Ελαστική κρούση δύο σωματιδίων: το Νευτώνειο μοντέλο

Κώστας Παπαμιχάλης Δρ. Θεωρητικής Φυσικής

Σύνοψη

Σημειακό σωματίδιο Σ2 μάζας m_2 βρίσκεται στην αρχή Ο αδρανειακού συστήματος Oxyz. Παρόμοιο σωματίδιο Σ1 μάζας m_1 κινείται κατά μήκος άξονα ε που είναι παράλληλος με τον x'x και απέχει από αυτόν απόσταση b (σχήμα 1), με ταχύτητα: $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$, $v_0 > 0$

Όταν η απόσταση των Σ1 και Σ2 γίνει ίση με μια δεδομένη τιμή s, μεταξύ των σωματιδίων αναπτύσσονται ισχυρές απωστικές δυνάμεις για απειροστό χρονικό διάστημα Δt. Τα σωματίδια αποκτούν νέες ταχύτητες που ικανοποιούν τρεις αρχές διατήρησης: της ορμής, της ενέργειας και της στροφορμής. Σε αυτή τη σύντομη εργασία, συντίθεται ένα Νευτώνειο μοντέλο που περιγράφει την κίνηση και την αλληλεπίδραση των Σ1 και Σ2. Στο πλαίσιο του μοντέλου υπολογίζονται οι ταχύτητές των Σ1 και Σ2 αμέσως μετά την αλληλεπίδρασή τους.

Βασικές έννοιες και σχέσεις:

Νευτώνειο μοντέλο – Αδρανειακό σύστημα αναφοράς – Σύστημα σωματιδίων – 2ος και τρίτος νόμος του Newton – Ώθηση δύναμης – Κεντρικές δυνάμεις – Ορμή συστήματος – Ενέργεια συστήματος – Στροφορμή συστήματος – Αρχή της διατήρησης της ορμής, της ενέργειας και της στροφορμής συστήματος σωματιδίων στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής – Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου – Κέντρο μάζας συστήματος σωματιδίων – Αδρανειακό σύστημα κέντρου μάζας

Γενική περιγραφή και ανάλυση του μοντέλου

Οι δυνάμεις $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ που αναπτύσσονται μεταξύ των σωματιδίων ικανοποιούν τον 3ο νόμο του Newton και ο φορέας τους ταυτίζεται με την ευθεία που ορίζεται από τα δύο σωματίδια (σχήμα 1):

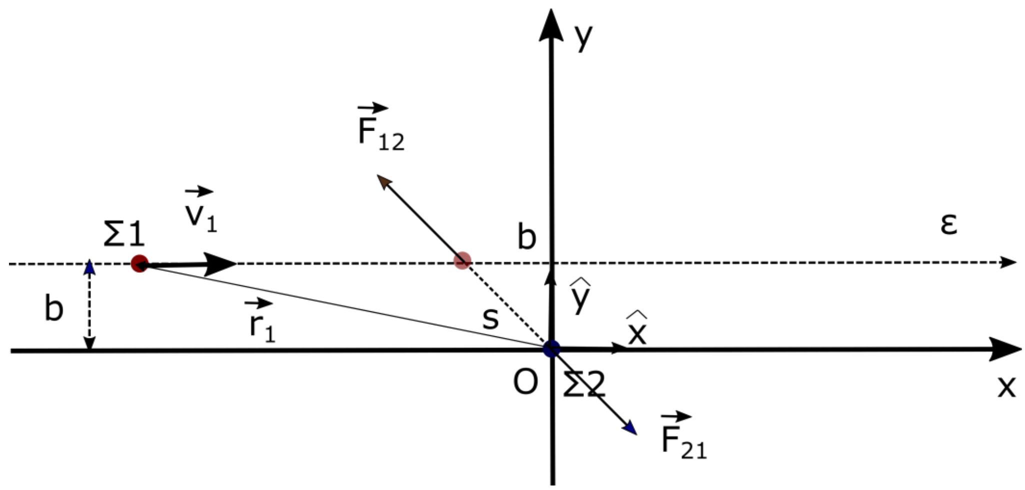
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = F \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} \tag{1}$$

