Οι νόμοι του Newton και το "αίτημα" του Galileo

Κώστας Παπαμιχάλης Δρ. Θεωρητικής Φυσικής

Σύνοψη

Σε αυτή τη σελίδα, αναπτύσσονται τρία θέματα που παρουσιάζουν σημαντικές εννοιολογικές δυσκολίες στη θεμελίωση και στη διδασκαλία της Νευτώνειας Μηχανικής στο Λύκειο. Πρόκειται για τα ακόλουθα ζητήματα:

1. Αναλυτική διατύπωση των τριών νόμων του Newton. Πώς συσχετίζονται μεταξύ τους; Ποιοι εξ αυτών είναι αξιώματα και ποιοι ορισμοί; Πώς ορίζονται και πώς μετρούνται τα φυσικά μεγέθη που εμπλέκονται στη διατύπωσή τους;
2. Πεδία δυνάμεων:
   a) Πώς ορίζεται το ηλεκτροστατικό πεδίο και το ηλεκτρικό φορτίο; πώς μπορεί να σχεδιαστεί ο πειραματικός υπολογισμός του ηλεκτρικού φορτίου ενός σωματιδίου;
   b) Πώς ορίζεται το πεδίο βαρύτητας και η βαρυτική μάζα;
3. Το αίτημα του Galileo για το πεδίο βαρύτητας. Σχέση βαρυτικής και αδρανειακής μάζας ενός σωματιδίου. Ισχύει κάτι ανάλογο στο ΗΣ πεδίο;

Βασικές έννοιες:

Φυσικό σύστημα - Μαθηματικό μοντέλο - Ευκλείδειος χώρος - Σύστημα αναφοράς - Θέση σωματιδίου ως προς σύστημα αναφοράς - Κίνηση - Τροχιά σωματιδίου ως προς σύστημα αναφοράς - Αδρανειακό σύστημα αναφοράς - Δύναμη - Ελεύθερο σωματίδιο - Χρόνος - Ταχύτητα - Επιτάχυνση - Αδρανειακή μάζα σωματιδίου - Πεδίο βαρύτητας - Βαρυτική μάζα σωματιδίου - Ηλεκτροστατικό πεδίο - Ηλεκτρικό φορτίο σώματος - Υπόθεση του Galileo

Οι τρεις νόμοι του Newton[1,2]

α) Ο 1ος νόμος του Newton

Μια συνηθισμένη διατύπωση του 1ου νόμου είναι η ακόλουθη: **Κάθε "ελεύθερο σωματίδιο"** κινείται με σταθερή **ταχύτητα** -ή παραμένει ακίνητο- ως προς ένα **αδρανειακό σύστημα αναφοράς**.

Για την κατανόηση του 1ου νόμου χρειάζεται αφενός να διευκρινιστούν οι όροι που εμφανίζονται στη διατύπωση, και αφετέρου, να αναδιατυπώσουμε στη γλώσσα των Μαθηματικών, τα γενικά αξιώματα που εισηγείται. **Με την έννοια "γενικά αξιώματα" εννοούμε ότι ισχύουν σε κάθε δυνατό μαθηματικό μοντέλο που επινοούμε για να περιγράψουμε ένα φυσικό σύστημα στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής.**

Στη Νευτώνεια Μηχανική κάθε σωματίδιο 'υπάρχει' μέσα σε έναν τρισδιάστατο **Ευκλείδειο** χώρο E_3. Στον E_3 μπορούμε πάντοτε να επιλέξουμε ένα σημείο του Ο ως αρχή και ένα σύστημα τριών αμοιβαία ορθογωνίων διανυσμάτων μοναδιαίου μήκους[3,4]:

$\hat{x} = \overrightarrow{OA}$, $\hat{y} = \overrightarrow{OB}$, $\hat{z} = \overrightarrow{OC}$ όπου: $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0$, $\|\hat{x}\| = \|\hat{y}\| = \|\hat{z}\| = 1$

...που προσδιορίζουν ένα **Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων**. Το συμβολίζουμε Oxyz.

Ας ονομάσουμε Σ ένα σωματίδιο που κινείται στον χώρο E_3. Η **θέση** του Σ ως προς το σύστημα συντεταγμένων Oxyz, προσδιορίζεται από το "διάνυσμα θέσης" $\overrightarrow{O\Sigma}$: $\vec{r}_\Sigma = \overrightarrow{O\Sigma} = \hat{x}x_\Sigma + \hat{y}y_\Sigma + \hat{z}z_\Sigma$

Η απόσταση του Σ από την αρχή Ο υπολογίζεται από την **Ευκλείδεια μετρική**:

