_w = -e_z \partial_z \bar{\Phi}(z) = -e_z g_0$$

...οπότε, από την B4.11a συνεπάγεται η:

$$\left(\bar{\partial}_i \bar{U}^n(\bar{x}) + \bar{F}_{ki}^n(\bar{x}) \bar{U}^k(\bar{x}) \right) \bar{U}^i(\bar{x}) = \delta^{n3} g_0 - \frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \bar{\partial}_i (\bar{p}(\bar{x})) \quad (B4.11\gamma)$$

Από την B4.11γ συνεπάγονται οι εξισώσεις (βλέπε **Ενότητα A6-A: Πολικές συντεταγμένες**):

$$\begin{aligned} U^r \partial_r U^r + U^\theta (\partial_\theta U^r - r U^\theta) + U^z \partial_z U^r &= \\ = -\frac{1}{\rho} \cos \theta \left(\cos \theta \partial_r \bar{p} - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \bar{p} \right) - \frac{1}{\rho} \sin \theta \left(\sin \theta \partial_r \bar{p} + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta \bar{p} \right) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \rho \Omega^2 r = \partial_r \bar{p} & \quad (B4.11\delta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^r \left(\partial_r U^\theta + \frac{1}{r} U^\theta \right) + U^\theta \left(\partial_\theta U^\theta + \frac{1}{r} U^r \right) + U^z \partial_z U^\theta &= \\ = \frac{1}{r} \sin \theta \frac{1}{\rho} \left(\cos \theta \partial_r \bar{p} - \frac{1}{r} \sin \theta \partial_\theta \bar{p} \right) - \frac{1}{r} \cos \theta \frac{1}{\rho} \left(\sin \theta \partial_r \bar{p} + \frac{1}{r} \cos \theta \partial_\theta \bar{p} \right) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \partial_\theta \bar{p} = 0 & \quad (B4.11\epsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U^r \partial_r U^z + U^\theta \partial_\theta U^z + U^z \partial_z U^z &= -g_0 - \frac{1}{\rho} \partial_z \bar{p} \Rightarrow \\ \partial_z \bar{p} &= -\rho g_0 \quad (B4.11\zeta) \end{aligned}$$

Από τις B4.11δ,11ε,11ζ συμπεραίνουμε ότι:

$$\left\{ \bar{p} = \bar{p}(r, z) = -\rho g_0 z + A(r) \text{ όπου: } \frac{dA(r)}{dr} = \rho \Omega^2 r \right\} \Rightarrow \bar{p} = -\rho g_0 z + \frac{\rho \Omega^2}{2} r^2 + p_0 \quad (B4.12)$$

Στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική: $\bar{p} = p_{atm}$. Επομένως, σύμφωνα με την B4.12, η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού προσδιορίζεται από την εξίσωση:

$$z = \frac{\rho \Omega^2}{2g_0} r^2 + \frac{p_0 - p_{atm}}{\rho g_0} \quad (B4.12a)$$

Η σταθερή ποσότητα p_0 υπολογίζεται από το ύψος h_0 του ρευστού στο $r=0$:

$$z = \frac{\rho \Omega^2}{2g_0} r^2 + \frac{p_0 - p_{atm}}{\rho g_0} \Rightarrow h_0 = \frac{p_0 - p_{atm}}{\rho g_0} \Rightarrow p_0 = p_{atm} + \rho g_0 h_0 \quad (B4.12\beta)$$

Τελικά, η αναλυτική έκφραση της ελεύθερης επιφάνειας του ομαλά περιστρεφόμενου ασυμπίεστου ρευστού, δίδεται από την εξίσωση:

$$z = \frac{\rho\Omega^2}{2g_0} r^2 + h_0 \quad (\text{B4.12}\gamma)$$

Το θεώρημα του Bernoulli

Θεωρούμε τη ροή ασυμπίεστου ρευστού πυκνότητας ρ στο E_3 και το **Καρτεσιανό** σύστημα συντεταγμένων (O, x) . Η κίνηση του ρευστού ως προς το (O, x) , καθορίζεται από την εξίσωση του Euler, που σε Καρτεσιανές συντεταγμένες έχει τη μορφή B4.9:

$$\frac{d}{dt} U(x) = - \sum_{j=1}^3 e_j \partial_j \left(\Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) \quad (\text{B4.13})$$