Το μέτρο της $|F|$ είναι διαφορετικό από το μηδέν μόνον για ένα απειροστό χρονικό διάστημα $(t_{\text{int}}, t_{\text{int}} + \Delta t)$, $\Delta t \to 0$, όπου t_{int} η χρονική στιγμή που απόσταση των Σ1 και Σ2 λαμβάνει την τιμή s. Στο διάστημα αυτό, το μέτρο των δυνάμεων αλληλεπίδρασης τείνει στο άπειρο, έτσι ώστε η ώθηση κάθε δύναμης να είναι πεπερασμένη και ίση με τη μεταβολή της ορμής του αντίστοιχου σωματιδίου:

$$\int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_{12}(\tau)d\tau = \vec{p}_1(t+\Delta t) - \vec{p}_1(t), \quad \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_{21}(\tau)d\tau = \vec{p}_2(t+\Delta t) - \vec{p}_2(t) \tag{2}$$

Διατήρηση της ορμής

Οι κινήσεις των σωματιδίων περιγράφονται από το 2ο νόμο του Newton:



Σχήμα 1

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt}=\vec{F}_{12}\,,\; m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}=\vec{F}_{21} \text{ ή: } \frac{d\vec{p}_1}{dt}=\vec{F}_{12}\,,\; \frac{d\vec{p}_2}{dt}=\vec{F}_{21} \tag{3}$$

Με άθροιση κατά μέρη:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right)=0 \tag{4}$$

***Παρατήρηση* 1**: Η διατήρηση της ορμής προκύπτει μόνον από την απαίτηση οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης να έχουν τη μορφή δράσης-αντίδρασης. Δεν είναι απαραίτητο να είναι και κεντρικές, δηλαδή να έχουν τη μορφή 1.
***Παρατήρηση* 2**: Εφόσον: α) στην αρχική κατάσταση του συστήματος οι θέσεις και οι ταχύτητες των σωματιδίων βρίσκονται πάνω στο επίπεδο Oxy και β) οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης έχουν την μορφή 1, τότε από το 2ο νόμο του Newton προκύπτει ότι **η κίνηση πραγματοποιείται πάνω στο επίπεδο Oxy**.

Διατήρηση της ενέργειας
Έστω ότι στο χρονικό διάστημα $\left[t,t+dt\right]$ το Σ1 έχει μετατοπιστεί κατά $d\vec{r}_1$ και το Σ2 κατά $d\vec{r}_2$ Από τις εξισώσεις 3 προκύπτει:

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt}\cdot d\vec{r}_1=\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_1\,,\; m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}\cdot d\vec{r}_2=\vec{F}_{21}\cdot d\vec{r}_2$$

$$d\left(\frac{1}{2}m_1v_1{}^2+\frac{1}{2}m_2v_2{}^2\right)=\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_1+\vec{F}_{21}\cdot d\vec{r}_2=\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}$$

Όπου: $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$

Έστω $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ οι ταχύτητες των Σ1, Σ2 μετά την αλληλεπίδραση. Τότε, από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η:

$$\left(\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2\right)=\int_{t_{πριν}}^{t_{μετά}}\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}$$

Προϋπόθεση διατήρησης της ενέργειας είναι η ικανοποίηση της συνθήκης:

$$\int_{t_{πριν}}^{t_{μετά}}\vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}=0$$

…που σημαίνει ότι το συνολικό έργο της $\vec{F}_{12}$ κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης είναι ίσο με το μηδέν. Ή, αλλιώς, οι $\vec{F}_{12}$ και $\vec{F}_{21}$ είναι συντηρητικές δυνάμεις.