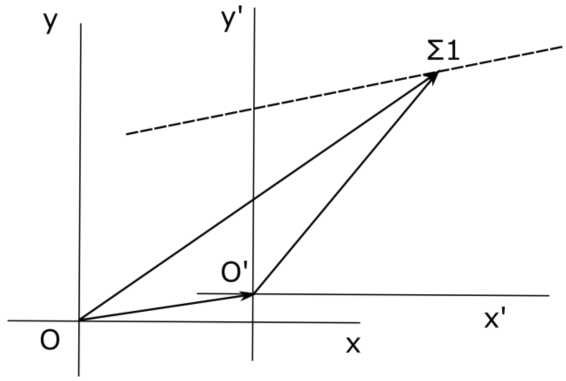
$r_\Sigma = \|\vec{r}_\Sigma\| = \|\overrightarrow{O\Sigma}\| = \sqrt{{x_\Sigma}^2 + {y_\Sigma}^2 + {z_\Sigma}^2}$

Κίνηση του Σ ως προς το Oxyz λογίζεται κάθε μεταβολή της θέσης του ως προς το Oxyz. Επομένως το κινούμενο σωματίδιο Σ, διαγράφει μια καμπύλη ως προς το Oxyz που θα την ονομάζουμε "**τροχιά**" του Σ. Η τροχιά του Σ ως προς το Oxyz προσδιορίζεται αναλυτικά, από ένα σύνολο τριών παραμετρικών εξισώσεων που μας δίνουν τη δυνατότητα υπολογισμού των Καρτεσιανών συντεταγμένων της θέσης του Σ για κάθε τιμή της παραμέτρου. Ας ονομάσουμε τ την παράμετρο που χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε αναλυτικά την τροχιά του Σ. Τότε, για κάθε τιμή του τ η θέση του Σ ως προς το Oxyz, υπολογίζεται μονοσήμαντα από τις εξισώσεις:

$x_\Sigma = X(\tau)$, $y_\Sigma = Y(\tau)$, $z_\Sigma = Z(\tau)$ (1)

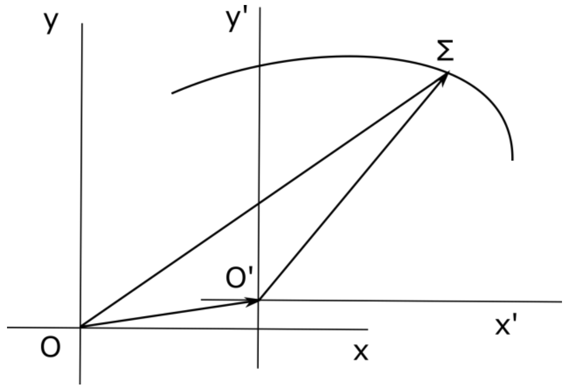
όπου το τ διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών και $X(\tau)$, $Y(\tau)$, $Z(\tau)$ είναι πραγματικές παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Στο πλαίσιο του μαθηματικού μοντέλου που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε την κίνηση ενός σωματιδίου, θα θέλαμε η παράμετρος τ να παίζει το ρόλο του χρόνου. Είναι ωστόσο φανερό ότι η παράμετρος τ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Αν επιλέξουμε μιά άλλη παράμετρο τ', που σχετίζεται με την τ με μια σχέση $\tau = f(\tau')$, όπου f μια πραγματική συνάρτηση, αντιστρεπτή και παραγωγίσιμη, οι αναλυτικές εξισώσεις 1 της τροχιάς μεταβάλλονται, μολονότι η μορφή της τροχιάς -προφανώς- δεν μεταβάλλεται.
Πώς λοιπόν θα επιλέξουμε την κατάλληλη παράμετρο t που θα την ονομάσουμε "χρόνο"; Η επιλογή μας δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη. Ο χρόνος πρέπει να οριστεί έτσι ώστε να έχει το status ενός φυσικού μεγέθους: δηλαδή να είναι καλά ορισμένος ο τρόπος μέτρησής του.
Θα δείξουμε ότι ο ορισμός του χρόνου προκύπτει μέσα από τη διατύπωση του 1ου νόμου. Πριν ωστόσο προχωρήσουμε, είναι απαραίτητο να διευκρινίσουμε τις δύο άλλες έννοιες που εμπεριέχονται στον 1ο νόμο: τις έννοιες "αδρανειακό σύστημα αναφοράς" και "ελεύθερο σωματίδιο".



Σχήμα 1

Η μορφή της τροχιάς ενός σωματιδίου Σ εξαρτάται από το φυσικό σύστημα που ανήκει το Σ και από την επιλογή του συστήματος αναφοράς που έχουμε επιλέξει για να περιγράψουμε τη κίνησή του.
Μπορούμε να φανταστούμε ένα φυσικό σύστημα που αποτελείται από ένα μοναχικό -απομονωμένο- σωματίδιο Σ1, του οποίου η κίνηση δεν επηρεάζεται από άλλα σωματίδια. Ένας κόκκος σκόνης μακριά από κάθε άλλο σώμα, προσεγγίζει ένα τέτοιο φυσικό σύστημα. **Τότε, η μορφή της τροχιάς του Σ1 προσδιορίζεται αποκλειστικά από την επιλογή του συστήματος αναφοράς**. Το Σ1 ορίζει μια κλάση σωματιδίων που θα το ονομάζουμε "**ελεύθερα**".
Σύμφωνα με τον 1ο νόμο του Newton, υπάρχει σύστημα αναφοράς Oxyz που θα το ονομάζουμε "**αδρανειακό**", ως προς το οποίο η κίνηση του ελεύθερου σωματιδίου Σ1 είναι "ευθύγραμμη και ομαλή". Δηλαδή, μπορούμε να βρούμε παράμετρο t, ώστε η θέση του Σ1 ως προς το Oxyz, να προσδιορίζεται από την παραμετρική εξίσωση:



Σχήμα 2

$$\vec{r}_{\Sigma 1} = \vec{v} \cdot t + \vec{r}_0 \qquad (2)$$

...όπου $\vec{v}$ και $\vec{r}_0$ σταθερές ποσότητες, ανεξάρτητες του t.
Ένα σύστημα συντεταγμένων που προσεγγίζει την έννοια του αδρανειακού συστήματος αναφοράς Oxyz, μπορεί να θεωρηθεί το σύστημα των απλανών αστέρων που βρίσκονται πολύ μακριά από οποιοδήποτε άλλο σώμα. Επίσης, το ηλιακό μας σύστημα ή το σύστημα αναφοράς που ορίζεται από τον Γαλαξία, μπορούν να θεωρηθούν ως αδρανειακά συστήματα, για τη μελέτη μιας μεγάλης κατηγορίας φυσικών συστημάτων.
Η παράμετρος t ορίζεται ως "**απόλυτος χρόνος**" (ή απλά, χρόνος). Η μέτρηση του χρόνου t ανάγεται σε μέτρηση μήκους επί της τροχιάς του Σ1, εφόσον οι γεωμετρικές ποσότητες $\vec{r}_{\Sigma 1}$, $\vec{v}$, $\vec{r}_0$ στην εξίσωση 2, μας είναι γνωστές. Με τον τρόπο αυτό, η τροχιά του Σ1 ως προς το αδρανειακό σύστημα Oxyz ορίζει ένα **χρονόμετρο**.
Εφόσον εξασφαλίσουμε ότι με την επιλογή της παραμέτρου t η τροχιά του ελεύθερου σωματιδίου Σ1 ως προς το αδρανειακό σύστημα Oxyz, εκφράζεται με τις παραμετρικές εξισώσεις 2, μπορούμε

να διαπιστώσουμε ότι και κάθε άλλη παράμετρος που σχετίζεται με την t με μια γραμμική σχέση της μορφής $t' = at + b$ a, b σταθερές, βάζει υποψηφιότητα για τον τίτλο του "χρόνου". Από το σημείο αυτό, η επιλογή μας είναι αυθαίρετη, ή καλύτερα, συναινετική. Έχει να κάνει με τον ορισμό της μονάδας της χρονικής διάρκειας Δt (1 δευτερόλεπτο). Για κάθε επιλογή της μονάδας του χρόνου, ισχύει η σχέση: $\Delta t' = a\Delta t$

Η τιμή του χρόνου t, όπως προσδιορίζεται από την εξίσωση 2, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ελεύθερη παράμετρος για την έκφραση των παραμετρικών εξισώσεων οποιουδήποτε σωματιδίου, ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς (εξισώσεις 1). Με βάση αυτή την παρατήρηση, δικαιολογείται ο χαρακτηρισμός του t ως "απόλυτος" χρόνος.

Αφού ορίστηκε ο (απόλυτος) χρόνος, η ταχύτητα $\vec{v}_\Sigma$ και η επιτάχυνση $\vec{a}_\Sigma$ ενός σωματιδίου Σ **ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς**, υπολογίζονται από τις εκφράσεις:

$$\vec{v}_\Sigma = \frac{d\vec{r}_\Sigma}{dt},\ \vec{a}_\Sigma = \frac{d\vec{v}_\Sigma}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_\Sigma}{dt^2}$$

Η ταχύτητα του **ελεύθερου** σωματιδίου Σ1 ως προς το **αδρανειακό** σύστημα αναφοράς Oxyz είναι σταθερή: $\vec{v}_{\Sigma 1} = \dfrac{d\vec{r}_{\Sigma 1}}{dt} = \vec{v}$ και η επιτάχυνσή του ίση με το μηδέν: $\vec{a}_{\Sigma 1} = \dfrac{d\vec{v}_{\Sigma 1}}{dt} = 0$

β) Ο 2ος νόμος του Newton

Η έννοια της "δύναμης που ασκείται σε σωματίδιο Σ" προσδιορίζεται μονοσήμαντα από δύο δεδομένα: α) την επιλογή του συστήματος αναφοράς (Oxyz) ως προς το οποίο μελετάμε την κίνηση του Σ, και β) τη μορφή της τροχιάς του Σ ως προς το (Oxyz).

