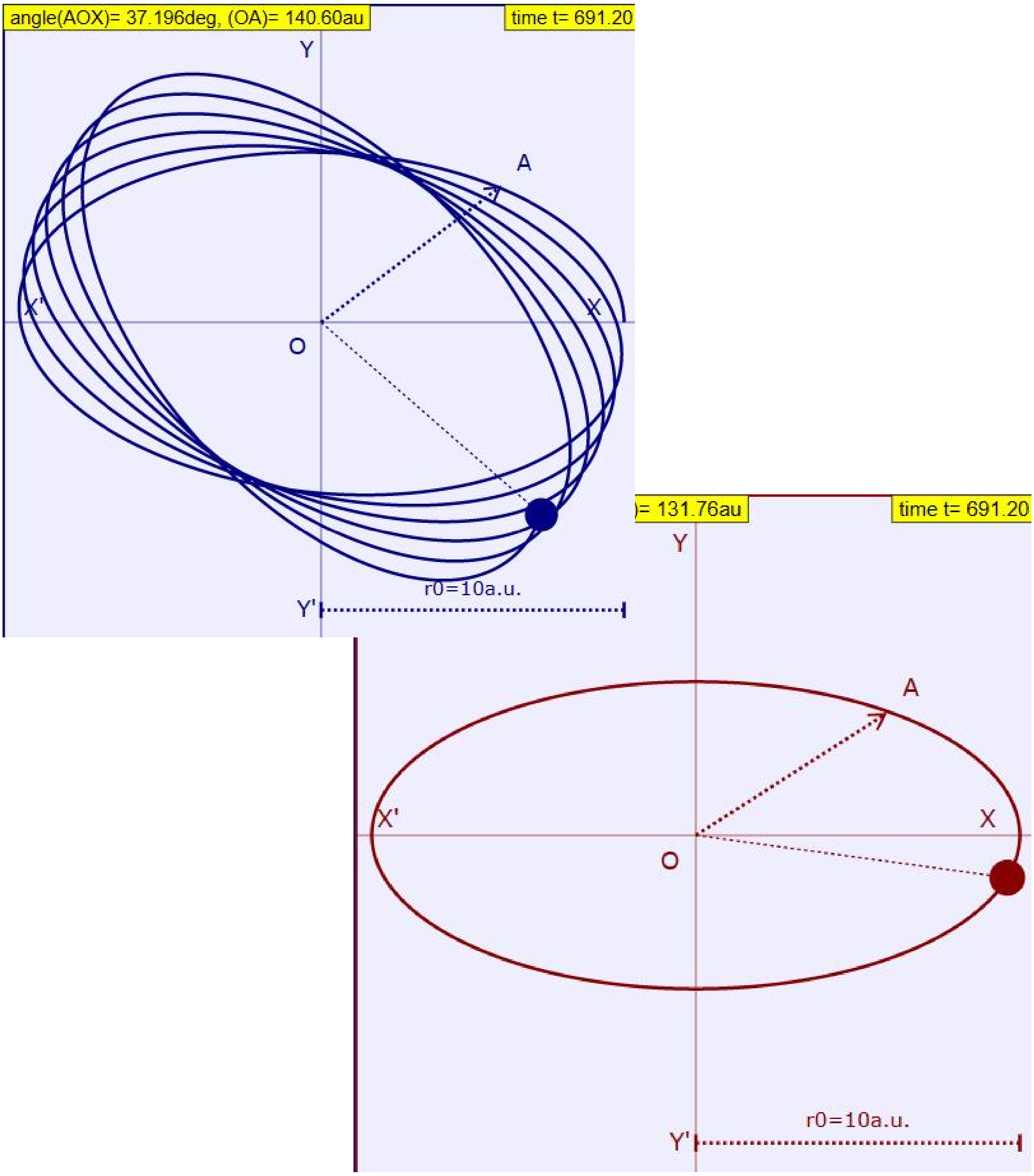
Σημειώσεις πάνω στις Μαθηματικές Αρχές της Σχετικιστικής Μηχανικής

Μοντέλα και Εφαρμογές

Κωνσταντίνος Παπαμιχάλης
Δρ Θεωρητικής Φυσικής Πανεπιστημίου Αθηνών (ΕΚΠΑ)



ISBN: 978-618-84204-1-0

Σημειώσεις πάνω στις Μαθηματικές Αρχές της Σχετικιστικής Μηχανικής Μοντέλα και Εφαρμογές

Κωνσταντίνος Παπαμιχάλης Δρ Θεωρητικής Φυσικής Πανεπιστημίου Αθηνών (ΕΚΠΑ)

email: kostaspapamichalis@gmail.com

Στην αγαπημένη μου συμβία

Σημειώσεις πάνω στις Μαθηματικές Αρχές της Σχετικιστικής Μηχανικής
Μοντέλα και Εφαρμογές

Κωνσταντίνος Παπαμιχάλης Δρ Θεωρητικής Φυσικής Πανεπιστημίου Αθηνών (ΕΚΠΑ)

Πρόλογος - Εισαγωγή

Οι "Σημειώσεις" αυτές προέκυψαν από την ανάγκη του γράφοντος να συστηματοποιήσει τις γνώσεις του γύρω από δύο ζητήματα: α) πώς μπορούμε να περιγράψουμε τη Σχετικιστική Μηχανική ως ένα αξιωματικό μαθηματικό σύστημα, και β) πώς συνθέτουμε εφαρμογές και μοντέλα που περιγράφουν φυσικά φαινόμενα, στο πλαίσιο του συστήματος αυτού.
Τόσο η Ελληνική, όσο και η διεθνής βιβλιογραφία δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο πλούτο αναφορικά με τα ζητήματα που θίγονται στις ενότητες του παρόντος πονήματος. Έτσι, πέρα από την προσωπική ανάγκη, ελοχεύει και η προσδοκία της συνεισφοράς στα ενδιαφέροντα ανθρώπων που η σκέψη τους έλκεται από σχετικές με τις "Σημειώσεις" θεματικές περιοχές.
Το μαθηματικό υπόβαθρο που απαιτείται για την πλοήγηση στις ενότητες των "Σημειώσεων" περιλαμβάνει μια καλή γνώση του Απειροστικού Λογισμού, Γραμμικής Άλγεβρας και Αναλυτικής Γεωμετρίας, όπως διδάσκονται σε Πανεπιστημιακά Τμήματα Μαθηματικών ή Φυσικών σπουδών. Πέραν τούτων θα χρειαστούν και γνώσεις Εφαρμοσμένης Διαφορικής Γεωμετρίας, οι οποίες όμως περιλαμβάνονται εξ ολοκλήρου στα Παραρτήματα των "Σημειώσεων".
Τα θέματα που αναλύονται στις ακόλουθες ενότητες περιστρέφονται γύρω από μια ακολουθία ερωτημάτων: 'Ποια είναι η γεωμετρική δομή του χωροχρονικού συνεχούς εντός του οποίου περιγράφουμε την κίνηση των σωματιδίων;', 'Πώς θα διαμορφώσουμε τις εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου, κατ' αντιστοιχία με τη Νευτώνεια Μηχανική;', 'Πώς γενικεύεται η έννοια της δύναμης στη Σχετικιστική Μηχανική;', 'Ποιες μορφές "δύναμης" είναι επιτρεπτές στο πλαίσιο της Σχετικιστικής Μηχανικής;', 'Πώς θα διαμορφώσουμε τα σχετικιστικά μοντέλα γνωστών φυσικών συστημάτων και πώς θα τα συγκρίνουμε με τα αντίστοιχα Νευτώνεια;', 'Πώς θα βρούμε τη χωρική γεωμετρία ενός στιγμιότυπου του χωροχρονικού συνεχούς;'

Στην πρώτη Ενότητα εισάγουμε την έννοια του "χωροχρονικού συνεχούς" και ορίζουμε τον χώρο Minkowski και το αδρανειακό συστήματος αναφοράς. Το χωροχρονικό συνεχές συντίθεται έτσι ώστε να αποκτήσει τα χαρακτηριστικά μιας "πολλαπλότητας" (manifold), στην οποία ορίζονται καμπύλες, εφαπτόμενοι χώροι, μετρική και συνοχή.
Στη δεύτερη Ενότητα εισάγονται οι απαραίτητες έννοιες για τη διαμόρφωση των εξισώσεων της κίνησης ενός σωματιδίου εντός του χωροχρονικού συνεχούς: η "αδρανειακή μάζα", η "κοσμική γραμμή", ο "ιδιόχρονος", η "χρονική συντεταγμένη σωματιδίου" η "τετρα-ταχύτητα και η "τετρα-ορμή".
Στην τρίτη Ενότητα, αναλύεται ο τρόπος συγχρονισμού των χρονομέτρων που τοποθετούνται στα χωρικά σημεία του χωροχρονικού συνεχούς και εισάγεται η έννοια του "παγκόσμιου χρόνου". Ορίζουμε την ταυτοχρονική υποπολλαπλότητα χώρου Minkowski και διερευνούμε τη γεωμετρική δομή της ως προς ένα αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.
Στην τέταρτη Ενότητα, γενικεύουμε τις εξισώσεις του Newton και διαμορφώνουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης στο πλαίσιο της Σχετικιστικής Μηχανικής, από την απαίτηση η μορφή τους να είναι αναλλοίωτη κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων του χωροχρονικού συνεχούς. Εισάγουμε την έννοια της "δύναμης Minkowski" και διερευνούμε τις "επιτρεπτές" μορφές της. Συνθέτουμε σχετικιστικά μοντέλα γνωστών φυσικών συστημάτων και συγκρίνουμε τις σχετικιστικές προβλέψεις με τις αντίστοιχες Νευτώνειες.
Στην πέμπτη Ενότητα, ορίζουμε το "ελεύθερο σωματίδιο" σε χώρο Minkowski, και διερευνούμε την αναλυτική έκφραση της κοσμικής γραμμής του ως προς αδρανειακό Καρτεσιανό ή πολικό σύστημα, καθώς και ως προς ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων.
Στην ίδια Ενότητα, θεωρούμε ένα σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται ομαλά γύρω από τον άξονα z αδρανειακού συστήματος και παράγουμε τη γεωμετρία ενός στιγμιότυπου του περιστρεφόμενου επιπέδου Oxy ("ταυτοχρονικό επίπεδο του Oxy"): υπολογίζουμε τον μετρικό τανυστή, τη συνοχή, τις γεωδαιτικές καμπύλες και την καμπυλότητα του ταυτοχρονικού επιπέδου, καθώς και το συναλλοίωτο διαφορικό και την παράλληλη μετατόπιση διανυσματικού πεδίου κατά μήκος της περιμέτρου κύκλου που βρίσκεται επί του ταυτοχρονικού επιπέδου. Υπολογίζουμε τον

λόγο της περιμέτρου προς τη διάμετρο του κύκλου και αναδεικνύουμε τον μη Ευκλείδειο χαρακτήρα του ταυτοχρονικού επιπέδου.
Στο Παράρτημα Α1 παρατίθενται αναλυτικά τοπολογικές έννοιες και σχέσεις που αφορούν στη δόμηση του χωροχρονικού συνεχούς.
Στο Παράρτημα Α2 εισάγονται βασικές έννοιες και προτάσεις της Εφαρμοσμένης Διαφορικής Γεωμετρίας: "συνοχή", "σύμβολα Christoffel", "συναλλοίωτη διαφόριση διανυσματικού πεδίου", "παράλληλη μετατόπιση διανύσματος κατά μήκος καμπύλης", "γεωδαιτικές καμπύλες".
Στο Παράρτημα Α3 ορίζεται το επίπεδο Riemann και η έννοια της καμπυλότητας Gauss σε κάθε σημείο του. Υπολογίζεται η καμπυλότητα Gauss συναρτήσει των συμβόλων Christoffel.
Στο Παράρτημα Α4 δείχνουμε πώς μπορούμε να επιλύσουμε ορισμένους τύπους διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο των συναρτήσεων Green.