Διατήρηση της στροφορμής
Από το 2ο νόμο του Newton προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\,\vec{r}_1\times\vec{v}_1+m_2\,\vec{r}_2\times\vec{v}_2\right)=\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\times\vec{F}_{12}$$

Η μεταβολή της στροφορμής $\vec{J}=m_1\,\vec{r}_1\times\vec{v}_1+m_2\,\vec{r}_2\times\vec{v}_2$ είναι ίση με το μηδέν, εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\times\vec{F}_{12}=0 \tag{5α}$$

Εφόσον οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης έχουν τη μορφή 1, η 5α ικανοποιείται και η στροφορμή είναι διατηρήσιμο μέγεθος.
Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ως προς το αδρανειακό σύστημα Oxyz, η τιμή της στροφορμής των Σ1 και Σ2 δίδεται από τη σχέση:

$$\vec{J}=m_1\,\vec{r}_1(0)\times\vec{v}_1(0)+m_2\,\vec{r}_2(0)\times\vec{v}_2(0)=m_1\left(-a\hat{x}+b\hat{y}\right)\times\left(v_0\hat{x}\right)+0=-m_1bv_0\hat{z} \tag{5β}$$

Η $\vec{J}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο Oxy της κίνησης των Σ1 και Σ2.

Περιγραφή της κίνησης και της αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων ως προς το σύστημα κέντρου μάζας τους (ΣΚΜ)
Υποθέτουμε ότι οι άξονες του ΣΚΜ διατηρούνται παράλληλοι με τους αντίστοιχους του Oxyz. Οι συντεταγμένες της αρχής του K, ως προς το Oxyz ορίζονται από τη σχέση:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right)$$

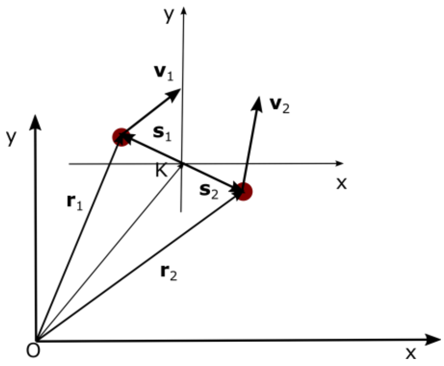
Η ταχύτητα $\vec{V}_K$ του K ως προς το Oxyz είναι:

$$\vec{V}_K = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OK} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)$$

Οι θέσεις και οι ταχύτητες των σωματιδίων Σ1 και Σ2, ως προς τα δύο αδρανειακά συστήματα Oxyz και Kxyz σχετίζονται μέσω των εξισώσεων (σχήμα 2):

$$\vec{s}_1 = \vec{r}_1 - \overrightarrow{OK} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)$$
$$\vec{s}_2 = \vec{r}_2 - \overrightarrow{OK} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \qquad (6α)$$

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_K = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$
$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}_K = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) \qquad (6β)$$

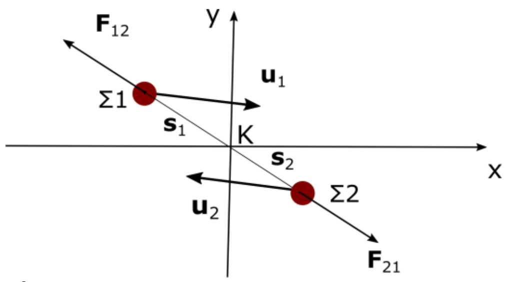


Σχήμα 2

Οι ορμές $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ των Σ1, Σ2 ως προς το Kxyz είναι αντίθετες:

$$\vec{q}_1 = -\vec{q}_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)$$

Η ολική ορμή του συστήματος ισούται με το μηδέν.