Το πεδίο ταχυτήτων της ροής, ως προς την Καρτεσιανή βάση $\{e_1, e_2, e_3\}$ κάθε εφαπτόμενου χώρου $T_{x_t} E_3$ γράφεται (βλέπε **Ενότητα A3**):

$$U(x) = e_k U^k = e_k \frac{dx^k}{dt} \quad (\text{B4.14})$$

...και η B4.13 μπορεί να λάβει την ισοδύναμη έκφραση:

$$U^k \partial_k U^j = - \partial_j \left(\Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) \quad (\text{B4.15})$$

Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά και τα δύο μέρη της B4.13 με το διάνυσμα $U(x)$, οπότε προκύπτει η ισότητα:

$$\left\langle U(x), \frac{d}{dt} U(x) \right\rangle = - \frac{dx^k}{dt} \sum_{j=1}^3 \langle e_k, e_j \rangle \partial_j \left(\Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) = - \frac{dx^k}{dt} \partial_k \left(\Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) \quad (\text{B4.15}\alpha)$$

Επιπλέον, ισχύουν οι ταυτότητες:

$$\left\langle U(x), \frac{d}{dt} U(x) \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle U(x), U(x) \rangle - \left\langle \frac{d}{dt} U(x), U(x) \right\rangle = \frac{d}{dt} \|U(x)\|^2 - \left\langle U(x), \frac{d}{dt} U(x) \right\rangle \Rightarrow \quad (\text{B4.15}\beta)$$

$$\left\langle U(x), \frac{d}{dt} U(x) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U(x)\|^2$$

$$- \frac{dx^k}{dt} \partial_k \left(\Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) = - \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) = - \frac{d}{dt} \left(\Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) \quad (\text{B4.15}\gamma)$$

Από τις B4.15α,15β,15γ συνεπάγεται ότι αν το πεδίο $U(x)$ είναι λύση της εξίσωσης του Euler (B4.13), τότε αληθεύει η ισότητα:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U(x)\|^2 = - \frac{d}{dt} \left(\Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|U(x)\|^2 + \Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) \right) = 0 \quad (\text{B4.16})$$

ή:

$$\frac{1}{2} \|U(x)\|^2 + \Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x) = \text{σταθερό} \quad (\text{B4.16}\alpha)$$

Από την B4.16α συμπεραίνουμε ότι **η ποσότητα $\frac{1}{2} \|U(x)\|^2 + \Phi(x) + \frac{1}{\rho} p(x)$ έχει σταθερή τιμή**

κατά μήκος οποιασδήποτε γραμμής ροής του ρευστού, δηλαδή κατά μήκος κάθε καμπύλης

$X(t)$ με συντεταγμένες $x^k(t) = x^k(0) + \int_0^t d\tau U^k(x(\tau))$ όπου τα $U^k(x(t))$, $k=1,2,3$ είναι λύσεις της

εξίσωσης του Euler B4.13. Η σχέση B4.16 ή B4.16α είναι γνωστή ως “**εξίσωση του Bernoulli**”.

Η εξίσωση του Bernoulli είναι ένα πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης του Euler (B4.13). Η τιμή της σταθεράς στη σχέση B4.16α υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες του δυναμικού συστήματος σε κάθε σημείο του Ευκλείδειου συνεχούς E_3 .

Παράδειγμα: Κίνηση ιδανικού ρευστού σε σωληνοειδή περιοχή με αξονική συμμετρία και μεταβλητή διατομή - Το φαινόμενο Venturi

Θεωρούμε τη ροή ενός ιδανικού ρευστού πυκνότητας ρ εντός του σωληνοειδούς χωρίου Q του E_3 που εικονίζεται στο σχήμα B4.2. Στο ρευστό δεν ασκούνται χωρικές δυνάμεις (βλέπε **Ενότητα B4**: “Η εξίσωση του Euler”). Σε κάθε απειροστό χωρίο $q(X_t)$ του ρευστού ασκούνται μόνον

επιφανειακές δυνάμεις, που είναι κάθετες στις συντοριακές επιφάνειες του $q(X_t)$ και οφείλονται σε ένα βαθμωτό πεδίο πιέσεων $p(X_t)$.

Δίδεται ότι το πεδίο ταχύτητας κάθε απειροστής κυκλικής διατομής του ρευστού δίδεται από τη σχέση: $U(x_t) = e_x U^x(x_t)$ Στην περιοχή 1 του Q , και για $x_t < x_1$, η ταχύτητα είναι σταθερή και παράλληλη με τον άξονα συμμετρίας τους Q . Σε πολικές συντεταγμένες:

$$U^r = 0, U^\theta = 0, U^x = U^1$$

Υπολογίστε την ταχύτητα της ροής και την πίεση του ρευστού κατά μήκος της περιοχής Q .