Βασικές έννοιες και σχέσεις

Χωροχρονικό συνεχές *M* - Καμπύλες στο *M* - Εφαπτόμενοι χώροι του *M* - Διανυσματικά πεδία - Εφαπτόμενη δέσμη (tangent bundle) - Μετασχηματισμοί συντεταγμένων - Μετρικός τανυστής - Χώρος Minkowski - Αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε Καρτεσιανές συντεταγμένες - Μετασχηματισμοί Lorentz - Κοσμικές γραμμές - Ιδιόχρονος (proper-time) - Συγχρονισμός χρονομέτρων σε χώρο Minkowski - Παγκόσμιος χρόνος (world-time) - Ταυτοχρονικές πολλαπλότητες σε χώρο Minkowski - Στατικό σύστημα συντεταγμένων - Τετρα-ορμή - Τετρα-δύναμη (δύναμη Minkowski) - Οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίου σε χώρο Minkowski - Ο γραμμικός ταλαντωτής - Κίνηση σωματιδίου σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων - Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη - Ελεύθερο σωματίδιο σε χώρο Minkowski - Ισομετρικοί ισομορφισμοί μεταξύ των εφαπτόμενων χώρων ενός χώρου Minkowski - Συνοχή (connection) στο χωροχρονικό συνεχές *M* - Παράλληλη μετατόπιση διανύσματος κατά μήκος μιας καμπύλης του *M* - Συναλλοίωτη διαφόριση διανυσματικού πεδίου στο *M* - Τα σύμβολα Christoffel - Τανυστής καμπυλότητας - Καμπυλότητα Gauss σε ένα επίπεδο Riemann

Περιεχόμενα

1. Το χωροχρονικό συνεχές: εφαπτόμενοι χώροι, μετασχηματισμοί συντεταγμένων, εσωτερικό γινόμενο στους εφαπτόμενους χώρους, ο μετρικός τανυστής
   - 1.1. Αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε Καρτεσιανές συντεταγμένες - Ο χώρος Minkowski
   - 1.2. Διάστημα μεταξύ δύο γειτονικών σημείων του χωροχρονικού συνεχούς M
   - 1.3. Οι μετασχηματισμοί Lorentz
2. Σωματίδια σε χώρο Minkowski - Κοσμική γραμμή - Ιδιόχρονος- Τετρα-ταχύτητα - Τετρα-ορμή
3. Συγχρονισμός χρονομέτρων σε χώρο Minkowski - Η έννοια του "παγκόσμιου χρόνου" (world time)
   - 3.1. Συγχρονισμός χρονομέτρων ως προς ένα αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς
   - 3.2. Ταυτοχρονική υποπολλαπλότητα του M στο αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα (O,x)
   - 3.3. Συγχρονισμός χρονομέτρων σε χώρο Minkowski ως προς ένα αυθαίρετο, στατικό σύστημα συντεταγμένων
4. Η δύναμη Minkowski και οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου - Προσδιορισμός της αναλυτικής έκφρασης μιας "αποδεκτής" δύναμης Minkowski
   - 4.1. Δύναμη Minkowski που παράγεται από βαθμωτό δυναμικό
   - 4.2. Ο γραμμικός ταλαντωτής
   - 4.3. Κίνηση σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων
   - 4.4. Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη
5. Ελεύθερο σωματίδιο - Κοσμική γραμμή ελευθέρου σωματιδίου σε πολικό και σε ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς - Χωρική γεωμετρία μιας ταυτοχρονικής πολλαπλότητας του χώρου Minkowski σε Καρτεσιανό και σε ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς
   - 5.1. Πολικό σύστημα συντεταγμένων (ΠΣΣ) στον χώρο Minkowski M
   - 5.2. Κοσμική γραμμή ελεύθερου σωματιδίου σε χώρο Minkowski ως προς το ΠΣΣ
   - 5.3. Ταυτοχρονικό (simultaneous) επίπεδο Riemann χώρου Minkowski ως προς στατικό σύστημα συντεταγμένων
   - 5.4. Το Ευκλείδειο επίπεδο
   - 5.5. Ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς σε χώρο Minkowski
   - 5.6. Κοσμική γραμμή ελεύθερου σωματιδίου ως προς ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αφοράς σε χώρο Minkowski
   - 5.7. Η γεωμετρία ταυτοχρονικού επιπέδου Riemann του χώρου Minkowski ως προς ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς
     - α) Πεδία βάσης και μετρικός τανυστής
     - β) Συνοχή και συναλλοίωτη διαφόριση
     - γ) Γεωδαιτικές γραμμές
     - δ) Καμπυλότητα του ταυτοχρονικού επιπέδου Riemann
     - ε) Υπολογισμός του λόγου της περιμέτρου προς τη διάμετρο κύκλου (O,R) στο ταυτοχρονικό επίπεδο $M_z[t]$
     - ζ) Παράλληλη μεταφορά διανύσματος κατά μήκος της περιμέτρου του κύκλου (O,R)

Παράρτημα Α1: Ορισμός "τοπολογίας" και διαφόρισης σε ένα πραγματικό γραμμικό χώρο

Παράρτημα Α2: Συνοχή (connection) στο χωροχρονικό συνεχές M - Παράλληλη μετατόπιση διανύσματος κατά μήκος καμπύλης του M - Συναλλοίωτη (covariant) διαφόριση - Γεωδαιτικές καμπύλες
- α) Συνοχή (connection) στο χωροχρονικό συνεχές
- β) Απειροστή παράλληλη μετατόπιση διανύσματος
- γ) Υπολογισμός των συμβόλων Christoffel συναρτήσει του μετρικού τανυστή
- δ) Συναλλοίωτη διαφόριση στο χωροχρονικό συνεχές M
- ε) Γεωδαιτικές καμπύλες στο χωροχρονικό συνεχές M

Παράρτημα Α3: Καμπυλότητα σε επίπεδο Riemannian

Παράρτημα Α4: Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης 4.16δ με τη μέθοδο των συναρτήσεων Green

Αναφορές

Ενότητα 1
Το χωροχρονικό συνεχές: εφαπτόμενοι χώροι, μετασχηματισμοί συντεταγμένων, εσωτερικό γινόμενο στους εφαπτόμενους χώρους, ο μετρικός τανυστής

Στην Σχετικιστική Μηχανική τα σωματίδια κινούνται σε ένα συνεχές σύνολο "χωροχρονικών σημείων" ή "γεγονότων" που ονομάζεται "χωροχρονικό συνεχές" και το συμβολίζουμε με το *M*. Κάθε σημείο του *M*, προσδιορίζεται από μια χρονική και τρεις χωρικές συντεταγμένες, που σημαίνει ότι το *M* είναι ένα τετραδιάστατο συνεχές, ή αλλιώς, μια τετραδιάστατη πολλαπλότητα(6,10,12). Στο *M* θέλουμε να ορίσουμε έννοιες, όπως: "απειροστά γειτονικά σημεία", "συνέχεια", "καμπύλες σημείων", "ταχύτητες", κλπ. Για να το πετύχουμε, πρέπει να το εφοδιάσουμε με μια τοπολογία και με μια αλγεβρική δομή που θα μας επιτρέψουν να μιλάμε για ανοιχτές περιοχές σημείων, σύγκλιση ακολουθιών σημείων, συνέχεια συναρτήσεων, διαφόριση, και τα συναφή. *Πώς θα πραγματώσουμε αυτόν τον στόχο;*
Θεωρούμε ότι το *M* είναι ενσωματωμένο σε ένα σύνολο *V* που είναι συσχετισμένο(10,11,12) με έναν πραγματικό γραμμικό χώρο V_n διάστασης μεγαλύτερης ή ίσης του 4. Το δίδυμο (V,V_n) λέγεται "affine space (V,V_n)", και η δομή του αναλύεται στο Παράρτημα Α1. Έτσι, το *M* δανείζεται την τοπολογία και την αλγεβρική δομή του affine space (V,V_n). Στη συνέχεια, ορίζουμε το *M* ως πολλαπλότητα του *V* και προχωράμε στη μελέτη των εννοιών και των στοιχείων που συνιστούν τη γεωμετρία του: καμπύλες, εφαπτόμενοι χώροι, διανυσματικά πεδία, Καρτεσιανές συντεταγμένες, μετασχηματισμοί συντεταγμένων, ο μετρικός τανυστής, χώρος Minkowski, αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων, μετασχηματισμοί Lorentz.

Σημεία και διανύσματα: ***πώς ένα σύνολο σημείων αποκτά τη δομή ενός τοπολογικού χώρου;*** **"affine space"**
Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο σημείων *V* **συσχετισμένο** με τον γραμμικό χώρο(8,11,12) V_n, του οποίου η διάσταση *n* είναι μεγαλύτερη ή ίση του 4. Το σύνολο *V* μαζί με το συσχετισμένο χώρο V_n, δηλαδή το δίδυμο (V,V_n) αποτελούν έναν "affine space"(11). Τα στοιχεία του *V* ονομάζονται **σημεία** και τα στοιχεία του V_n, **διανύσματα**. Στο Παράρτημα Α1 δείχνουμε πώς μπορούμε με τη βοήθεια του συσχετισμένου χώρου V_n να ορίσουμε στο σύνολο των σημείων *V* μια τοπολογία(7,8) και μέσω αυτής, την έννοια της συνέχειας, της διαφόρισης και της καμπύλης στο *V*.

Το "τετραδιάστατο συνεχές" και το "χωροχρονικό συνεχές"
Ονομάζουμε "**τετραδιάστατο συνεχές**", (ή τετραδιάστατη πολλαπλότητα(4,10,12)) κάθε υποσύνολο *M* του *V* που έχει την ακόλουθη δομή:
α) Κάθε σημείο $X \in M$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από μια τετράδα πραγματικών αριθμών, που ονομάζονται συντεταγμένες του *X*, συμβολίζουμε $\mathrm{x} = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$. Το x λαμβάνει τιμές σε ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο $D_{(4)}$ του R^4. Αν οι τετράδες x συνθέτουν έναν γραμμικό χώρο με πράξη την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με πραγματικούς αριθμούς, τότε οι συντεταγμένες x^μ, μ=0,1,2,3 ονομάζονται "Καρτεσιανές"[1]. Το σημείο *O* του *M* με Καρτεσιανές συντεταγμένες $\mathrm{x}_O = (0,0,0,0)$ ονομάζεται "αρχή" του συστήματος συντεταγμένων.
Η αρχή *O* και οι (Καρτεσιανές ή όχι) τετράδες x ορίζουν ένα σύστημα συντεταγμένων που το συμβολίζουμε (*O*,x).
β) Υπάρχει μια 1-1, συνεχής και διαφορίσιμη απεικόνιση (Παράρτημα Α1) $\Phi : R^4 \rightleftarrows M$ που απεικονίζει τον γραμμικό χώρο R^4 στο τετραδιάστατο συνεχές *M*: $M \underset{def}{=} \Phi\left(R^4\right) \subseteq V$
Κάθε σημείο *X* του *M* θα συμβολίζεται με πλάγιο κεφαλαίο γράμμα και η τετράδα που το προσδιορίζει με το αντίστοιχο (ορθό, ή πλάγιο), μικρό: $X=\Phi(\mathrm{x})$
Κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων(1,4,6) $x^\mu = x^\mu\left(\mathrm{x}'\right)$ το σημείο $X = \Phi(\mathrm{x}) \in M$ διατηρείται αναλλοίωτο. Ωστόσο, η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης Φ που το προσδιορίζει αλλάζει:

$$X = \Phi(\mathrm{x}) = \Phi\left(\mathrm{x}(\mathrm{x}')\right) \underset{def}{=} \Phi'\left(\mathrm{x}'\right) \equiv X' \qquad (1.α)$$

---

[1] $\mathrm{z} = \mathrm{x}+\mathrm{y} \Leftrightarrow z^\mu = x^\mu + y^\mu$
$\mathrm{z} = \lambda \mathrm{x}$, όπου $\lambda \in R \Leftrightarrow z^\mu = \lambda x^\mu$

Ως προς κάθε σύστημα συντεταγμένων (O,x), η συντεταγμένη x^0 μετράται με ένα χρονόμετρο, και ονομάζεται "χρονική συντεταγμένη". Οι άλλες τρεις συντεταγμένες x^1, x^2, x^3 αφορούν χωρικές παραμέτρους του M. Ονομάζονται "χωρικές συντεταγμένες" και μετρώνται με έναν χάρακα (ή αντίστοιχα όργανα μέτρησης). Σύμφωνα με αυτή τη σημασιολογία των συντεταγμένων, το τετραδιάστατο συνεχές M ονομάζεται "**χωροχρονικό συνεχές**".

Καμπύλες στο χωροχρονικό συνεχές *M*

Στο Παράρτημα Α1 δείχνουμε ότι δεδομένης της $X = \Phi(\mathrm{x})$, στον συσχετισμένο με το σύνολο V χώρο V_n μπορεί να οριστεί μια απεικόνιση $\Phi_O : R^4 \to V_n$, $O \in V$ τέτοια ώστε:

$$\overrightarrow{OX} = \Phi_O(\mathrm{x}) \text{ όπου: } X = \Phi(\mathrm{x}),\ O \in V \text{ και } \mathrm{x} \in D_{(4)} \subseteq R^4 \qquad (1.\beta)$$

...όπου $D_{(4)}$ ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^4.

Μια καμπύλη C στο M $C : X = C(\sigma)$ προσδιορίζεται ως η εικόνα μιας αντίστοιχης καμπύλης $c : \mathrm{x} = c(\sigma)$ του χώρου των συντεταγμένων R^4: $C = \Phi \circ c$, $X = \Phi\big(c(\sigma)\big)$

Σύμφωνα με την 1.β, η καμπύλη C ορίζει μια κλάση καμπύλων C_O, $O \in V$ του συσχετισμένου χώρου V_n:

$$C_O(\sigma) = \overrightarrow{OX} = \Phi_O\left(c(\sigma)\right) \text{ όπου: } X = C(\sigma) = \Phi\left(c(\sigma)\right),\ O \in V \qquad (1.\gamma)$$

Σε κάθε σημείο της καμπύλης C ορίζονται εφαπτόμενα διανύσματα, από τη σχέση (Παράρτημα Α1):

$$T(\sigma) = \lim_{\Delta\sigma \to 0} \frac{\Delta\Phi_O\left(c(\sigma)\right)}{\Delta\sigma} \text{ όπου: } \Delta\Phi_O\left(c(\sigma)\right) = \Phi_O\left(c(\sigma+\Delta\sigma)\right) - \Phi_O\left(c(\sigma)\right) \in V_n \qquad (1.\delta)$$

Τα διανύσματα $T(\sigma)$ είναι ανεξάρτητα της επιλογής του σημείου O του V. Είναι μονοσήμαντα ορισμένα για κάθε κλάση καμπύλων C_O, $O \in V$ και για κάθε τιμή του σ. Θα τα ονομάζουμε εφαπτόμενα διανύσματα της καμπύλης C του V, στο σημείο της: $X = C(\sigma) = \Phi\big(c(\sigma)\big)$

Οι εφαπτόμενοι χώροι του τετραδιάστατου συνεχούς *M* - Εφαπτομενική δέσμη του *M* - Διανυσματικά πεδία

Ο εφαπτόμενος χώρος του M σε κάθε σημείο του $X = \Phi(\mathrm{x})$ $\left(\text{συμβ.: } T_X M \equiv T_{\Phi(\mathrm{x})} M \equiv T_{\mathrm{x}} M\right)$ παράγεται από το γραμμικό συνδυασμό των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο X κάθε καμπύλης του M που διέρχεται από το X.