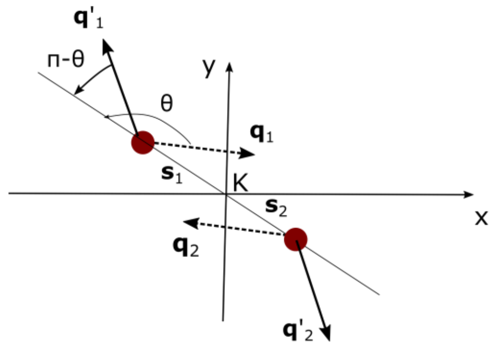
Σχήμα 3

Ο 2ος νόμος του Newton για κάθε σωματίδιο, στο Kxyz γράφεται:

$$m_1\frac{d\vec{u}_1}{dt} = \vec{F}_{12}\,,\; m_2\frac{d\vec{u}_2}{dt} = \vec{F}_{21}$$

Η ταχύτητα του K ως προς το Oxyz είναι σταθερή:

$$\frac{d}{dt}\vec{V}_K = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}\right) =$$
$$= \frac{1}{m_1 + m_2}\left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}\right) = 0$$



Σχήμα 4

Εφαρμογή των αρχών διατήρησης ως προς το Kxyz (ΣΚΜ), αμέσως μετά την αλληλεπίδραση των σωματιδίων (σχήματα 2,3,4)

Διατήρηση της ορμής:

$$\vec{q}\,'_1 + \vec{q}\,'_2 = 0\,,\; \vec{q}\,'_1 = -\vec{q}\,'_2 \qquad (7α)$$

Διατήρηση της ενέργειας:

$$\frac{q'^2_1}{2m_1} + \frac{q'^2_2}{2m_2} = \frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2}$$

$$q'^2_1\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = q_1^2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$q'^2_1 = q'^2_2 = q_1^2 = q_2^2 \qquad (7β)$$

Διατήρηση της στροφορμής:

$$\vec{s}_1 \times \vec{q}_1 + \vec{s}_2 \times \vec{q}_2 = \vec{s}_1 \times \vec{q}\,'_1 + \vec{s}_2 \times \vec{q}\,'_2 \qquad (7γ)$$

$\left(\vec{s}_1 - \vec{s}_2\right) \times \vec{q}_1 = \left(\vec{s}_1 - \vec{s}_2\right) \times \vec{q}\,'_1$

$\left\|\vec{s}_1 - \vec{s}_2\right\| \cdot q_1 \sin\theta = \left\|\vec{s}_1 - \vec{s}_2\right\| \cdot q'_1 \sin\theta'$

Από την τελευταία σχέση και την 7α προκύπτει ότι $\theta' = \theta$ ή $\theta' = \pi - \theta$. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί στην κατάσταση πριν την αλληλεπίδραση. Έπεται ότι η γωνία που σχηματίζει η ορμή του Σ1 -και αντίστοιχα του Σ2- με το $\vec{s} = \vec{s}_1 - \vec{s}_2$ αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με *π-θ* (σχήμα 4).

Υπολογισμός των ταχυτήτων των σωματιδίων αμέσως μετά την κρούση, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος

Από τα τρία θεωρήματα διατήρησης μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες των σωματιδίων αμέσως μετά την κρούση, ως προς το Kxyz, άρα και ως προς το Oxyz. Αφού η κίνηση πραγματοποιείται στο επίπεδο Oxy, οι άγνωστες ποσότητες είναι τέσσερεις: οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας του Σ1 και οι αντίστοιχες του Σ2. Οι εξισώσεις που διαθέτουμε είναι επίσης 4: δύο από τη διατήρηση της ορμής, μια από τη διατήρηση της ενέργειας και μια από τη διατήρηση της στροφορμής.

Εφαρμόζουμε τα παρακάτω βήματα:

α) Υπολογίζουμε τις ταχύτητες των Σ1 και Σ2 πριν την κρούση ως προς το Kxyz.

β) Υπολογίζουμε τις ταχύτητες αμέσως μετά την κρούση ως προς το Kxyz.

γ) Υπολογίζουμε τις ταχύτητες ως προς το Oxyz.