Πώς παράγεται η ποσοτική έκφραση της δύναμης από τα δύο αυτά στοιχεία;

Με δεδομένη την αναλυτική έκφραση της τροχιάς του Σ (σχήμα 2) ως προς ένα σύστημα αναφοράς (όχι κατ' ανάγκη αδρανειακό) ορίζουμε τη **δύναμη** που ασκείται στο Σ από τη σχέση:

$$\vec{F}_\Sigma = m_\Sigma \vec{a}_\Sigma = m_\Sigma \frac{d\vec{v}_\Sigma}{dt} = m_\Sigma \frac{d^2\vec{r}_\Sigma}{dt^2} \qquad (3)$$

Η ποσότητα m_Σ λαμβάνει θετικές τιμές. Εξαρτάται από το σωματίδιο Σ και ονομάζεται "**αδρανειακή μάζα**" του Σ. Δύο σωματίδια μπορεί να έχουν ίδιες ή διαφορετικές αδρανειακές μάζες.

Η εξίσωση 3 έχει μια διπλή ανάγνωση. Η πρώτη είναι: "***Αν γνωρίζουμε την αναλυτική έκφραση της τροχιάς του σωματιδίου Σ ως προς ένα σύστημα αναφοράς, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη που ασκείται στο Σ***". Σύμφωνα με την ανάγνωση αυτή, στο πλαίσιο μιας σειράς πειραμάτων που στοχεύουν στη μελέτη ενός συγκριμένου φυσικού συστήματος, μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για τη μορφή των δυνάμεων που ασκούνται στα σωματίδια του συστήματος και να γίνουν αξιολογήσεις των μαθηματικών μοντέλων που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή του συστήματος.

Η δεύτερη ανάγνωση: "***Κάνουμε υποθέσεις για την αναλυτική μορφή των δυνάμεων που ασκούνται στα σωματίδια ενός φυσικού συστήματος και συνθέτουμε μαθηματικά μοντέλα που το περιγράφουν. Από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν από τη σχέση 3, προβλέπουμε θεωρητικά τις τροχιές των σωματιδίων του συστήματος και τις συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα των πειραμάτων μας***".

Τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σωματίδιο μπορούμε να τις κατατάξουμε σε δύο κατηγορίες: α) στις "αδρανειακές" δυνάμεις, που οφείλονται αποκλειστικά στην επιλογή του συστήματος αναφοράς και β) στις δυνάμεις "αλληλεπίδρασης" που οφείλονται στην δομή του φυσικού συστήματος μέρος του οποίου είναι και το κινούμενο σωματίδιο. Σύμφωνα με τον 1ο και τον 2ο νόμο, η αδρανειακή δύναμη που δέχεται ένα ελεύθερο σωματίδιο ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι ίση με το μηδέν.

Η δύναμη είναι ένα αθροιστικό, διανυσματικό μέγεθος. Αν ονομάσουμε $\vec{F}_\Sigma^{\alpha\lambda\lambda\eta\lambda.}$ τη δύναμη που οφείλεται στις αλληλεπιδράσεις του Σ με τα υπόλοιπα μέρη του φυσικού συστήματος και $\vec{F}_\Sigma^{\alpha\delta\rho.}$ την αδρανειακή δύναμη που προσδιορίζεται από την επιλογή του συστήματος αναφοράς, τότε η εξίσωση 3 γράφεται:

$\vec{F}_{\Sigma}^{\alpha\lambda\lambda\eta\lambda.} + \vec{F}_{\Sigma}^{\alpha\delta\rho..} = m_{\Sigma}\vec{a}_{\Sigma}$ (4α)

Αν το Σ αλληλεπιδρά με άλλα σωματίδια ή μέρη του φυσικού συστήματος με επιμέρους δυνάμεις F_{Σ}^{ν}, $\nu = 1,2,...$ τότε ισχύει: $\vec{F}_{\Sigma}^{\alpha\lambda\lambda\eta\lambda.} = \sum_{\nu}\vec{F}_{\Sigma}^{\nu}$ και η 4α γράφεται:

$\sum_{\nu}\vec{F}_{\Sigma}^{\nu} + \vec{F}_{\Sigma}^{\alpha\delta\rho..} = m_{\Sigma}\vec{a}_{\Sigma}$ (4β)

Εφόσον έχουμε επιλέξει για την περιγραφή του συστήματος ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η 4β λαμβάνει την απλούστερη μορφή:

$\sum_{\nu}\vec{F}_{\Sigma}^{\nu} = m_{\Sigma}\vec{a}_{\Sigma}$ (4γ)

Πώς μετράμε την αδρανειακή μάζα ενός σωματιδίου Σ;

Για τη μέτρηση της αδρανειακής μάζας ενός σωματιδίου χρειαζόμαστε τον 3ο νόμο του Newton.