Λύση:

A) Η συνθήκη ροής ασυμπίεστου ρευστού
Το σωληνοειδές χωρίο Q περιβάλλεται από την επιφάνεια εκ περιστροφής ∂Q με εξισώσεις, ως προς το πολικό, αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων (O, r, θ, x) :

$$r = r(x), \theta = \theta, x = x \quad (B4.17a)$$

...όπου:

$$r(x) = \begin{cases} r_1 & \text{για } x < x_1, \text{ ή } x_4 < x \\ r_2 & \text{για } x_2 < x < x_3 \\ -\lambda(x - x_1) + r_1 & \text{για } x_1 < x < x_2 \\ \lambda(x - x_3) + r_2 & \text{για } x_3 < x < x_4 \end{cases}$$

$$r_1 - r_2 > 0, x_2 - x_1 = x_4 - x_3 > 0,$$

$$\lambda \equiv (r_1 - r_2) / (x_2 - x_1)$$

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t , στον όγκο ΔV_t απειροστού κυλίνδρου K_t με εμβαδόν βάσης A_t και ύψος Δx_t (σχήμα B4.2), υπάρχουν ΔN σωματίδια του ρευστού. Η θέση του K_t προσδιορίζεται από τη συντεταγμένη x_t του κέντρου της βάσης του επί του άξονα συμμετρίας Ox του Q . Ο απειροστός κύλινδρος που περιέχει τα **συγκεκριμένα** ΔN σωματίδια κινείται και, ενδεχομένως, παραμορφώνεται, αλλά δεδομένου ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο, ο όγκος του διατηρείται σταθερός. Τη χρονική στιγμή $t + \delta t$ τα εν λόγω σωματίδια καταλαμβάνουν τον κύλινδρο $K_{t+\delta t}$ του οποίου η θέση προσδιορίζεται από τη συντεταγμένη $x_{t+\delta t}$. Το εμβαδόν της βάσης του είναι $A_{t+\delta t}$ και το ύψος του $\Delta x_{t+\delta t}$. Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$x_{t+\delta t} = x_t + U^x(x_t) \delta t \Rightarrow \Delta x_{t+\delta t} = \Delta x_t + \delta t \Delta U^x(x_t) \Rightarrow \frac{\delta \Delta x_t}{\delta t} = \Delta U^x(x_t) \quad (B4.17\beta)$$

$$\Delta x_t A(x_t) = \Delta x_{t+\delta t} A(x_{t+\delta t}) \Rightarrow \Delta x_t A(x_t) = \Delta (x_t + \delta t U^x(x_t)) A(x_t + \delta t U^x(x_t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x_t A(x_t) = (\Delta x_t + \delta t \Delta U^x(x_t)) \left(A(x_t) + \delta t U^x(x_t) \frac{dA(x_t)}{dx_t} \right) \Rightarrow \Delta U^x(x_t) A(x_t) + U^x(x_t) \frac{dA(x_t)}{dx_t} \Delta x_t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U^x(x_t) A(x_t) + U^x(x_t) \frac{dA(x_t)}{dx_t} \Delta x_t = 0 \Rightarrow \Delta (U^x(x_t) A(x_t)) = 0 \quad (B4.17\gamma)$$

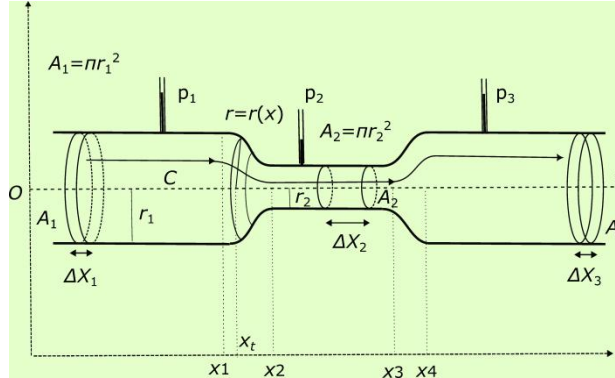
Η μεταβολή της ποσότητας $F[x_t] \equiv U^x(x_t) A(x_t)$ κατά την κίνηση του ρευστού στο χρονικό διάστημα $[t, t + \delta t]$ υπολογίζεται από τις διαδοχικές ισότητες:

$$\left\{ \frac{U^x(x_t)}{dt} = U^x(x_t) \frac{\Delta U^x(x_t)}{\Delta x_t}, \frac{dA(x_t)}{dt} = U^x(x_t) \frac{dA(x_t)}{dx_t} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} (U^x(x_t) A(x_t)) = U^x(x_t) \frac{\Delta U^x(x_t)}{\Delta x_t} A(x_t) + U^x(x_t) U^x(x_t) \frac{dA(x_t)}{dx_t} =$$