Δείξτε ότι: το σύνολο $T_X M$ είναι ένας διανυσματικός χώρος, για κάθε $X = \Phi(\mathrm{x}) \in M$

Έστω A ένα εφαπτόμενο διάνυσμα του M στο σημείο X: $A \in T_X M$. Τότε, υπάρχει καμπύλη $Y = C(\sigma) = \Phi\left(c(\sigma)\right) \in V$ με: $c(0) = \mathrm{x}$, $\Phi\big(c(0)\big) = \Phi(\mathrm{x}) = X$, τέτοια ώστε:

$$A = \frac{d}{d\sigma}\Phi_O\left(c(\sigma)\right)\bigg|_{\sigma=0} \qquad (1.\varepsilon)$$

...όπου: $C_O : C_O(\sigma) = \Phi_O\left(c(\sigma)\right) \in V_n$ είναι ένας "εκπρόσωπος" της κλάσης των καμπύλων του συσχετισμένου χώρου V_n που παράγεται από την καμπύλη C.

Από την 1.ε, και δεδομένου ότι οι συναρτήσεις Φ_O, και c είναι διαφορίσιμες, προκύπτει η σχέση:

$$A = \partial_\mu \Phi_O(\mathrm{x}) \dot{c}^\mu(0) \qquad (1.\zeta)$$

Οι μερικές παράγωγοι $\partial_\mu \Phi_O(\mathrm{x})$ είναι διανύσματα του συσχετισμένου χώρου V_n και η αναλυτική τους έκφραση δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου $O \in V$ (Παράρτημα Α1).

Σύμφωνα με την 1.ζ, κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα του M στο $X \in M$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\partial_\mu \Phi_O(\mathrm{x})$

Στο πλαίσιο του συστήματος συντεταγμένων (O,x) τα διανύσματα:

$$e_\mu(X) \underset{\text{ορισμ.}}{=} \frac{\partial \Phi_O(\mathrm{x})}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu \Phi_O(\mathrm{x}) \qquad (1.\eta)$$

...ορίζουν μια βάση στον εφαπτόμενο χώρο $T_X M$:

$A = e_\mu(X)A^\mu \in T_X M$, $X = \Phi\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$

Η ένωση όλων των εφαπτόμενων χώρων του M ονομάζεται **"εφαπτομενική δέσμη"** (tangent bundle) του M. Τη συμβολίζουμε με TM: $TM \underset{\text{ορισμ.}}{=} \bigcup_{X\in M} T_X M$

Πώς μετασχηματίζονται τα στοιχεία βάσης των εφαπτόμενων χώρων του M, κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων;

Έστω $x^\mu = x^\mu\left(x'\right)$ ένας μετασχηματισμός στον χώρο των συντεταγμένων R^4. Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων είναι 1-1, αντιστρέψιμες και διαφορίσιμες απεικονίσεις. Ο αντίστροφος ενός μετασχηματισμού συντεταγμένων είναι επίσης διαφορίσιμη απεικόνιση (αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις).

Κάτω από τον μετασχηματισμό $x^\mu = x^\mu\left(x'\right)$ τα στοιχεία βάσης των εφαπτόμενων χώρων του M μεταβάλλονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$e'_\mu(X) = \partial'_\mu \Phi'_O(x') = \partial'_\mu \Phi_O\left(x(x')\right) = \partial_\nu \Phi_O(x)\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \equiv e_\nu(X)\partial'_\mu x^\nu \qquad (1.\theta)$$

Διανυσματικά πεδία στο *M*

Μια διαφορίσιμη απεικόνιση ορισμένη στον M και τιμές στην εφαπτομενική του δέσμη TM: $M \ni X \to A(X) \in T_X M \subset TM$ θα την ονομάζουμε "**πεδίο**" στο M. Στο σύστημα συντεταγμένων (O,x) το διάνυσμα $A(X) \equiv A(x) \in T_X M$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης του $T_X M$:

$A(x) = e_\mu(x)A^\mu(x) \in T_X M$

Κάτω από ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων το διάνυσμα A(x) γενικά μεταβάλλεται:

$$A(x) = e_\mu(x)A^\mu(x) \to A'(x') = e'_\nu(x')A'^\nu(x') = e_\mu(x)\partial'_\nu x^\mu A'^\nu(x') \qquad (1.\iota)$$

Αν το διάνυσμα *A*(x), σε κάθε σημείο του *M*, διατηρείται αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων, τότε λέμε ότι ορίζει ένα "διανυσματικό πεδίο" στο τετραδιάστατο συνεχές *M*. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτόν και την 1.ι, το A(x) είναι διανυσματικό πεδίο τότε και μόνο τότε αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} &A(X) = A'(X) \Leftrightarrow A(x) = A'(x') \Leftrightarrow e_\mu(x)A^\mu(x) = e'_\nu(x')A'^\nu(x') \Leftrightarrow \\ &e_\mu(x)A^\mu(x) = e_\mu(x)\partial'_\nu x^\mu A'^\nu(x') \Leftrightarrow A^\mu(x) = \partial'_\nu x^\mu A'^\nu(x') \end{aligned} \qquad (1.\kappa)$$

Ο πίνακας $\left[\partial'_\nu x^\mu\right]$ ονομάζεται "Ιακωβιανός" πίνακας (Jacobian matrix) του μετασχηματισμού $x^\mu = x^\mu(x')$. Ο πίνακας $\left[\partial_\nu x'^\mu\right]$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του αντίστροφου μετασχηματισμού $x'^\mu = x'^\mu(x)$.

<u>Δείξτε ότι αληθεύει η σχέση</u>: $\partial_\mu x'^\lambda \partial'_\nu x^\mu = \delta^\lambda{}_\nu$

<u>Παράδειγμα 1</u>: Τα διανύσματα βάσης των εφαπτόμενων χώρων του M, ορίζουν τα πεδία $e_\mu(X)$, μ=0,1,2,3 του M που θα τα ονομάζουμε "πεδία βάσης". Ωστόσο, τα πεδία $e_\mu(X)$ δεν είναι διανυσματικά πεδία με βάση τον παραπάνω ορισμό, διότι δεν διατηρούνται αναλλοίωτα κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων: αν υποθέσουμε ότι κάτω από τον μετασχηματισμό $x^\mu=x^\mu(x')$ τα $e_\mu(X)$ δεν μεταβάλλονται, τότε θα έπρεπε να αληθεύουν οι σχέσεις:

$e_\mu(X) = e'_\mu(X) \Rightarrow e_\nu(X)\delta_\mu{}^\nu = e_\nu(X)\partial'_\mu x^\nu \Rightarrow \partial'_\mu x^\nu = \delta_\mu{}^\nu$

...που αληθεύει μόνο στην περίπτωση του ταυτοτικού μετασχηματισμού συντεταγμένων.

<u>Παράδειγμα 2</u>: Θεωρούμε μια καμπύλη $C = \Phi \circ c$ του M, όπου $x^\mu = c^\mu(\sigma)$, $\sigma \in I \subseteq R$ καμπύλη του χώρου των συντεταγμένων, και ορίζουμε το πεδίο $W(X)$ από τις σχέσεις:

$$M \supset C \ni X \to W(X) = e_\mu(X)\frac{dc^\mu}{d\sigma} \in T_X M \text{ όπου } X = \Phi\big(c(\sigma)\big)$$

Κάτω από τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $x'^\mu = x'^\mu(\mathrm{x})$, η c μετασχηματίζεται στην:

$$x'^\mu = c'^\mu(\sigma) = x'^\mu\big(c(\sigma)\big)$$

...από την οποία έπεται ότι:

$$\frac{dx'^\mu}{d\sigma} = \frac{dx'^\mu\big(c(\sigma)\big)}{d\sigma} = \partial_\nu x'^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} \Rightarrow \frac{dx^\mu}{d\sigma} = \partial'_\nu x^\mu \frac{dx'^\nu}{d\sigma}$$

Ο μετασχηματισμός του $W(X)$ προσδιορίζεται από τις ισότητες:

$$W(X) = e_\mu(X)\frac{dx^\mu}{d\sigma} = e'_\nu(X)\partial_\mu x'^\nu \partial'_\kappa x^\mu \frac{dx'^\kappa}{d\sigma} = e'_\nu(X)\delta_\kappa{}^\nu \frac{dx'^\kappa}{d\sigma} = e'_\nu(X)\frac{dx'^\nu}{d\sigma} = W'(X)$$

Συμπεραίνουμε ότι το πεδίο $W(X)$ διατηρείται αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων. Επομένως είναι ένα διανυσματικό πεδίο του M.

Εσωτερικό γινόμενο στους εφαπτόμενους χώρους του χωροχρονικού συνεχούς M - Ο μετρικός τανυστής

Μέχρι τώρα, στο χωροχρονικό συνεχές M έχουμε προσδώσει δομή τοπολογικού χώρου. Στην παρούσα παράγραφο ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο σε κάθε εφαπτόμενο χώρο $T_X M$ του M, από το οποίο προκύπτει και η μετρική στο M. Προς τούτο, στο σύστημα συντεταγμένων (O,x) επιλέγουμε τον **διαφορίσιμο**, **συμμετρικό** πίνακα $\left[g_{\mu\nu}(\mathrm{x})\right]$ και ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο σε κάθε εφαπτόμενο χώρο $T_X M, \forall X = \Phi(\mathrm{x}) \in M$ από τις σχέσεις:

$$A = e_\mu(\mathrm{x})A^\mu, B = e_\nu(\mathrm{x})B^\nu \in T_X M$$

$$\langle A, B\rangle = \langle e_\mu(\mathrm{x}), e_\nu(\mathrm{x})\rangle A^\mu B^\nu = g_{\mu\nu}(\mathrm{x})A^\mu B^\nu \qquad (1.\lambda)$$

...όπου εξ ορισμού θέτουμε:

$$\langle e_\mu(\mathrm{x}), e_\nu(\mathrm{x})\rangle \underset{def}{=} g_{\mu\nu}(\mathrm{x}) \qquad (1.\mu)$$

Η 1.μ ορίζει τον **μετρικό τανυστή** ως προς το σύστημα συντεταγμένων (O,x) του χωροχρονικού συνεχούς M.
Από την 1.λ, για B=A έχουμε:

$$\langle A, A\rangle = \langle e_\mu(\mathrm{x}), e_\nu(\mathrm{x})\rangle A^\mu A^\nu = g_{\mu\nu}(\mathrm{x})A^\mu A^\nu \qquad (1.\nu)$$

Το εσωτερικό γινόμενο είναι, γενικά, μια συμμετρική διγραμμική μορφή, θετικά ορισμένη(7,8,12). Ωστόσο, στο χωροχρονικό συνεχές, το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι θετικά ορισμένο. Αυτό έχει ως συνέπεια η norm του διανύσματος A να είναι θετικός πραγματικός αριθμός μόνον εφόσον ισχύει $\langle A, A\rangle \geq 0$ Στην περίπτωση αυτή, από την 1.ν συνεπάγεται ότι:

$$\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{g_{\mu\nu}(x)A^\mu A^\nu}$$

Κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^\mu = x^\mu(\mathrm{x}')$ τα στοιχεία του μετρικού τανυστή μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις ακόλουθες ισότητες:

$$g_{\mu\nu}(\mathrm{x}) = \langle e_\mu(\mathrm{x}), e_\nu(\mathrm{x})\rangle = \langle e'_\kappa(\mathrm{x}'), e'_\lambda(\mathrm{x}')\rangle \partial_\mu x'^\kappa \partial_\nu x'^\lambda = g'_{\kappa\lambda}(\mathrm{x}')\partial_\mu x'^\kappa \partial_\nu x'^\lambda \qquad (1.\xi)$$

Αν $A(X)$, $B(X)$ είναι διανυσματικά πεδία του M, τότε το εσωτερικό γινόμενο $\langle A(X), B(X)\rangle$ διατηρείται αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων:

$$\begin{aligned}\langle A(\mathrm{x}), B(\mathrm{x})\rangle &= \langle e_\mu(\mathrm{x}), e_\nu(\mathrm{x})\rangle A^\mu(\mathrm{x})B^\nu(\mathrm{x}) = g_{\mu\nu}(\mathrm{x})A^\mu(\mathrm{x})B^\nu(\mathrm{x}) = \\ &= g'_{\kappa\lambda}(\mathrm{x}')\partial_\mu x'^\kappa \partial_\nu x'^\lambda \partial'_\rho x^\mu A'^\rho(\mathrm{x}')\partial'_\sigma x^\nu B^\sigma(\mathrm{x}') = g'_{\kappa\lambda}(\mathrm{x}')\delta_\rho{}^\kappa \delta_\sigma{}^\lambda A'^\rho(\mathrm{x}')B^\sigma(\mathrm{x}') = \qquad (1.o) \\ &= g'_{\kappa\lambda}(\mathrm{x}')A'^\kappa(\mathrm{x}')B^\lambda(\mathrm{x}') = \langle A'(\mathrm{x}'), B'(\mathrm{x}')\rangle\end{aligned}$$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

1.1 Αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε Καρτεσιανές συντεταγμένες - Ο χώρος Minkowski

Θεωρούμε ένα τετραδιάστατο χωροχρονικό συνεχές M, και το **Καρτεσιανό** σύστημα συντεταγμένων (O,x). Τα σημεία του M προσδιορίζονται μονοσήμαντα από τη συνάρτηση:

$R^4 \ni \mathrm{x} \to X = \Phi(\mathrm{x}) \in M$

Τα διανύσματα βάσης του εφαπτόμενου χώρου $T_X M$ ορίζονται στο σύστημα (O,x) από την 1.η:

$e_\mu(X) \underset{def}{=} \partial_\mu \Phi_O(\mathrm{x})$

... όπου O τυχαίο σταθερό σημείο του ευρύτερου χώρου V, εντός του οποίου είναι ενσωματωμένο το M, και $\Phi_O(\mathrm{x})$ είναι διάνυσμα του συσχετισμένου χώρου V_n. Δεδομένου ότι οι μερικές παράγωγοι $\partial_\mu \Phi_O(\mathrm{x})$ είναι ανεξάρτητες της επιλογής του O (πρόταση 3 του Παραρτήματος Α1), μπορούμε να το επιλέξουμε ώστε να ταυτίζεται με την αρχή του συστήματος (O,x). Η επιλογή μας αυτή γίνεται μόνον για οικονομία των συμβολισμών και δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς, τους ορισμούς και τα συμπεράσματα που ακολουθούν.