γ) Ο 3ος νόμος του Newton

Δύο σωματίδια Σ1 και Σ2 αλληλεπιδρούν και κινούνται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα Oxyz. Τότε, σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Newton, ανεξάρτητα των αδρανειακών μαζών ή οποιωνδήποτε άλλων φυσικών χαρακτηριστικών των σωματιδίων και του φυσικού συστήματος που ανήκουν, οι δυνάμεις που ασκεί το ένα σωματίδιο στο άλλο κάθε χρονική στιγμή t, είναι ομοαξονικές και αντίθετες (σχήμα 3):

$\vec{F}_{12}(t) = -\vec{F}_{21}(t)$ (5)

Σύγκριση και μέτρηση των αδρανειακών μαζών των σωματιδίων

Υποθέτουμε ότι το σύστημα των σωματιδίων Σ1 και Σ2 είναι **απομονωμένο**, δηλαδή στα Σ1 και Σ2 δεν ενεργούν άλλες δυνάμεις πλην εκείνων που -ενδεχομένως- ασκεί το ένα στο άλλο.

Πώς θα αποφανθούμε αν τα σωματίδια αλληλεπιδρούν;

Σύμφωνα με τον 1ο και 2ο νόμο, η απάντηση στην ερώτηση αυτή θα προκύψει από τις παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς τους, με παράμετρο τον χρόνο *t*, ως προς το αδρανειακό σύστημα Oxyz. Αν τα σωματίδια κινούνται με σταθερές ταχύτητες, τότε οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης είναι μηδενικές. Αν, αντίθετα, διαπιστώσουμε ότι οι τροχιές τους δεν μπορούν να περιγραφούν με τις αναλυτικές εξισώσεις της ευθύγραμμης και ομαλής κίνησης (εξισώσεις 2), τότε οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης είναι διαφορετικές από το μηδέν, και σύμφωνα με τον 3ο νόμο, ικανοποιούν τη συνθήκη 5. Εφόσον οι δυνάμεις $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}$ είναι οι μοναδικές δυνάμεις που ασκούνται στα Σ1 και Σ2, από τον 2ο και τον 3ο νόμο προκύπτει η σχέση:

$m_1\vec{a}_1(t) = -m_2\vec{a}_2(t)$ (6α)

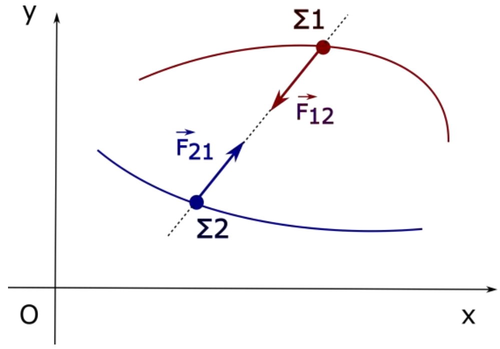
...όπου m_1, m_2 συμβολίζουν τις αδρανειακές μάζες των Σ1 και Σ2, και $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ τις επιταχύνσεις τους.

Από την 6α συνεπάγεται η ισότητα των μέτρων των δύο μερών:

$m_1\left\|\vec{a}_1(t)\right\| = m_2\left\|\vec{a}_2(t)\right\|$

Ή:

$m_2 = m_1\dfrac{\left\|\vec{a}_1(t)\right\|}{\left\|\vec{a}_2(t)\right\|}$ (6β)



Σχήμα 3

Οι ποσότητες $\left\|\vec{a}_1(t)\right\|, \left\|\vec{a}_2(t)\right\|$ είναι "γεωμετρικές": μπορούν να μετρηθούν, εφόσον γνωρίζουμε τις τροχιές των σωματιδίων Σ1 και Σ2 και έχουμε ορίσει ένα χρονόμετρο (βλέπε σελίδα 2). Από την άλλη, οι αδρανειακές μάζες m_1, m_2, είναι σταθερές που χαρακτηρίζουν τα σωματίδια. Είναι ανεξάρτητες της τροχιάς τους και του συστήματος αναφοράς που έχουμε επιλέξει. Η σχέση 6β μας δείχνει πώς μπορούμε να συγκρίνουμε τις αδρανειακές μάζες των σωματιδίων Σ1 και Σ2, με τη βοήθεια των δύο γεωμετρικών και μετρήσιμων μεγεθών $\left\|\vec{a}_1(t)\right\|, \left\|\vec{a}_2(t)\right\|$,

επομένως και το πώς μπορούμε να υπολογίσουμε πειραματικά την αδρανειακή μάζα οποιουδήποτε σωματιδίου: Διαλέγουμε ένα σωματίδιο (για παράδειγμα το Σ1) και το ονομάζουμε "**πρότυπο σωματίδιο**". Συναινούμε ότι η αδρανειακή μάζα του πρότυπου σωματιδίου είναι ίση με μια μονάδα μάζας (για παράδειγμα: $m_1=1Kg$). Τότε, η μέτρηση της αδρανειακής μάζας ενός οποιουδήποτε άλλου σωματιδίου Σ2, υπολογίζεται μέσω της αλληλεπίδρασής του με το Σ1 (ή με οποιοδήποτε άλλο σωματίδιο γνωστής μάζας) μετρώντας τις επιταχύνσεις τους ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς και εφαρμόζοντας τη σχέση 6β.
Οι μετρήσεις των επιταχύνσεων μπορούν να πραγματοποιηθούν με την καταγραφή της θέσης κάθε σωματιδίου ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, σε μια ακολουθία χρονικών στιγμών. Με βάση τα δεδομένα αυτά, υπολογίζουμε προσεγγιστικά την ταχύτητα και την επιτάχυνση στις χρονικές στιγμές της ακολουθίας που έχουμε επιλέξει, εφαρμόζοντας τους αντίστοιχους ορισμούς.