$$= U^x(x_t) \left(\frac{\Delta U^x(x_t)}{\Delta x_t} A(x_t) + U^x(x_t) U^x(x_t) \frac{dA(x_t)}{dx_t} \right) = U^x(x_t) \frac{\Delta}{\Delta x_t} (U^x(x_t) A(x_t)) \Rightarrow_{B4.17\gamma}$$

$$\frac{d}{dt} F[x_t] = \frac{d}{dt} (U^x(x_t) A(x_t)) = 0 \quad (B4.17\delta)$$



Σχήμα B4.2

Ροή ιδανικού ρευστού στο σωληνοειδές χωρίο Q του E_3 , κυλινδρικής συμμετρίας και μεταβλητής διατομής.

Σύμφωνα με την B4.17δ, ποσότητα $F[x_t]$ έχει σταθερή τιμή σε κάθε χρονική στιγμή t . Στην περιοχή 1 του Q , ισχύει:

$$F[x_t] = U_1 A_1$$

...οπότε, για τις υπόλοιπες περιοχές του Q , βρίσκουμε:

$$x \in (x_2, x_3) \Rightarrow U_x A_x = U_1 A_1 \Rightarrow U_x \pi (-\lambda (x - x_1) + r_1)^2 = U_1 \pi r_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_x = U_1 \frac{r_1^2}{(-\lambda (x - x_1) + r_1)^2} \Rightarrow \left\{ x = x_1 \Rightarrow U_x = U_1, x = x_2 \Rightarrow U_x = U_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} \right\} \dots \kappa \lambda \pi$$

B) Η εξίσωση του Bernoulli

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli για δύο σημεία $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$ μιας γραμμής ροής του ρευστού, όπου το $\Sigma 1$ βρίσκεται στην περιοχή με $x < x_1$ και το $\Sigma 2$ στην περιοχή με $x \in (x_2, x_3)$.

Από την B4.16α λαμβάνουμε:

$$\frac{1}{2} U_1^2 + \frac{1}{\rho} p(x_{\Sigma 1}) = \frac{1}{2} U_2^2 + \frac{1}{\rho} p(x_{\Sigma 2}), \quad x_{\Sigma 1} < x_1, \quad x_1 < x_{\Sigma 2} < x_2 \quad (\text{B4.17ε})$$

Από τις B4.17δ και B4.17ε συνεπάγεται ότι οι πιέσεις του ρευστού στις δύο περιοχές ικανοποιούν τη σχέση:

$$p(x_{\Sigma 1}) = \frac{\rho}{2} \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right) U_1^2 + p(x_{\Sigma 2}) \underset{A_1 > A_2}{\Rightarrow} p(x_{\Sigma 1}) > p(x_{\Sigma 2}) \quad (\text{B4.17ζ})$$

Η B4.17ζ εκφράζει αναλυτικά το φαινόμενο Venturi: "Σε περιοχές όπου η ταχύτητα της ροής είναι μικρότερη, η πίεση του ασυμπιέστου ρευστού είναι μεγαλύτερη".

[Επιστροφή στα περιεχόμενα](#)

© kostaspapamichalis 09-08-2024

Αναφορές

1. [The Newton-Laws and the Gallileo's proposition: K. Papamichalis \(sch.gr\)](#)
2. [Relativistic Mechanics: K. Papamichalis \(sch.gr\)](#)
3. Classical Mechanics: Goldstein, Poole & Safko, Addison Wesley, 3d edition
4. An Elementary Introduction to the Riemannian Geometry of Surfaces: K. G. Papamichalis, [Differential Geometry \(sch.gr\)](#)
5. Advanced Calculus: R.C. Buck McGraw-Hill Inc. 3d edition 1978
6. The Classical Theory of Fields: L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Pergamon Press third revised English edition
7. Affine space: wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Affine_space#Definition
8. Advanced Calculus: L. H. Loomis, S. Sternberg, Jones and Bartlett Publishers Inc 1990
9. Physical Mathematics: Kevin Cahill, Cambridge University Press 2013
10. Lectures on Fluid Dynamics, Dr Evy Kersale, School of Mathematics, University of Leeds, 2017
11. Διαφορική πολλαπλότητα (differentiable manifold): wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Differentiable_manifold

© kostaspapamichalis 09-08-2024
kostaspapamichalis@gmail.com