Αν B_j, j=1,2…n συμβολίζουν τα διανύσματα μιας βάσης του V_n, το $\Phi_O(\mathrm{x})$, γράφεται:

$$\Phi_O(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} B_j f^j(\mathrm{x}) \qquad (1.1\alpha)$$

... και τα διανύσματα βάσης του $T_X M$:

$$e_\mu(\mathrm{x}) \underset{def}{=} \partial_\mu \Phi_O(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} B_j \partial_\mu f^j(\mathrm{x}),\ \mu = 0,1,2,3 \qquad (1.1\beta)$$

Θεωρούμε ότι ως προς το Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O,x), το χωροχρονικό συνεχές M έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Τα διανύσματα βάσης των εφαπτόμενων χώρων $T_X M$ είναι ανεξάρτητα του x:

$\partial_\nu e_\mu(\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow \partial_\nu \partial_\mu f^j(\mathrm{x}) = 0 \Rightarrow \partial_\mu f^j(\mathrm{x}) = F_\mu^j =$ σταθερό, για κάθε $j = 1,2...n$ και $\mu,\nu = 0,1,2,3$

Τα διανύσματα βάσης σε κάθε εφαπτόμενο χώρο $T_X M$ έχουν την ίδια αναλυτική έκφραση, ως διανύσματα του συσχετισμένου χώρου V_n:

$$e_\mu(X) = \partial_\mu \Phi_O(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} B_j F_\mu^j,\ \mu = 0,1,2,3 \qquad (1.1\gamma)$$

…ή αλλιώς, ισχύει: $e_\mu(X) = e_\mu(Y),\ \forall X,Y \in M$

β) Τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή στο σύστημα (O,x) δίδονται από τις σχέσεις:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{cases} 1 \text{ για } \mu = \nu = 0 \\ -1 \text{ για } \mu = \nu = 1 \\ -1 \text{ για } \mu = \nu = 2 \\ -1 \text{ για } \mu = \nu = 3 \\ 0 \text{ για κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases} \qquad \text{ή: } \left[g_{\mu\nu}(x)\right] = \left[\eta_{\mu\nu}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

... τότε το χωροχρονικό συνεχές M λέμε ότι έχει τη δομή ενός "**χώρου Minkowski**" και το (O,x) ονομάζεται "**Καρτεσιανό αδρανειακό σύστημα αναφοράς**".

Ως προς το (O,x), το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $A, B \in T_X M$, λαμβάνει τη μορφή:

$$\langle A,B \rangle = \langle e_\mu, e_\nu \rangle A^\mu B^\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \qquad (1.1\delta)$$

... από την οποία συνεπάγεται ότι:

$$\langle A,A \rangle = \langle e_\mu, e_\nu \rangle A^\mu A^\nu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \left(A^0\right)^2 - \left(A^1\right)^2 - \left(A^2\right)^2 - \left(A^3\right)^2$$

Η norm του A υπάρχει εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\langle A,A \rangle > 0 \text{ ή: } \left(A^0\right)^2 > \left(A^1\right)^2 + \left(A^2\right)^2 + \left(A^3\right)^2 \qquad (1.1\varepsilon)$$

Τότε, το διάνυσμα ονομάζεται "χρονοειδές" (time-like) και γράφουμε:

$$\|A\| = \sqrt{\langle A,A \rangle} = \sqrt{\eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu} = \sqrt{\left(A^0\right)^2 - \left(A^1\right)^2 - \left(A^2\right)^2 - \left(A^3\right)^2} \qquad (1.1\zeta)$$

Έστω $A(X)$ διανυσματικό πεδίο του M. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσματικών πεδίων διατηρείται αναλλοίωτο κάτω από κάθε μετασχηματισμό συντεταγμένων (σχέση 1.ο). Επομένως, αν ισχύει $\langle A(X), A(X)\rangle > 0$ σε ένα σύστημα συντεταγμένων, ισχύει σε κάθε σύστημα συντεταγμένων, ή αλλιώς: "αν το το διανυσματικό πεδίο $A(X)$ είναι χρονοειδές σε ένα σύστημα συντεταγμένων, είναι χρονοειδές σε κάθε σύστημα συντεταγμένων.

Αν ισχύει $\langle A(X), A(X)\rangle < 0$ τότε το $A(X)$ ονομάζεται "χωροειδές" (space-like) και αν ισχύει $\langle A(X), A(X)\rangle = 0$ τότε το $A(X)$ ονομάζεται "φωτοειδές" (light-like). Οι ιδιότητες αυτές του $A(X)$ είναι, όπως και το "χρονοειδές", ανεξάρτητες του συστήματος συντεταγμένων.

Σε ένα χωροχρονικό συνεχές απαιτούμε το χρονικό μέρος της norm κάθε διανύσματος: $g_{00}(\mathrm{x})A^0A^0$ να είναι πάντοτε μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν[9]. Αυτό είναι δυνατόν εφόσον σε κάθε σύστημα συντεταγμένων ισχύει:

$$g_{00}(\mathrm{x}) > 0 \tag{1.1η}$$

Ώστε, οι αποδεκτοί μετασχηματισμοί συντεταγμένων στο χωροχρονικό συνεχές είναι εκείνοι που ικανοποιούν τη συνθήκη 1.1η [2].

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

1.2 Διάστημα μεταξύ δύο γειτονικών σημείων του χωροχρονικού συνεχούς *M*

Επισήμανση: Στα αναπτύγματα Taylor κρατάμε όρους μέχρι και 1ης τάξης ως προς την απειροστή ποσότητα, εκτός και αν δηλωθεί κάτι διαφορετικό.

Θεωρούμε ένα τυχαίο σύστημα συντεταγμένων (O,x), $\mathrm{x} \in D_{(4)} \subseteq R^4$ του M, όπου $D_{(4)}$ ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^4. Έστω X και Y δύο σημεία στο M, που είναι απείρως κοντά το ένα με το άλλο. Η έννοια των δύο απειροστά γειτονικών σημείων προσδιορίζεται στο Παράρτημα Α1: το X είναι απείρως κοντά στο Y, εφόσον για κάθε περιοχή $N_\varepsilon(X)$ ισχύει: $Y \in N_\varepsilon(X)$

Τα X και Y είναι εικόνες δύο σημείων του χώρου των συντεταγμένων, x, $\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x} \in D_{(4)}$ όπου:

$\Delta\mathrm{x} \to 0$, $X = \Phi(\mathrm{x})$, $Y = \Phi(\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x})$

Τα αντίστοιχα διανύσματα $X_O = \overrightarrow{OX}, Y_O = \overrightarrow{OY}$ του συσχετισμένου χώρου V_n (Παράρτημα Α1), όπου O τυχαίο, σταθερό σημείο του V, ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$X_O = \Phi_O(\mathrm{x}),\ Y_O = \Phi_O(\mathrm{x} + \Delta\mathrm{x}) \approx \Phi_O(\mathrm{x}) + \partial_\mu \Phi_O(\mathrm{x})\Delta x^\mu = X_O + e_\mu(\mathrm{x})\Delta x^\mu$$

$$Y_O = X_O + \Delta X \text{ όπου: } \Delta X = e_\mu(\mathrm{x})\Delta x^\mu \in T_X M,\ \Delta x^\mu \to 0,\ \text{for } \mu = 0,1,2,3$$

Η στοιχειώδης απόσταση ή "**απειροστό διάστημα**" (infinitesimal interval) μεταξύ των X και Y προσδιορίζεται από τη norm του ΔX, εφόσον το ΔX είναι χρονοειδές:

$$\Delta s(\mathrm{x}) = \mathrm{dist}(X,Y) = \|\Delta X\| = \sqrt{g_{\mu\nu}(\mathrm{x})\Delta x^\mu \Delta x^\nu} \tag{1.2α}$$

Έστω: $x^\mu = x^\mu(\mathrm{x}')$ ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων στο χωροχρονικό συνεχές M.

Οι βάσεις των εφαπτόμενων χώρων του M, μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις (1.θ):

$$e'_\mu(\mathrm{x}') = e_\nu(\mathrm{x})\partial'_\mu x^\nu,\ e_\nu(\mathrm{x}) = e'_\mu(\mathrm{x}')\partial_\nu x'^\mu$$

... οι συνιστώσες του ΔX μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις:

$$\Delta x^\mu = \Delta x^\mu(\mathrm{x}') = \partial'_\nu x^\mu \Delta x'^\nu,\ \Delta x'^\nu = \partial_\mu x'^\nu \Delta x^\mu$$

... και τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή:

$$g_{\mu\nu} = \langle e_\mu, e_\nu\rangle = g'_{\kappa\lambda}\partial_\mu x'^\kappa \partial_\nu x'^\lambda$$

Το απειροστό διάστημα μεταξύ δύο γειτονικών σημείων του *M* διατηρείται αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων:

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= \langle \Delta X, \Delta X \rangle = g_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} = g'_{\kappa\lambda}\partial_{\mu}x'^{\kappa}\partial_{\nu}x'^{\lambda}\partial'_{\rho}x^{\mu}\partial'_{\sigma}x^{\nu}\Delta x'^{\rho}\Delta x'^{\sigma} = \\ &= g'_{\kappa\lambda}\delta^{\kappa}{}_{\rho}\delta^{\nu}{}_{\sigma}\Delta x'^{\rho}\Delta x'^{\sigma} = g'_{\kappa\lambda}\Delta x'^{\kappa}\Delta x'^{\lambda} = \Delta s'^{2}\end{aligned} \qquad (1.2\beta)$$

QED

Ώστε το απειροστό διάστημα μεταξύ δύο γειτονικών σημείων του M είναι το ίδιο ως προς οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς. Λέμε ότι η 1.2α ορίζει μια **μετρική** στο χωροχρονικό συνεχές M.

Έστω ότι το (O,x) είναι ένα Καρτεσιανό αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων του χώρου Minkowski M. Αν το διάνυσμα ΔX είναι χρονοειδές, τότε το διάστημα Δs μεταξύ των X και Y εκφράζεται από τη σχέση:

$$\Delta s = \|\Delta X\| = \sqrt{\eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}} = \left((\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2\right)^{1/2} \qquad (1.2\gamma)$$

Η χρονική συντεταγμένη γράφεται: $\Delta x^0 = c\Delta t$ όπου c είναι σταθερά εξαρτώμενη από τις μονάδες και ταυτίζεται με το μέτρο της ταχύτητας του φωτός στο κενό. Ο χρόνος t μετριέται με χρονόμετρα που έχουμε τοποθετήσει σε κάθε σημείο του M με χωρικές συντεταγμένες (x^1,x^2,x^3).

Ας θεωρήσουμε δύο γειτονικά σημεία X, Y του M, που έχουν την ίδια χρονική συντεταγμένη: Δx^0=0. Τότε, ως προς το σύστημα (O,x) ορίζουμε την χωρική απόσταση Δs_T των X, Y, από τη σχέση:

$$\begin{aligned}(\Delta s_{\tau})^2 &= -(\Delta s)^2 = -\eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \\ \Delta s_{\tau} &= \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}} = \sqrt{(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2}\end{aligned} \qquad (1.2\delta)$$

Συμπεραίνουμε ότι, ως προς το Καρτεσιανό, αδρανειακό σύστημα (O,x) κάθε υποσύνολο M_t του M, του οποίου τα σημεία έχουν την ίδια χρονική συντεταγμένη (ct), είναι ένας τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος. Η Ευκλείδεια μετρική του M_t ως προς το (O,x) δίδεται από την 1.2δ.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

1.3 Οι μετασχηματισμοί Lorentz

Κάθε μετασχηματισμός μεταξύ δύο αδρανειακών Καρτεσιανών συστημάτων αναφοράς, στο χώρο Minkowski M, ονομάζεται "**μετασχηματισμός Lorentz**".