Μετασχηματισμοί του Galileo

Πρόταση: Ας υποθέσουμε ότι τα O'x'y'z' και Oxyz είναι αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Τότε η αρχή O', καθώς και κάθε σταθερό σημείο P' του O'x'y'z' κινούνται ως προς το Oxyz με την ίδια, σταθερή ταχύτητα.
Απόδειξη
Έστω Σ1 ελεύθερο σωματίδιο. Αφού τα O'x'y'z' και Oxyz είναι αδρανειακά το Σ1 κινείται με σταθερές ταχύτητες $\vec{v}_{\Sigma 1}$, $\vec{v}'_{\Sigma 1}$ ως προς το Oxyz και το O'x'y'z', αντίστοιχα. Σύμφωνα με το σχήμα 1, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\overrightarrow{O\Sigma 1} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'\Sigma 1} \Rightarrow \vec{v}_{\Sigma 1} = \vec{V}_{O'} + \vec{v}'_{\Sigma 1} \Rightarrow \vec{V}_{O'} = \vec{v}_{\Sigma 1} - \vec{v}'_{\Sigma 1} = \text{σταθερή}$$

Έστω P' σταθερό σημείο του O'x'y'z': $v'_{P'} = \dfrac{d\overrightarrow{O'P'}}{dt} = 0$

Η ταχύτητα του P' ως προς το Oxyz υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P'} \Rightarrow \vec{v}_{P'} = \vec{V}_{O'} + \vec{v}'_{P'} = \vec{V}_{O'} \qquad \text{QED}$$

Αντίστροφα: Έστω τυχαίο σύστημα αναφοράς O'x'y'z' και αδρανειακό σύστημα Oxyz. Αν **κάθε σταθερό** σημείο P' του O'x'y'z' κινείται με την ίδια σταθερή ταχύτητα $\vec{v}'$ ως προς το Oxyz, τότε το O'x'y'z' είναι αδρανειακό.
Απόδειξη
Έστω σωματίδιο Σ' τοποθετημένο στο σταθερό σημείο X' του O'x'y'z', όπου $\overrightarrow{O'X'} = \hat{x}'$ το μοναδιαίο διάνυσμα του O'x'y'z πάνω στον άξονα O'x'. Σύμφωνα με την υπόθεση της πρότασης, το Σ' και το O' κινούνται με την ίδια, σταθερή ταχύτητα $\vec{v}'$ ως προς το αδρανειακό σύστημα Oxyz. Ισχύει:

$$\overrightarrow{O'\Sigma'} = \overrightarrow{O\Sigma'} - \overrightarrow{OO'} \Rightarrow \hat{x}' = \overrightarrow{O\Sigma'} - \overrightarrow{OO'} \Rightarrow \frac{d\hat{x}'}{dt} = \vec{v}' - \vec{v}' = 0 \qquad (7α)$$

Συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα βάσης του O'x'y'z δεν μεταβάλλονται κατά την κίνηση του ως προς το Oxyz. Για ευκολία και χωρίς να επηρεάσουμε τη γενική περίπτωση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι άξονες των O'x'y'z και Oxyz διατηρούνται παράλληλοι (σχήμα 1).
Έστω Σ ελεύθερο σωματίδιο που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_\Sigma$ ως προς το Oxyz. Σύμφωνα με το σχήμα 2, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\overrightarrow{O'\Sigma} = \overrightarrow{O\Sigma} - \overrightarrow{OO'}, \ \hat{x}'x'_\Sigma + \hat{y}'y'_\Sigma = \overrightarrow{O\Sigma} - \overrightarrow{OO'}$$

$$\frac{d\hat{x}'}{dt}x'_\Sigma + \hat{x}'\frac{dx'_\Sigma}{dt} + \frac{d\hat{y}'}{dt}y'_\Sigma + \hat{y}'\frac{dy'_\Sigma}{dt} = \vec{v}_\Sigma - \vec{v}'$$

...και σύμφωνα με την 7α:

$$\hat{x}'\frac{dx'_\Sigma}{dt} + \hat{y}'\frac{dy'_\Sigma}{dt} = \vec{v}_\Sigma - \vec{v}' \Rightarrow \vec{v}'_\Sigma = \vec{v}_\Sigma - \vec{v}' = \text{σταθερή} \qquad (7β)$$

Από την 7β συνεπάγεται ότι το ελεύθερο σωματίδιο Σ κινείται με σταθερή ταχύτητά ως προς το O'x'y'z'. Επομένως, το O'x'y'z' είναι αδρανειακό. QED

Γενικά: Αν το Oxyz είναι αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα O'x'y'z' κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς αυτό.