Βήμα α

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ των Σ1 και Σ2 ως προς το Oxyz, όπως υπολογίζεται λίγο πριν την κρούση είναι (σχήμα 1):

$$\vec{V}_K = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \hat{x}$$

Η ταχύτητα του Κ διατηρείται σταθερή πριν και μετά την κρούση:

$$\frac{d}{dt}\vec{V}_K = \frac{1}{m_1 + m_2}\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) = 0$$

Από τις 6β προκύπτουν οι ταχύτητες των Σ1, Σ2 ως προς το Kxyz πριν την κρούση:

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_K = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}\hat{x} \tag{8α}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{V}_K = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = -\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}\hat{x} \tag{8β}$$

Οι ορμές $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ των Σ1, Σ2 ως προς το Kxyz πριν την κρούση:

$$\vec{q}_1 = -\vec{q}_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0 \hat{x} \tag{8γ}$$

Η ολική ορμή του συστήματος ως προς το Kxyz ισούται με το μηδέν:

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0 \tag{8δ}$$

Βήμα β

Από τις σχέσεις 7α,β και 8γ,δ συνεπάγεται ότι το μέτρο της ορμής κάθε σωματιδίου ως προς το Kxyz αμέσως μετά την κρούση υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$q'_1 = q'_2 = q_1 = q_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0$$

Επομένως, τα μέτρα των ταχυτήτων μετά την κρούση είναι:

$$u'_1 = \frac{q'_1}{m_1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_0 \,,\; u'_2 = \frac{q'_2}{m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \tag{9}$$

Από τη διατήρηση της στροφορμής και της ορμής του συστήματος, προκύπτουν διαδοχικά, οι εξισώσεις (σχήμα 5):

$$\vec{s}_1 \times \vec{q}_1 + \vec{s}_2 \times \vec{q}_2 = \vec{s}_1 \times \vec{q}\,'_1 + \vec{s}_2 \times \vec{q}\,'_2$$

$$\left(\vec{s}_1 - \vec{s}_2\right) \times \vec{q}_1 = \left(\vec{s}_1 - \vec{s}_2\right) \times \vec{q}\,'_1$$

$\vec{s} \times \vec{q}_1 = \vec{s} \times \vec{q}\,'_1$ όπου: $\vec{s} = -s\cos\varphi\hat{x} + s\sin\varphi\hat{y}$

$$-sq_1 \sin\varphi = -sq_1\left(\cos\varphi\sin\theta' + \sin\varphi\cos\theta'\right)$$

Όπου (σχήμα 1 και 5):

$$\sin\varphi = \frac{b}{s} \tag{10}$$

Τελικά, βρίσκουμε ότι η θ' είναι λύση της εξίσωσης:

$$\sin\left(\varphi + \theta'\right) = \sin\varphi \tag{11}$$

Οι τιμές της θ' που ικανοποιούν την 11 στο διάστημα $\left[0, 2\pi\right)$ είναι:

$\theta'=0$, που αντιστοιχεί στην προ της κρούση κατάσταση, και:

$\varphi + \theta' = \pi - \varphi$, $\theta' = \pi - 2\varphi$ (σχήμα 5)

Ώστε, οι ορμές των Σ1, Σ2 μετά την κρούση ως προς το Kxyz, δίδονται από τις αναλυτικές εκφράσεις:

$$\vec{q}\,'_1 = q'_1\left(\cos\left(\pi - 2\varphi\right)\hat{x} + \sin\left(\pi - 2\varphi\right)\hat{y}\right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0 \left(-\cos(2\varphi)\hat{x} + \sin(2\varphi)\hat{y}\right)$$

$$\vec{q}\,'_2 = -\vec{q}\,'_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_0 \left(\cos(2\varphi)\hat{x} - \sin(2\varphi)\hat{y}\right)$$

Οι αντίστοιχες ταχύτητες ως προς το Kxyz, μετά την κρούση είναι:

$$\vec{u}\,'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_0 \left(-\cos(2\varphi)\hat{x} + \sin(2\varphi)\hat{y}\right) \tag{12α}$$

$$\vec{u}\,'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \left(\cos(2\varphi)\hat{x} - \sin(2\varphi)\hat{y}\right) \tag{12β}$$