Ας θεωρήσουμε το αδρανειακό - Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O,x), όπου x=(x^0,x^1,x^2,x^3) και O σημείο του M με συντεταγμένες x_O=(0,0,0,0), που το θεωρούμε ως "αρχή" του συστήματος αναφοράς.
Έστω (O',x') ένα επίσης αδρανειακό και Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων που έχει κοινή αρχή με το (O,x):

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(0,0,0,0) = 0 \text{ για κάθε } \mu = 0,1,2,3 \qquad (1.3\alpha)$$

Επιπλέον, για να ευκολύνουμε τους υπολογισμούς υποθέτουμε ότι:

$$x^2 = x'^2,\ x^3 = x'^3 \qquad (1.3\beta)$$

<u>Δείξτε ότι</u>: Το σύνολο των μετασχηματισμών συντεταγμένων έχει τη δομή ομάδας με πράξη τη σύνθεση των μετασχηματισμών.

Από όλη αυτή τη μεγάλη ομάδα, εστιάζουμε την έρευνά μας στην ανεύρεση της αναλυτικής έκφρασης των μετασχηματισμών που είναι μέλη μιας μονοπαραμετρικής υποομάδας της (ας τη συμβολίσουμε $SO^+(1,1)$), με κοινή ιδιότητα να διατηρούν αναλλοίωτα τα αδρανειακά Καρτεσιανά συστήματα αναφοράς του χώρου Minkowski M [4,9] και να ικανοποιούν τις συνθήκες 1.3α και 1.3β. Αφού οι μετασχηματισμοί της $SO^+(1,1)$ διατηρούν τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, εντάσσονται, εξ ορισμού, στην οικογένεια των μετασχηματισμών Lorentz. Κάθε μέλος της $SO^+(1,1)$ συμβολίζεται με $x'^{\mu} = T^{\mu}(x;\theta)$ όπου θ μια "κανονική" παράμετρος, που προσδιορίζει την προσθετική (Abelian)[9] δομή μιας μονοπαραμετρικής ομάδας[12]:

$$x''^{\kappa} = T^{\kappa}(x';\theta')$$

$$x''^{\kappa} = T^{\kappa}(x';\theta') = T^{\kappa}(T(x;\theta);\theta') = T^{\kappa}(x;\theta+\theta') \qquad (1.3\gamma)$$

$$T^{\mu}(\mathrm{x};0) = x^{\mu}\,,\; T\left(T(\mathrm{x};\theta);-\theta\right) = T(\mathrm{x};0) = \mathrm{x} \qquad (1.3δ)$$

Έστω $\delta\theta$ μια απειροστή μεταβολή της παραμέτρου θ. Ορίζουμε τον απειροστό μετασχηματισμό (infinitesimal transformation) από τη σχέση:

$$x'^{\mu} + \delta x'^{\mu} \underset{def}{=} T^{\mu}(\mathrm{x}';\delta\theta) \qquad (1.3ε)$$

Αναπτύσσουμε το δεξί μέρος 1.3ε σε σειρά Taylor ως προς τη μεταβλητή θ και διατηρούμε όρους μέχρι και πρώτης τάξης:

$$x'^{\mu} + \delta x'^{\mu} = x'^{\mu} + \left.\frac{\partial T^{\mu}(\mathrm{x}';\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} \delta\theta \qquad (1.3ζ)$$

Οι ποσότητες:

$$h^{\mu}(\mathrm{x}') \underset{def}{=} \left.\frac{\partial T^{\mu}(\mathrm{x}';\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=0}\,,\; \mu = 0,1,2,3 \qquad (1.3η)$$

... ορίζονται ως "γεννήτορες" (generators) της ομάδας των μετασχηματισμών $SO^{+}(1,1)$.
Από τις 1.3ζ και 1.3η συνεπάγεται ότι αν είναι γνωστοί οι γεννήτορες, οι μετασχηματισμοί της $SO^{+}(1,1)$ προκύπτουν ως λύσεις των εξισώσεων:

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial\theta} = h^{\mu}(\mathrm{x}') \qquad (1.3θ)$$

... με αρχικές συνθήκες: $x'^{\mu}(0) = T^{\mu}(\mathrm{x};0) = x^{\mu}$

Πώς υπολογίζουμε τους γεννήτορες της $SO^{+}(1,1)$ *από την απαίτηση οι μετασχηματισμοί* $x'=T(\mathrm{x},\theta)$ *να διατηρούν τον αδρανειακό και Καρτεσιανό χαρακτήρα των συστημάτων αναφοράς* (O,x) και (O',x')*;*
Αφού ο μετασχηματισμός διατηρεί τον αδρανειακό και Καρτεσιανό χαρακτήρα των (O,x) και (O',x'), συνεπάγεται ότι και στα δύο συστήματα ο πίνακας του μετρικού τανυστή έχει τη μορφή:

$$\left[g_{\mu\nu}\right] = \left[g'_{\mu\nu}\right] = \left[\eta_{\mu\nu}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον, όπως είδαμε (σχέση 1.2β), το απειροστό διάστημα διατηρείται αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων:

$$\Delta s^2 = \left\|\Delta X\right\|^2 = \left\langle \Delta X, \Delta X \right\rangle = \eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} = \eta_{\mu\nu}\Delta x'^{\mu}\Delta x'^{\nu} \qquad (1.3ι)$$

Θεωρούμε τον απειροστό μετασχηματισμό $x'^{\mu} = T^{\mu}(\mathrm{x};\delta\theta)$ και βρίσκουμε πώς μετασχηματίζονται οι συνιστώσες Δx^{μ}, μ=0,1,2,3 του απειροστού διανύσματος ΔX:

$$x'^{\mu} = T^{\mu}(\mathrm{x};\delta\theta) \approx x^{\mu} + h^{\mu}(\mathrm{x})\delta\theta \qquad (1.3κ)$$

$$\Delta x'^{\mu} = \Delta x^{\mu} + \Delta h^{\mu}(\mathrm{x})\delta\theta = \Delta x^{\mu} + \Delta x^{\nu}\partial_{\nu}h^{\mu}(\mathrm{x})\delta\theta = \left(\delta^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu}h^{\mu}(\mathrm{x})\delta\theta\right)\Delta x^{\nu} \qquad (1.3λ)$$

ή:

$$\Delta x'^{\mu} = J^{\mu}{}_{\nu}(\mathrm{x})\Delta x^{\nu} \text{ όπου: } J^{\mu}{}_{\nu}(\mathrm{x}) = \delta^{\mu}_{\nu} + \partial_{\nu}h^{\mu}(\mathrm{x})\delta\theta \qquad (1.3μ)$$

Ο πίνακας:

$$\left[J^{\mu}{}_{\nu}(\mathrm{x})\right] = I + \delta\theta\left[\partial_{\nu}h^{\mu}(\mathrm{x})\right]$$

...είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του απειροστού μετασχηματισμού 1.3κ.

Σύμφωνα με τις συνθήκες 1.3β, οι 1.3κ και 1.3λ γράφονται:

$$\begin{aligned} & x'^{0} = T^{0}(x^{0},x^{1};\delta\theta) \approx x^{0} + h^{0}(x^{0},x^{1})\delta\theta\,,\; x'^{1} = T^{1}(x^{0},x^{1};\delta\theta) \approx x^{1} + h^{1}(x^{0},x^{1})\delta\theta \\ & x'^{2} = x^{2}\,,\; x'^{3} = x^{3} \Rightarrow h^{2}(\mathrm{x}) = h^{3}(\mathrm{x}) = 0 \end{aligned} \qquad (1.3ν)$$

$$\Delta x'^0 = \Delta x^0 + \Delta h^0(x^0,x^1)\delta\theta = \Delta x^0 + \delta\theta\left(\partial_0 h^0(x^0,x^1)\Delta x^0 + \partial_1 h^1(x^0,x^1)\Delta x^1\right)$$
$$\Delta x'^1 = \Delta x^1 + \Delta h^1(x^0,x^1)\delta\theta = \Delta x^1 + \delta\theta\left(\partial_0 h^1(x^0,x^1)\Delta x^0 + \partial_1 h^1(x^0,x^1)\Delta x^1\right) \qquad (1.3\xi)$$
$$\Delta x'^2 = \Delta x^2\,,\ \Delta x'^3 = \Delta x^3$$

Ο Ιακωβιανός πίνακας του απειροστού μετασχηματισμού έχει τη μορφή:

$$\left[J^\mu{}_\nu\right] = \left[\partial_\nu x'^\mu\right] = \begin{pmatrix} J_0^0 & J_0^1 & 0 & 0 \\ J_1^0 & J_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.3\text{ο})$$

όπου: $J^0{}_0 = 1 + \partial_0 h^0\delta\theta,\ J^0{}_1(x) = \partial_1 h^0\delta\theta,\ J^1{}_0 = \partial_0 h^1\delta\theta,\ J^1{}_1 = 1 + \partial_1 h^1\delta\theta$

Από τις 1.3ι, 1.3μ, και 1.3ο, καταλήγουμε στις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu = \eta_{\kappa\lambda}J^\kappa{}_\mu J^\lambda{}_\nu\Delta x^\mu\Delta x^\nu \Rightarrow \eta_{\mu\nu} = \eta_{\kappa\lambda}J^\kappa{}_\mu J^\lambda{}_\nu$$
$$\eta_{00} = 1 = \left(J^0{}_0\right)^2 - \left(J^1{}_0\right)^2,\ \eta_{01} = 0 = J^0{}_0 J^0{}_1 - J^1{}_0 J^1{}_1$$
$$\eta_{10} = 0 = J^0{}_1 J^0{}_0 - J^1{}_1 J^1{}_0,\ \eta_{11} = -1 = \left(J^0{}_1\right)^2 - \left(J^1{}_1\right)^2 \qquad (1.3\pi)$$

$$1 = \left(1 + \partial_0 h^0\delta\theta\right)^2 - \left(\partial_0 h^1\delta\theta\right)^2 \Rightarrow \partial_0 h^0 = 0$$
$$\left(1 + \partial_0 h^0\delta\theta\right)\partial_1 h^0\delta\theta = \partial_0 h^1\delta\theta\left(1 + \partial_1 h^1\delta\theta\right) \Rightarrow \partial_1 h^0 = \partial_0 h^1$$
$$\partial_1 h^0\delta\theta\left(1 + \partial_0 h^0\delta\theta\right) = \left(1 + \partial_1 h^1\delta\theta\right)\partial_0 h^1\delta\theta \Rightarrow \partial_1 h^0 = \partial_0 h^1$$
$$-1 = \left(\partial_1 h^0\delta\theta\right)^2 - \left(1 + \partial_1 h^1\delta\theta\right)^2 \Rightarrow \partial_1 h^1 = 0$$

$$\partial_0 h^0 = 0 \Rightarrow h^0 = h^0\left(x^1\right),\ \partial_1 h^1 = 0 \Rightarrow h^1 = h^1\left(x^0\right)$$

$$\partial_1 h^0 = \partial_0 h^1 \Rightarrow \frac{\partial h^0\left(x^1\right)}{\partial x^1} = \frac{\partial h^1\left(x^0\right)}{\partial x^0} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 h^0\left(x^1\right)}{\partial\left(x^1\right)^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 h^1\left(x^0\right)}{\partial\left(x^0\right)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{h^0 = \lambda x^1\,,\ h^1 = \lambda x^0\right\} \qquad (1.3\rho)$$

Μπορούμε πάντοτε να διαλέξουμε τη μονάδα μέτρησης της παραμέτρου θ έτσι ώστε $\lambda=1$, οπότε, από τις 1.3ρ και 1.3θ, προκύπτει ότι οι μετασχηματισμοί $x'^\mu = T^\mu\left(x;\theta\right)$ είναι λύσεις των εξισώσεων:

$$\frac{\partial x'^0}{\partial\theta} = x'^1\,,\ \frac{\partial x'^1}{\partial\theta} = x'^0\,,\ \left(x'^0(0), x'^1(0)\right) = \left(x^0, x^1\right) \qquad (1.3\sigma)$$

Ή, σε διανυσματική μορφή:

$$\frac{d}{d\theta}\left(x'^0, x'^1\right) = \left(x'^0, x'^1\right)\sigma \text{ όπου: } \sigma \underset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.3\tau)$$

Η λύση της 1.3τ μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή μιας δυναμοσειράς Taylor:

$$\left(x'^0, x'^1\right) = \left(x^0, x^1\right)\left(I + \sigma\theta + \sigma^2\frac{\theta^2}{2!} + \sigma^3\frac{\theta^3}{3!} + \sigma^4\frac{\theta^4}{4!} + \ldots\right)$$

Δεδομένου ότι ισχύει $\sigma^2 = I$ μπορούμε να αναδιατάξουμε τους όρους της δυναμοσειράς ως εξής:

$$\left(x'^0, x'^1\right) = \left(x^0, x^1\right)\left(I\left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots\right) + \sigma\left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \ldots\right)\right) =$$

$$= \left(x^0, x^1\right)\left(I \cosh\theta + \sigma \sinh\theta\right) = \left(x^0, x^1\right)\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

Καταλήγουμε ότι η ειδική μορφή των μετασχηματισμών Lorentz που έχουμε συνθέσει, εκφράζονται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x'^0 &= T^0\left(x,\theta\right) = x^0 \cosh\theta + x^1 \sinh\theta \\ x'^1 &= T^1\left(x,\theta\right) = x^0 \sinh\theta + x^1 \cosh\theta \\ x'^2 &= T^2\left(x,\theta\right) = x^2 \\ x'^3 &= T^3\left(x,\theta\right) = x^3 \end{aligned} \qquad (1.3υ)$$

Οι μετασχηματισμοί $T(x,\theta)$ είναι γραμμικοί, με πίνακα:

$$\left[L'^{\mu}{}_{\nu}\right] = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.3φ)$$

Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός των συντεταγμένων του απειροστού διανύσματος:

$$\Delta X = \overrightarrow{XY} = e_\mu(x)\Delta x^\mu \in T_X M$$

... προσδιορίζεται αναλυτικά από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \Delta x'^0 &= \Delta x^0 \cosh\theta + \Delta x^1 \sinh\theta \\ \Delta x'^1 &= \Delta x^0 \sinh\theta + \Delta x^1 \cosh\theta \\ \Delta x'^2 &= \Delta x^2 \\ \Delta x'^3 &= \Delta x^3 \end{aligned} \qquad (1.3χ)$$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

Ενότητα 2
Σωματίδια σε έναν χώρο Minkowski - Κοσμική γραμμή - Ιδιόχρονος - Τετρα-ταχύτητα - Τετρα-ορμή

Στη δεύτερη Ενότητα εισάγονται οι απαραίτητες έννοιες για τη διαμόρφωση των διαφορικών εξισώσεων της κίνησης ενός σωματιδίου εντός του χωροχρονικού συνεχούς: η "αδρανειακή μάζα", η "κοσμική γραμμή", ο "ιδιόχρονος", η "χρονική συντεταγμένη σωματιδίου" η "τετρα-ταχύτητα και η "τετρα-ορμή".