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο Σ που κινείται ως προς το αδρανειακό σύστημα Oxyz σε μια τροχιά που προσδιορίζεται από παραμετρικές εξισώσεις:

$x = x_{\Sigma}(t)$, $y = y_{\Sigma}(t)$, $z = z_{\Sigma}(t)$

Πώς μετασχηματίζονται οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς του Σ ως προς ένα άλλο αδρανειακό σύστημα O'x'y'z';

Σύμφωνα με το σχήμα 2, η αναλυτική έκφραση της τροχιάς του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα O'x'y'z' δίδεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x'_{\Sigma} &= x_{\Sigma}(t) - V_{O'x}t \\ y'_{\Sigma} &= y_{\Sigma}(t) - V_{O'y}t \qquad (7) \\ z'_{\Sigma} &= z_{\Sigma}(t) - V_{O'z}t \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός 7 συνδέει τις συντεταγμένες ενός κινούμενου σωματιδίου Σ ως προς δύο αδρανειακά συστήματα. Είναι γνωστός ως "**μετασχηματισμός του Γαλιλαίου**".

Πεδία δυνάμεων

Ένα σύνολο σωματιδίων, κινείται ως προς αδρανειακό σύστημα Oxyz. Η κίνηση κάθε σωματιδίου προσδιορίζεται από την αδρανειακή μάζα του και τη δύναμη που ασκείται σε αυτό. Αποδίδουμε στο χώρο και στα σωματίδια δύο αλληλένδετες ιδιότητες:

α) Θεωρούμε ότι ο Ευκλείδειος χώρος εντός του οποίου κινούνται τα σωματίδια είναι εφοδιασμένος με ένα **διανυσματικό πεδίο** που προσδιορίζεται σε κάθε σημείο $\vec{r}$ από τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{E}(\vec{r})$.

β) Υπάρχουν σωματίδια που είναι εφοδιασμένα με ένα φυσικό μέγεθος *q*, που συνδέεται με το πεδίο $\vec{E}(\vec{r})$: κάθε σωματίδιο που χαρακτηρίζεται από την ποσότητα *q*, δέχεται από το πεδίο δύναμη $\vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r})$.

Ένα παράδειγμα πεδίου είναι το ηλεκτροστατικό πεδίο. Τα σωματίδια που δέχονται δύναμη όταν βρίσκονται μέσα σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο λέγονται 'φορτισμένα' και η αντίστοιχη ποσότητα *q* λέγεται (ηλεκτρικό) φορτίο. Αν η ηλεκτρική δύναμη που δέχεται ένα φορτισμένο σωματίδιο έχει την ίδια κατεύθυνση με το πεδίο, τότε το φορτίο του σωματιδίου είναι θετικό. Αν έχει αντίθετη κατεύθυνση, τότε το φορτίο είναι αρνητικό.

Πώς μετράμε την ποσότητα q που συνδέεται με το πεδίο $\vec{E}(\vec{r})$;

Ας θεωρήσουμε ένα φορτισμένο σωματίδιο Σ1 μάζας m_1 που συναινούμε ότι το φορτίο του *e* ισούται με μια μονάδα φορτίου (για παράδειγμα ένας πυρήνας υδρογόνου). Τοποθετούμε το Σ1 στη θέση $\vec{r}$ του ηλεκτροστατικού πεδίου, οπότε δέχεται δύναμη $\vec{F}_1(\vec{r}) = e\vec{E}(\vec{r})$ και αποκτά επιτάχυνση $\vec{a}_1(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_1(\vec{r})}{m_1}$. Επομένως το ηλεκτροστατικό πεδίο στη θέση $\vec{r}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{m_1}{e}\vec{a}_1(\vec{r}) \qquad (8\alpha)$$

Ένα άλλο σωματίδιο Σ, αδρανειακής μάζας *m* και φορτίου *q*, τοποθετείται στην ίδια θέση του ίδιου πεδίου. Αποκτά επιτάχυνση που δίδεται από τη σχέση:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{q}{m}\vec{E}(\vec{r}) \qquad (8\beta)$$

Από τις 8α και 8β, προκύπτει η σχέση:

$$|q| = e \cdot \frac{m}{m_1}\frac{\|\vec{a}(\vec{r})\|}{\|\vec{a}_1(\vec{r})\|} \qquad (8\gamma)$$

Στο δεξί μέρος της 8γ οι ποσότητες που εμφανίζονται είναι μετρήσιμα μεγέθη, ή έχουν γνωστή τιμή, όπως το *e*. Επομένως η 8γ μας παρέχει έναν τρόπο πειραματικού υπολογισμού του φορτίου του σωματιδίου Σ.