Βήμα γ

Οι ταχύτητες των Σ1, Σ2 μετά την κρούση ως προς το Oxyz, υπολογίζονται από τις 8α,β σε συνδυασμό με τις 12α,β:

$$\vec{v}\,'_1 = \vec{u}\,'_1 + \vec{V}_K = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_0 \left(\left(-\cos(2\varphi) + \frac{m_1}{m_2}\right)\hat{x} + \sin(2\varphi)\hat{y}\right) \tag{13α}$$

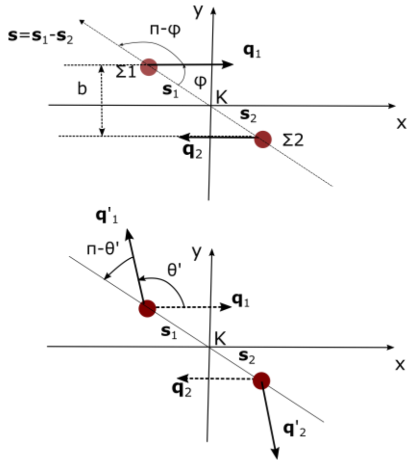
$$\vec{v}\,'_2 = \vec{u}\,'_2 + \vec{V}_K = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \left(\left(\cos(2\varphi) + 1\right)\hat{x} - \sin(2\varphi)\hat{y}\right) \tag{13β}$$

…όπου η γωνία φ υπολογίζεται στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ από τη σχέση 10.

Το μέτρο κάθε ταχύτητας δίνονται από τις εξισώσεις:

$$v'_1 = \frac{m_2 v_0}{m_1 + m_2}\sqrt{\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 4\frac{m_1}{m_2}\sin^2\varphi} \tag{14α}$$

$$v'_2 = \frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2}\left|\cos\varphi\right| \tag{14β}$$



Σχήμα 5

Η γωνίες θ'_1, θ'_2 που σχηματίζουν οι $\vec{v}\,'_1$, $\vec{v}\,'_2$ με τον άξονα Ox ικανοποιούν, αντίστοιχα, τις εξισώσεις:

$$\tan\theta'_1 = \frac{\sin(2\varphi)}{-\cos(2\varphi) + \frac{m_1}{m_2}} \quad (15α)$$

$$\tan\theta'_2 = -\frac{\sin(2\varphi)}{\cos(2\varphi) + 1} \quad (15β)$$

Η γωνία θ′ που σχηματίζουν οι ταχύτητες $\vec{v}'_1$, $\vec{v}'_2$ μεταξύ τους, εκφράζεται από τη σχέση:

$$\cos\theta' = \frac{\vec{v}'_1 \cdot \vec{v}'_2}{v'_1 v'_2} = -\frac{\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)\cos\varphi}{\sqrt{\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)^2 + 4\frac{m_1}{m_2}\sin^2\varphi}}, \ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (16)$$

Επισημάνσεις

Α) Στην περίπτωση που τα σωματίδια έχουν ίσες μάζες, από την 16 έπεται ότι $\cos\theta' = 0$. Η γωνία που σχηματίζουν οι ταχύτητές των Σ1, Σ2 μετά την κρούση είναι πάντοτε ίση με π/2.

Β) Αν $m_1 \ll m_2$, τότε από τη 16 έπεται ότι $\cos\theta' = -\cos\varphi$ ή: $\theta' = \pi + \varphi$

Γ) Για $m_2 \ll m_1$ προκύπτει ότι: $\cos\theta' = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 + 4\sin^2\varphi}}$

Βιβλιογραφία

1. Classical Mechanics: Goldstein, Poole & Safko, Addison Wesley, 3d edition.
2. Introduction to Classical Mechanics with Problems and Solutions: David Morin Harvard University, Cambridge University Press 2008.
3. Mechanics: L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Pergamon Press 1969.