Σωματίδια σε χώρο Minkowski
Ως "σωματίδιο" θεωρούμε ένα σημείο του χώρου Minkowski M το οποίο εφοδιάζουμε με ένα βαθμωτό μέγεθος m που το ονομάζουμε μάζα ηρεμίας ή απλά "μάζα" του σωματιδίου. Η μάζα έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες: α) οι τιμές της είναι θετικές ή μηδέν, β) διατηρείται αναλλοίωτη κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων.

Κοσμική γραμμή - Ιδιόχρονος και χρονική συντεταγμένη σωματιδίου
Έστω αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O,x) του M, και P σωματίδιο που κινείται ως προς το (O,x). Το σωματίδιο διαγράφει μια καμπύλη στο M που θα την ονομάζουμε "**κοσμική γραμμή του P** (the world line of P)" (θα χρησιμοποιούμε και τους ισοδύναμους όρους: "κοσμική καμπύλη", ή "κοσμική τροχιά" του P).

Σύμφωνα με τα λεχθέντα στην Ενότητα 1, η κοσμική γραμμή C_P του P είναι εικόνα μιας καμπύλης c_P του χώρου των συντεταγμένων R^4, μέσω της απεικόνισης $Φ$:
$$C_P = Φ \circ c_P\,,\ X_P = C_P(σ) = Φ\big(c_P(σ)\big)$$
το $σ$ είναι μια αυθαίρετη παράμετρος που χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης c_P:
$$c_P : x_P^{\ μ} = c_P^{\ μ}(σ)\,,\ μ = 0,1,2,3$$
Ή, δεδομένου ότι $x_P^0=ct$:
$$t_P(σ) = \frac{1}{c} c_P^{\ 0}(σ)\,,\ x_P^{\ j}(σ) = c_P^{\ j}(σ)\,,\ j = 1,2,3$$

Έστω $ΔX_P$ το απειροστό διάνυσμα που ορίζεται από τα γειτονικά σημεία $X_P(σ)$ και $X_P(σ+Δσ)$ της κοσμικής γραμμής C_P του P. Το $ΔX_P$ είναι διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου $T_{X_P}M$ και εφαπτόμενο στην καμπύλη C_P στο σημείο της $X_P=C_P(σ)$ (Ενότητα 1):
$$ΔX_P = ΔΦ_O(\mathrm{x}_P) = \partial_μ Φ_O(\mathrm{x}_P)\,Δx_P^{\ μ} = e_μ(\mathrm{x}_P)\,\dot{x}_P^{\ μ} Δσ\,,\ \dot{x}_P^{\ μ} \underset{def}{=} \frac{dx_P^{\ μ}}{dσ}\,,\ Δσ \to 0$$
Το απειροστό διάστημα $Δs_P(σ)$ μεταξύ των σημείων $X_P(σ)$ και $X_P(σ+Δσ)$, επί της κοσμικής γραμμής C_P υπολογίζεται από τις ισότητες:
$$Δs_P(σ) = \sqrt{\langle ΔX_P(σ), ΔX_P(σ)\rangle} = \sqrt{η_{μν} Δx_P^{\ μ} Δx_P^{\ ν}} =$$
$$= \sqrt{c^2 Δt_P^{\ 2} - (Δx_P^{\ 1})^2 - (Δx_P^{\ 2})^2 - (Δx_P^{\ 3})^2} = \sqrt{c^2\left(\frac{dt_P}{dσ}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{r}_P}{dσ}\right)^2} \qquad (2.α)$$
$$\frac{d\vec{r}_P}{dσ} \underset{def}{=} e_j \dot{x}_P^{\ j}\,,\ j = 1,2,3 \text{ και: } \left(\frac{d\vec{r}_P}{dσ}\right)^2 = \frac{d\vec{r}_P}{dσ}\cdot\frac{d\vec{r}_P}{dσ} = \sqrt{\left(\dot{x}_P^{\ 1}\right)^2 + \left(\dot{x}_P^{\ 2}\right)^2 + \left(\dot{x}_P^{\ 3}\right)^2}$$

<u>Παρατήρηση 1</u>: Ας θεωρήσουμε κοσμική γραμμή της οποίας το απειροστό διάστημα είναι ίσο με το μηδέν για κάθε τιμή του $σ$:
$$Δs_P(σ) = 0 \Rightarrow c^2\left(\frac{dt_P}{dσ}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{r}_P}{dσ}\right)^2 = 0$$
Η χωρική ταχύτητα του σωματιδίου P στο σημείο $X_P = Φ\big(c_P(σ)\big)$ της κοσμικής γραμμής του, ως προς το σύστημα αναφοράς (O,x) δίδεται από τη σχέση: $\vec{v}_P = \dfrac{d\vec{r}_P}{dt_P}$ Συμπεραίνουμε ότι: $v_P=c$

Δηλαδή το μέτρο της χωρικής ταχύτητας του Ρ είναι ίσο με την ταχύτητα του φωτός c. Η κοσμική γραμμή του Ρ λέμε ότι είναι "φωτοειδής".
Αν το απειροστό διάστημα της κοσμικής γραμμής είναι θετικό, τότε ισχύει $v_P<c$ σε κάθε σημείο της, και η καμπύλη ονομάζεται "χρονοειδής". Στην περίπτωση που $v_P>c$ το απειροστό διάστημα επί της κοσμικής γραμμής δεν είναι πραγματικό. Τα σωματίδια με μάζα διαφορετική από το μηδέν γράφουν χρονοειδείς καμπύλες στο χώρο Minkowski. Το μέτρο της χωρικής τους ταχύτητας είναι πάντοτε μικρότερο του c. Στη συνέχεια, θα θεωρούμε ότι οι κοσμικές γραμμές των κινούμενων σωματιδίων στο χώρο Minkowski είναι πάντοτε χρονοειδείς, εκτός κι αν δηλωθεί κάτι άλλο.

Ένα σωματίδιο Ρ με μάζα m>0, διαγράφει μια (χρονοειδή) κοσμική καμπύλη C_P του χώρου Minkowski M. Οι συντεταγμένες του Ρ ως προς ένα αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα (O,x), όπου O σταθερό σημείο του M, έχουν τη μορφή: $\left(ct_P, x_P{}^1, x_P{}^2, x_P{}^3\right)$ και το διάστημα μεταξύ δύο γειτονικών σημείων $X_P(\sigma)$ και $X_P(\sigma+\Delta\sigma)$, της C_P είναι:

$$\Delta s_P = \sqrt{c^2\Delta t_P{}^2 - (\Delta x_P{}^1)^2 - (\Delta x_P{}^2)^2 - (\Delta x_P{}^3)^2}$$

Οι χρόνοι t_P στις διαδοχικές θέσεις του Ρ επί της C_P μετρώνται με **συγχρονισμένα** ίδια χρονόμετρα που είναι τοποθετημένα στα χωρικά σημεία $\left(x_P{}^1, x_P{}^2, x_P{}^3\right)$ της C_P. Ο τρόπος που επιτυγχάνεται ο συγχρονισμός των χρονομέτρων σε ένα χώρο Minkowski, αναλύεται διεξοδικά στην Ενότητα 3.

Ας θεωρήσουμε ένα στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς που έχει αρχή το Ρ (το συμβολίζουμε: ΑΣΑ-Ρ). Οι συντεταγμένες του Ρ στα διάφορα σημεία της κοσμικής γραμμής του ως προς το αντίστοιχο ΑΣΑ-Ρ έχουν τη μορφή: $\left(c\tau_P, 0, 0, 0\right)$ όπου τ_P είναι η ένδειξη ενός χρονομέτρου που κινείται μαζί με το Ρ. Το διάστημα μεταξύ των σημείων $X_P(\sigma)$ και $X_P(\sigma+\Delta\sigma)$ της C_P ως προς το ΑΣΑ-Ρ εκφράζεται από τη:

$$\Delta s_P = c\Delta\tau_P$$

Το απειροστό διάστημα μεταξύ δύο γειτονικών σημείων του χώρου Minkowski διατηρείται αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων (σχέση 1.2β). Επομένως, αληθεύει η σχέση:

$$\Delta s_P = c\Delta\tau_P = \sqrt{c^2\Delta t_P{}^2 - (\Delta x_P{}^1)^2 - (\Delta x_P{}^2)^2 - (\Delta x_P{}^3)^2} \qquad (2.\beta)$$

Ορίζουμε τον ιδιόχρονο τ_P του Ρ, ως το χρόνο που μετράει το χρονόμετρο που κινείται μαζί με το Ρ επί της κοσμικής καμπύλης, που διαγράφει στο χωροχρονικό συνεχές M:

$$\Delta\tau_P = \frac{1}{c}\Delta s_P \qquad (2.\gamma)$$

Από τις 2.β και 2.γ συνεπάγεται ότι οι ενδείξεις του χρονομέτρου που κινείται με το Ρ και των συγχρονισμένων χρονομέτρων του αδρανειακού συστήματος (O,x), από τα οποία διέρχεται το Ρ, είναι γενικά διαφορετικές. Τα χρονικά διαστήματα που μετράμε κατά την μετακίνηση του Ρ από το σημείο $X_P(\sigma)$ στο $X_P(\sigma+\Delta\sigma)$ της C_P με το χρονόμετρο του Ρ και με τα χρονόμετρα του (O,x) σχετίζονται με την εξίσωση:

$$\Delta\tau_P = \Delta t_P\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\vec{r}_P}{dt_P}\right)^2} \qquad (2.\delta)$$

<u>Παρατήρηση 2</u>: Είδαμε ότι ο ιδιόχρονος του σωματιδίου Ρ μετριέται με ένα χρονόμετρο που κινείται μαζί με το Ρ. Αντίθετα, η μέτρηση της χρονικής συντεταγμένης t_P του Ρ κατά μήκος της κοσμικής τροχιάς του, επιτυγχάνεται από ίδια, συγχρονισμένα χρονόμετρα που είναι αγκιστρωμένα σε κάθε χωρικό σημείο σημείο του χωροχρονικού συνεχούς M. Ας θεωρήσουμε ότι το σωματίδιο Ρ διατηρείται ακίνητο στο σταθερό χωρικό σημείο $A \leftrightarrow \vec{r}_A = e_1x_A{}^1 + e_2x_A{}^2 + e_3x_A{}^3$ του αδρανειακού Καρτεσιανού συστήματος αναφοράς (O,x). Τότε, η κοσμική τροχιά του Ρ προσδιορίζεται από την καμπύλη:

$C_A : X_A(t_A) = \Phi\left(t_A, \vec{r}_A\right)$ όπου: $\Delta\vec{r}_A = 0$ ή: $\vec{r}_A = \text{const.}$

Ο χρόνος t_A μετριέται με ένα χρονόμετρο αγκιστρωμένο στο A. Επομένως, ταυτίζεται με τη χρονική συντεταγμένη του Ρ:

$t_P = t_A \Rightarrow \Delta t_P = \Delta t_A$

Το απειροστό διάστημα επί της κοσμικής γραμμής C_A του P, υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$\Delta s_A{}^2 = \langle \Delta X_A, \Delta X_A \rangle$ όπου: $\Delta X_A = e_0(X_A)c\Delta t_A$

$\Delta s_A{}^2 = c^2 \Delta t_A{}^2 \Rightarrow \Delta s_A = c\Delta t_A$

Ο ιδιόχρονος του P, σύμφωνα με τον ορισμό 2.γ, δίδεται από τη:

$\Delta\tau_P = \frac{1}{c}\Delta s_A = \Delta t_A$

Συμπέρασμα: Ο ιδιόχρονος ενός σωματιδίου που διατηρείται ακίνητο σε σταθερό χωρικό σημείο ενός αδρανειακού Καρτεσιανού συστήματος αναφοράς, ταυτίζεται με τη χρονική συντεταγμένη του.