Το πεδίο βαρύτητας: Ένα πεδίο ιδιαίτερης μορφής - Το αίτημα του Galileo

Το πεδίο βαρύτητας της Γης ορίζεται ως το πεδίο των δυνάμεων που ασκούνται από τη Γη σε κάθε άλλο σώμα: η Γη έλκει κάθε σώμα προς το κέντρο της. Ο Ήλιος, η Σελήνη και κάθε άλλο σώμα είναι πηγή ενός βαρυτικού πεδίου.
Σε κάθε περίπτωση, το πεδίο βαρύτητας προσδιορίζεται από μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{g}(\vec{r})$. Η φυσική ποσότητα που πρέπει να χαρακτηρίζει ένα σωματίδιο για να δεχθεί βαρυτική δύναμη όταν τοποθετηθεί στο σημείο $\vec{r}$ του βαρυτικού πεδίου, ονομάζεται 'βαρυτική μάζα' και συμβολίζεται με το m_g. Έτσι, κατ' αντιστοιχία με το ηλεκτροστατικό πεδίο, ένα σωματίδιο με αδρανειακή μάζα m και βαρυτική μάζα m_g, όταν τοποθετηθεί στη θέση $\vec{r}$ του πεδίου, δέχεται από αυτό δύναμη:

$$\vec{F}_g(\vec{r}) = m_g \vec{g}(\vec{r}) \qquad (9α)$$

...και αποκτά επιτάχυνση:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{m_g}{m}\vec{g}(\vec{r}) \qquad (9)$$

Το βαρυτικό πεδίο παρουσιάζει τρεις θεμελιώδεις διαφορές με το ηλεκτροστατικό πεδίο:
α) Ενώ το ηλεκτροστατικό πεδίο ασκεί δυνάμεις μόνο στα φορτισμένα σωματίδια, το βαρυτικό ασκεί δυνάμεις σε **κάθε** σωματίδιο.
β) Οι βαρυτικές δυνάμεις έχουν πάντοτε την ίδια κατεύθυνση με το βαρυτικό πεδίο. Δηλαδή η βαρυτική μάζα είναι πάντοτε θετική (αντίθετα με το ηλεκτρικό φορτίο, που μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό ή μηδέν).
γ) Ο Galileo, μετά από πολλές παρατηρήσεις και πειράματα, κατέληξε στο ακόλουθο αίτημα: "Η επιτάχυνση που αποκτά ένα σωματίδιο που τοποθετείται σε ορισμένη θέση ενός συγκεκριμένου βαρυτικού πεδίου είναι ανεξάρτητη της αδρανειακής και της βαρυτικής μάζας του", ή αλλιώς: **τα σωματίδια που τοποθετούνται στο ίδιο σημείο ενός βαρυτικού πεδίου, αποκτούν όλα την ίδια επιτάχυνση**.
Η πρόταση (γ) δεν μπορεί να προκύψει από τους νόμους του Newton. Αποτελεί έναν **εμπειρικό, (ή φαινομενολογικό) νόμο**, επομένως έχει το χαρακτήρα του "**αιτήματος**". Μπορεί, ωστόσο, να αιτιολογηθεί στο πλαίσιο μιας ευρύτερης θεωρίας: της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας του Einstein.

Εφόσον αληθεύει η πρόταση (γ), από τη σχέση 9 συνεπάγεται ότι ο λόγος $\frac{m_g}{m}$ είναι ίδιος για κάθε σωματίδιο: $\frac{m_g}{m} = \lambda = σταθερό$. Με κατάλληλη επιλογή του συστήματος μονάδων, μπορούμε να θέσουμε $\lambda=1$ και να ταυτίσουμε την τιμή της βαρυτικής μάζας με την τιμή της αδρανειακής μάζας, για κάθε σωματίδιο:

$$m_g = m \text{ για κάθε σωματίδιο Σ} \qquad (10)$$

Αξίζει να επισημάνουμε ότι το αίτημα του Galileo ισχύει μόνο για το πεδίο βαρύτητας. Ως αντιπαράδειγμα, αν τοποθετήσουμε σε μια ορισμένη θέση ενός ηλεκτροστατικού πεδίου δύο φορτισμένα σωματίδια Σ1 και Σ2, τότε θα αποκτήσουν επιταχύνσεις που εξαρτώνται από την τιμή του φορτίου κάθε σωματιδίου και την αδρανειακή μάζα του: $\vec{a}_1(\vec{r}) = \frac{q_1}{m_1}\vec{E}(\vec{r})$ και $\vec{a}_2(\vec{r}) = \frac{q_2}{m_2}\vec{E}(\vec{r})$

Οι λόγοι $\frac{q_1}{m_1}$, $\frac{q_2}{m_2}$, αντίθετα με την περίπτωση του βαρυτικού πεδίου, δεν ικανοποιούν κάποια θεωρητική ή εμπειρική συνθήκη, και μπορούν να έχουν οποιεσδήποτε διαφορετικές τιμές.

Βιβλιογραφία

1. Introduction to Classical Mechanics. David Morin. Cambridge University Press 2007
2. Classical Mechanics. Goldstein, Poole and Safko. Addison Wesley 3d edition
3. Advanced Calculus. L.H. Loomis, S. Sternberg. Jones and Bartlett Publishers, revised edition 1990
4. Advanced Calculus. R.C. Buck. McGraw-Hill Inc. 3d edition 1978