Παρατήρηση 3: Θεωρούμε δύο αδρανειακά, Καρτεσιανά συστήματα αναφοράς (O,x) και (O',x') που συνδέονται με τον μετασχηματισμό Lorentz 1.3φ της παραγράφου 1.3. Η κοσμική γραμμή της χωρικής αρχής O' του (O',x') ως προς το (O,x), δίδεται από την αναλυτική έκφραση:

$x_{(O')}{}^0 = ct\,,\ x_{(O')}{}^1 = vt\,,\ x_{(O')}{}^2 = 0\,,\ x_{(O')}{}^3 = 0$

...όπου t ο χρόνος που καταγράφουν τα συγχρονισμένα χρονόμετρα του (O,x) επί της κοσμικής γραμμής του O' (Ενότητα 3).

Δείξτε ότι: η παράμετρος θ που προσδιορίζει τον πίνακα του μετασχηματισμού Lorentz, υπολογίζεται από τη σχέση:

$\tanh\theta = -\frac{v}{c}$

Παρατήρηση 4: Η αναλυτική έκφραση της κοσμικής γραμμής ενός σωματιδίου μεταβάλλεται κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων. Η προσομοίωση της κίνησης ενός σωματιδίου ως προς δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς στο πλαίσιο της Σχετικιστικής και της Νευτώνειας Μηχανικής, καθώς και η και η ανάλυση των αντιστοίχων μαθηματικών μοντέλων βρίσκεται στις διευθύνσεις:

α) World Lines Transform: the relativistic and the Newtonian point of view (sch.gr)
β) Relativistic and Newtonian World Lines JS Model (compadre.org)

Τετρα-ταχύτητα και τετρα-ορμή σωματιδίου

Έστω C_P η κοσμική γραμμή του σωματιδίου P στο χώρο Minkowski M. Εκφράζουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της C_P με ελεύθερη παράμετρο τον ιδιόχρονο τ_P του P:

$X_P = C_P(\tau_P) = (\Phi \circ \mathrm{x}_P)(\tau_P)$

$x_P{}^\mu = x_P{}^\mu(\tau_P)$ όπου $x_P{}^0 = ct_P$ και $\vec{r}_P = \left(x_P{}^1, x_P{}^2 x_P{}^3\right)$

Από τις σχέσεις 2.α και 2.β συνεπάγεται ότι τα σημεία της C_P ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\left(\frac{dx_P{}^0}{d\tau_P}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{r}_P}{d\tau_P}\right)^2 = c^2 \text{ ή: } c^2\left(\frac{dt_P}{d\tau_P}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{r}_P}{d\tau_P}\right)^2 = c^2 \qquad (2.\varepsilon)$$

Σε κάθε σημείο της C_P ορίζουμε το διάνυσμα $U_P(X_P) \in T_{X_P}M$:

$$U_P(X_P) \underset{def}{=} e_\mu(X_P)\frac{dx_P{}^\mu}{d\tau_p}\,,\ U_P{}^\mu \equiv u_P{}^\mu = \frac{dx_P{}^\mu}{d\tau_p} \qquad (2.\zeta)$$

Η 2.ζ ορίζει το διανυσματικό πεδίο $U_P(X_P)$ επί της κοσμικής γραμμής C_P του P. Το $U_P(X_P)$ είναι εφαπτόμενο στη C_P και ονομάζεται "τετρα-ταχύτητα" του P. Από τις 2.3 και 2.4 συνεπάγεται ότι η norm της U_P είναι σταθερή και ίση με c σε κάθε σημείο της κοσμικής γραμμής του P:

$$\langle U_P, U_P \rangle = \eta_{\mu\nu}\frac{\Delta x_P{}^\mu}{\Delta\tau_p}\frac{\Delta x_P{}^\nu}{\Delta\tau_p} = \frac{c^2(\Delta\tau_P)^2}{(\Delta\tau_P)^2} = c^2 \Rightarrow \|U_P\| = c \qquad (2.\eta)$$

Η τετρα-ορμή του σωματιδίου P ορίζεται από τη σχέση:

$$P_P = mU_P = e_\mu(X_P)mu_P{}^\mu \Rightarrow P_P{}^\mu = mu_P{}^\mu \qquad (2.\theta)$$

Η τετρα-ορμή ενός σωματιδίου P είναι επίσης ένα διανυσματικό πεδίο του *M*, ορισμένο επί της κοσμικής γραμμής του σωματιδίου P. Η norm της τετρα-ορμής σε κάθε σημείο της C_P είναι σταθερή: $\|P_P\| = mc$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

Ενότητα 3
Συγχρονισμός χρονομέτρων σε χώρο Minkowski - Η έννοια του "παγκόσμιου χρόνου" (world time)

Στην τρίτη Ενότητα, αναλύεται ο τρόπος συγχρονισμού των χρονομέτρων που τοποθετούνται στα χωρικά σημεία του χωροχρονικού συνεχούς και εισάγεται η έννοια του "παγκόσμιου χρόνου". Ορίζουμε την έννοια της "ταυτοχρονικής" χωρικής υποπολλαπλότητας χώρου Minkowski και διερευνούμε τη γεωμετρική δομή της ως προς ένα αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

3.1 Συγχρονισμός χρονομέτρων ως προς ένα αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς

Στη Νευτώνεια Μηχανική, η τροχιά ενός σωματιδίου εκφράζεται αναλυτικά με παραμετρικές εξισώσεις των οποίων ελεύθερη παράμετρος είναι ο απόλυτος χρόνος t. Στη Θεωρία της Σχετικότητας ο χρόνος δεν είναι απόλυτος. Είναι μια από τις συντεταγμένες που προσδιορίζουν τα σημεία της κοσμικής γραμμής του συγκεκριμένου σωματιδίου στο χωροχρονικό συνεχές M. Παρόλα αυτά, θα δείξουμε ότι σε κάθε αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα (O,x) ενός χώρου Minkowski, μπορούμε να συγχρονίσουμε όλα τα χρονόμετρα που χρησιμοποιούμε για να μετράμε τη χρονική συντεταγμένη σε κάθε χωρικό σημείο του M. Η κοινή ένδειξη των χρονομέτρων που τοποθετούμε σε κάθε σημείο του συστήματος αναφοράς (O,x) με χωρικές συντεταγμένες $\left(x^1,x^2,x^3\right)\in R^3$ ονομάζεται "**παγκόσμιος χρόνος**" (world time).

Στην Ενότητα 2 είδαμε ότι η χρονική συντεταγμένη ενός σωματιδίου P που κινείται στο χώρο Minkowski M μετριέται με ίδια χρονόμετρα που είναι σταθερά τοποθετημένα σε κάθε χωρικό σημείο του M. Γενικά, αυτά τα χρονόμετρα δείχνουν διαφορετικές τιμές. Για παράδειγμα, όταν το χρονόμετρο που βρίσκεται στο χωρικό σημείο Α δείχνει t_A=1s, το χρονόμετρο που βρίσκεται στο Β μπορεί να δείχνει t_B=2s. Ή αλλιώς τα γεγονότα "το χρονόμετρο στο Α δείχνει t_A=1s" και "το χρονόμετρο στο Β δείχνει t_B=2s" συμβαίνουν ταυτόχρονα.
Πώς πρέπει να ρυθμίσουμε τα χρονόμετρα ώστε ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο Α *να γνωρίζει ότι "αν το χρονόμετρο μου δείχνει την ένδειξη t_A τότε και η ένδειξη του χρονομέτρου που βρίσκεται στο* Β *είναι $t_B=t_A$;"*
Η όποια ρύθμιση των χρονομέτρων που βρίσκονται στα χωρικά σημεία Α και Β μπορεί να επιτευχθεί με ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των παρατηρητών Α και Β που βρίσκονται στα αντίστοιχα σημεία. Η ανταλλαγή των πληροφοριών πραγματοποιείται με τη μεταφορά φωτεινών σημάτων μεταξύ των Α και Β.
Ας υποθέσουμε ότι ο παρατηρητής Α θέλει να ρυθμίσει το χρονόμετρο Α, ώστε οι ενδείξεις του να είναι ίδιες με τις ενδείξεις του Β. Τη στιγμή $\tilde{t}_A^{(1)}$ σύμφωνα με το χρονόμετρο Α, στέλνει ένα φωτεινό σήμα προς το Β. Το σήμα φτάνει στο Β, καταγράφει την ένδειξη $t_B^{(\alpha\varphi.)}$ του χρονομέτρου Β τη στιγμή της άφιξης του σήματος, και επιστρέφει στο Α. Έστω ότι τη στιγμή που το σήμα επιστρέφει στο Α η ένδειξη του χρονομέτρου Α είναι $\tilde{t}_A^{(2)}$
Αν τα χρονόμετρα στα Α και Β ήταν συγχρονισμένα, οι αντίστοιχες ενδείξεις του Α θα ήταν:
$\tilde{t}_A^{(1)}\to t_A^{(1)}$ και $\tilde{t}_A^{(2)}\to t_A^{(2)}$
...όπου τα γεγονότα:
$\left(ct_A^{(1)},\vec{r}_A\right)$ και $\left(ct_B^{(\alpha\varphi.)},\vec{r}_B\right)$
καθώς και τα:
$\left(ct_B^{(\alpha\varphi.)},\vec{r}_B\right)$ και $\left(ct_A^{(2)},\vec{r}_A\right)$
...συνδέονται με φωτοειδείς κοσμικές γραμμές. Επομένως, δεδομένου ότι το σύστημα συντεταγμένων (O,x) είναι αδρανειακό και Καρτεσιανό, οι ενδείξεις $t_A^{(1)}$, $t_A^{(2)}$ του Α, πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες.

$$\begin{aligned}0&=c^2\left(t_B^{(\alpha\varphi.)}-t_A^{(1)}\right)^2-\left(AB\right)^2\\0&=c^2\left(t_B^{(\alpha\varphi.)}-t_A^{(2)}\right)^2-\left(AB\right)^2\end{aligned}\qquad(3.1\alpha)$$

Από τις 3.1α συνεπάγεται ότι τα $t_A^{(1)}$, $t_A^{(2)}$ είναι ρίζες της εξίσωσης (με άγνωστο το t_A):

$$0 = c^2\left(t_B^{(\alpha\varphi.)} - t_A\right)^2 - \left(AB\right)^2$$

Έπεται ότι:

$$t_A^{(1)} = t_B^{(\alpha\varphi.)} - \frac{1}{c}\left(AB\right),\ t_A^{(2)} = t_B^{(\alpha\varphi.)} + \frac{1}{c}\left(AB\right) \qquad (3.1\beta)$$

Οι σχέσεις 3.1β μας λένε ποιες πρέπει να ρυθμίσουμε τις ενδείξεις του χρονομέτρου Α τις στιγμές της εκπομπής και της επιστροφής του σήματος στο Α, με δεδομένα τα $t_B^{(\alpha\varphi.)}$ και (AB), ώστε τα δύο χρονόμετρα να είναι συγχρονισμένα.
Σύμφωνα με τον παρατηρητή στο Α, η χρονική στιγμή άφιξης του σήματος στο Β είναι ίση με:

$$t_A^{(\alpha\varphi.)} = t_A^{(1)} + \frac{(AB)}{c}$$

...οπότε, σύμφωνα με τις 3.1β, βρίσκουμε ότι:

$$t_A^{(\alpha\varphi.)} = t_A^{(1)} + \frac{(AB)}{c} = t_A^{(1)} + \frac{t_A^{(2)} - t_A^{(1)}}{2} = \frac{1}{2}\left(t_A^{(1)} + t_A^{(2)}\right) = t_B^{(\alpha\varphi.)} \qquad (3.1\gamma)$$

Συμπεραίνουμε ότι οι παρατηρητές Α και Β συμφωνούν ότι το σήμα έφτασε στο Β την ίδια χρονική στιγμή. Θα δούμε στην παράγραφο 3.3, ότι αυτό δεν συμβαίνει σε κάθε σύστημα συντεταγμένων. Το γεγονός της άφιξης του σήματος στο Β, συμβαίνει ταυτόχρονα για τους παρατηρητές Α και Β μόνον επειδή το σύστημα συντεταγμένων (O,x) είναι αδρανειακό.

Πώς ο παρατηρητής Α θα κάνει τη ρύθμιση του χρονομέτρου του, ώστε να επιτύχει συγχρονισμό με το Β;
Είδαμε ότι πρέπει να αλλάξει τις ενδείξεις του Α σύμφωνα με τις συνθήκες:

$$\tilde{t}_A^{(1)} \to t_A^{(1)} = t_B^{(\alpha\varphi.)} - \frac{1}{c}\left(AB\right),\ \tilde{t}_A^{(2)} \to t_A^{(2)} = t_B^{(\alpha\varphi.)} + \frac{1}{c}\left(AB\right) \qquad (3.1\delta)$$

Τα χρονόμετρα που έχουν τοποθετηθεί στα χωρικά σημεία του συστήματος συντεταγμένων είναι 'πανομοιότυπα'. *Τι σημαίνει 'πανομοιότυπα';* Έστω Χ και Υ δύο τυχαία χρονόμετρα. Τα τοποθετούμε στο ίδιο χωρικό σημείο Σ του συστήματος συντεταγμένων και καταγράφουμε τις αντίστοιχες (ταυτόχρονες) ενδείξεις τους:

$$\left(t_X^{(1)}, t_Y^{(1)}\right), \left(t_X^{(2)}, t_Y^{(2)}\right), \ldots \left(t_X^{(n)}, t_Y^{(n)}\right) \ldots$$

Τα Χ και Υ είναι πανομοιότυπα τότε και μόνον αν τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία του επιπέδου που ορίζεται από το Καρτεσιανό σύστημα αξόνων t_X, t_Y. Ή αλλιώς, εφόσον οι ταυτόχρονες ενδείξεις των Χ και Υ σχετίζονται με μια γραμμική σχέση:

$$t_X = \lambda \cdot t_Y + \beta \text{ όπου } \lambda,\ \beta\text{=σταθερά} \qquad (3.1\varepsilon)$$

Τα πανομοιότυπα χρονόμετρα Χ και Υ μπορούν πάντοτε να συγχρονιστούν, εφόσον επιλέξουμε λ=1 και β=0.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς και παρατηρήσεις, επανερχόμαστε στη ρύθμιση το χρονομέτρου του παρατηρητή στο Α. Αφού τα χρονόμετρα Α και Β είναι πανομοιότυπα, οι ενδείξεις τους συνδέονται με μια γραμμική σχέση (3.1ε):

$$t_A = \lambda \cdot \tilde{t}_A + \beta$$

Σύμφωνα με τις συνθήκες 3.1δ, βρίσκουμε:

$$\lambda = \frac{t_A^{(2)} - t_A^{(1)}}{\tilde{t}_A^{(2)} - \tilde{t}_A^{(1)}},\ \beta = \frac{1}{\tilde{t}_A^{(2)} - \tilde{t}_A^{(1)}}\left(t_A^{(1)}\tilde{t}_A^{(2)} - t_A^{(2)}\tilde{t}_A^{(1)}\right)$$

$$t_A = \frac{2}{c} \cdot \frac{(AB)}{\tilde{t}_A^{(2)} - \tilde{t}_A^{(1)}}\tilde{t}_A + \left(t_B^{(\alpha\varphi.)} - \frac{1}{c}(AB)\right) \qquad (3.1\zeta)$$

Συμπέρασμα: Σε ένα χώρο Minkowski, στο πλαίσιο ενός αδρανειακού - Καρτεσιανού συστήματος αναφοράς, μπορούμε να συγχρονίσουμε όλα τα χρονόμετρα που είναι τοποθετημένα στα χωρικά σημεία του συστήματος. Η κοινή ένδειξη των χρονομέτρων ονομάζεται "**παγκόσμιος χρόνος**" (world time).

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

3.2 Ταυτοχρονική υποπολλαπλότητα του *M* στο αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα (*O*,x)

Έστω σημείο *A* του *M*, που προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες ($ct_A, x_A^1, x_A^2, x_A^3$) στο αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα (*O*,x). Θα προσδιορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του *M*, που είναι ταυτόχρονα με το *A* και θα διερευνήσουμε τη γεωμετρική δομή του.

Εφόσον το *t* συμβολίζει τον παγκόσμιο χρόνο ως προς το (*O*,x) (παράγραφος 3.1), τα σημεία του *M* που είναι ταυτόχρονα με το *A*, έχουν χρονική συντεταγμένη ίση με ct_A. Δηλαδή, ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος αποτελείται από το σύνολο M_A των σημείων:

$X_A \in M : X_A \leftrightarrow \left(ct_A, x^1, x^2, x^3\right)$ όπου: $\left(x^1, x^2, x^3\right) \in R^3$

Το σύνολο M_A αποτελεί μια υπόπολλαπλότητα του *M*, που θα την ονομάζουμε "ταυτοχρονική υποπολλαπλότητα του *M* τη χρονική στιγμή t_A". Η γεωμετρία της M_A καθορίζεται από το πεδίο των στοιχείων βάσης των εφαπτόμενων χώρων της M_A και τον μετρικό τανυστή που επάγεται από αυτά επί της εφαπτόμενης δέσμης $TM_A = \bigcup\limits_{X_A \in M_A} T_{X_A} M_A$

Στις Καρτεσιανές συντεταγμένες του (*O*,x), κάθε σημείο $Y_A \in M_A$ που βρίσκεται σε απειροστή περιοχή του X_A, έχει την ίδια χρονική συντεταγμένη με το X_A. Επομένως ισχύει:

$$\left\{\Delta_Y X_A = \overrightarrow{X_A Y_A} \in T_{X_A} M_A \Rightarrow \Delta x^0 = 0\right\} \Rightarrow \left\{\Delta_Y X_A = e_j \Delta_Y x^j ,\ j = 1,2,3\right\} \Rightarrow \left\{T_{X_A} M_A \subset T_{X_A} M ,\ \left\langle \Delta_Y X_A , e_0 \right\rangle = 0\right\}$$

Παρατηρούμε ότι οι εφαπτόμενοι χώροι $T_{X_A} M_A$ που απαρτίζουν την εφαπτόμενη δέσμη της M_A είναι ορθογώνιοι με το χρονικό διάνυσμα βάσης $e_0(X_A) \in T_{X_A} M$:

$$\Delta_Y X_A \in T_{X_A} M_A \Leftrightarrow \left\langle \Delta_Y X_A , e_0(X_A) \right\rangle = 0 \qquad (3.2\alpha)$$

Η 3.2α μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως γενικότερος ορισμός των εφαπτόμενων χώρων της ταυτοχρονικής πολλαπλότητας M_A και σε περιπτώσεις όπου το σύστημα συντεταγμένων δεν είναι αδρανειακό και Καρτεσιανό (βλέπε: Ενότητα 5).

Η μετρική επί της εφαπτόμενης δέσμης της M_A επάγεται από την μετρική του χώρου Minkowski *M* ως προς το αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα (*O*,x), σύμφωνα με τη σχέση:

$$\begin{aligned} \left\|\Delta X_A\right\|^2 &\underset{\text{ορισμ.}}{=} -\left\langle \Delta X_A , \Delta X_A \right\rangle = -\left\langle e_j \Delta x^j , e_k \Delta x^k \right\rangle = -\eta_{jk} \Delta x^j \Delta x^k = \\ &= (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \end{aligned} \qquad (3.2\beta)$$

Από την 3.2β συμπεραίνουμε ότι: **Κάθε ταυτοχρονική πολλαπλότητα ενός χώρου Minkowski ως προς ένα αδρανειακό και Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, είναι ένας τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος.**

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

3.3 Συγχρονισμός χρονομέτρων σε χώρο Minkowski ως προς ένα αυθαίρετο, στατικό σύστημα συντεταγμένων

Στην παράγραφο 3.1 διερευνήσαμε πώς μπορούμε να συγχρονίσουμε τα χρονόμετρα που τοποθετούμε στα χωρικά σημεία ενός χώρου Minkowski *M*, ως προς ένα αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (*O*,x). Εδώ, κάνουμε την ίδια δουλειά ως προς ένα "στατικό", όχι κατ' ανάγκη αδρανειακό, σύστημα αναφοράς (*O'*,x') του *M*.

Ξεκινάμε με τον ορισμό του "στατικού" συστήματος αναφοράς.

Έστω (*O*,x) αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς και ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων $x^\mu = x^\mu(\mathrm{x}')$ που δεν είναι κατ' ανάγκη μετασχηματισμός Lorentz.

Οι συντεταγμένες με τόνο αναφέρονται στο νέο σύστημα (*O'*,x'). Σύμφωνα με τη σχέση 1.ξ της Ενότητας 1, ο μετρικός τανυστής ως προς το (*O'*,x') έχει τη μορφή:

$$g'_{\mu\nu}(\mathrm{x}') = \eta_{\kappa\lambda} \partial'_\mu x^\kappa \partial'_\nu x^\lambda \Rightarrow g'_{\mu\nu}(\mathrm{x}') = \partial'_\mu x^0 \partial'_\nu x^0 - \partial'_\mu x^1 \partial'_\nu x^1 - \partial'_\mu x^2 \partial'_\nu x^2 - \partial'_\mu x^3 \partial'_\nu x^3$$

<u>Ορισμός</u>: Ονομάζουμε το σύστημα συντεταγμένων (*O'*,x') "στατικό" εφόσον τα στοιχεία $g'_{\mu\nu}$ του μετρικού τανυστή στο (*O'*,x') είναι ανεξάρτητα της χρονικής συντεταγμένης x'^0:

$$\partial'_0 g'_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^0} = 0$$

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία X και Y του χώρου Minkowski M, ως προς το στατικό σύστημα αναφοράς (O',x'), με χωρικές συντεταγμένες, αντίστοιχα: x'^j, $y'^j = x'^j + \Delta x'^j$, $j = 1,2,3$ όπου:

$\Delta x'^j \to 0$ για κάθε $j = 1,2,3$

Για να συγχρονίσουμε τα χρονόμετρα που έχουμε τοποθετήσει στα X, Y, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της παραγράφου 3.1.

Ο παρατηρητής στο X στέλνει ένα φωτεινό σήμα στο Y, το οποίο μόλις φτάσει στο Y, καταγράφει την ένδειξη $t'_Y{}^{(\text{αφ.})}$ του χρονομέτρου Y, και επιστρέφει στο X. Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1, για να συγχρονίσουμε το χρονόμετρο X με το Y, χρειαζόμαστε τις τιμές $t'_X{}^{(1)}$ και $t'_X{}^{(2)}$ που πρέπει να δείχνει το X, κατά την εκπομπή και την επιστροφή του σήματος, αντίστοιχα, ώστε τα γεγονότα:

$\left(ct'_X{}^{(1)}, x'^j\right)$ και $\left(ct'_Y{}^{(\text{αφ.})}, x'^j + \Delta x'^j\right)$

...καθώς και τα:

$\left(ct'_Y{}^{(\text{αφ.})}, x'^j + \Delta x'^j\right)$ και $\left(ct'_X{}^{(2)}, x'^j\right)$

...να συνδέονται με φωτοειδείς κοσμικές γραμμές.

Δεδομένου ότι τα X, Y είναι απειροστά κοντά, θέτουμε:

$t'_X{}^{(1)} = t'_Y{}^{(\text{αφ.})} + \Delta t'^{(1)}$ και: $t'_X{}^{(2)} = t'_Y{}^{(\text{αφ.})} + \Delta t'^{(2)}$ (3.3α)

...οπότε οι συντεταγμένες των παραπάνω ζευγών γεγονότων πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\begin{aligned} &g'_{00}(c\Delta t'^{(1)})^2 + 2g'_{0j}\Delta x'^j\, c\Delta t'^{(1)} + g'_{jk}\Delta x'^j \Delta x'^k = 0 \\ &g'_{00}(c\Delta t'^{(2)})^2 + 2g'_{0j}\Delta x'^j\, c\Delta t'^{(2)} + g'_{jk}\Delta x'^j \Delta x'^k = 0 \end{aligned} \qquad (3.3β)$$

..από τις οποίες συνεπάγεται ότι τα $\Delta t'^{(1)}$, $\Delta t'^{(2)}$ είναι ρίζες της εξίσωσης (με άγνωστο το $\Delta x'^0 = c\Delta t'$):

$$g'_{00}(\Delta x'^0)^2 + 2g'_{0j}\Delta x'^j\, \Delta x'^0 + g'_{jk}\Delta x'^j \Delta x'^k = 0 \qquad (3.3γ)$$

Στην παράγραφο 3.1 είδαμε ότι στο αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα (O,x), αφού συγχρονίσουμε τα χρονόμετρα A και B, η ένδειξη του A όταν το σήμα φτάνει στο B, ικανοποιεί τη σχέση 3.1γ:

$$\left\{ t_A{}^{(\text{αφ.})} = t_A{}^{(1)} + \frac{(AB)}{c},\ t_A{}^{(\text{αφ.})} = t_A{}^{(2)} - \frac{(AB)}{c} \right\} \Rightarrow t_A{}^{(\text{αφ.})} = \frac{1}{2}\left(t_A{}^{(1)} + t_A{}^{(2)}\right) = t_B{}^{(\text{αφ.})}$$

Ως προς το (O,x), οι ενδείξεις των A και B όταν το σήμα φτάνει στο B είναι ίδιες: $t_A{}^{(\text{αφ.})} = t_B{}^{(\text{αφ.})}$ δηλαδή, το γεγονός "το σήμα μόλις έφτασε στο B" συμβαίνει την ίδια χρονική στιγμή σύμφωνα με τα χρονόμετρα των παρατηρητών A και B.

Ως προς το σύστημα (O',x'), και με δεδομένο ότι η απόσταση των X και Y είναι απειροστή, η ένδειξη του X όταν το σήμα φτάνει στο Y, υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} &t'_X{}^{(\text{αφ.})} = t'_X{}^{(1)} + \frac{(XY)_s}{c} = t'_X{}^{(2)} - \frac{(XY)_s}{c} \Rightarrow t'_X{}^{(\text{αφ.})} = \frac{1}{2}\left(t'_X{}^{(1)} + t'_X{}^{(2)}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(t'_Y{}^{(\text{αφ.})} + \Delta t'_X{}^{(1)} + t'_Y{}^{(\text{αφ.})} + \Delta t'_X{}^{(2)}\right) = t'_Y{}^{(\text{αφ.})} + \frac{1}{2}\left(\Delta t'_X{}^{(1)} + \Delta t'_X{}^{(2)}\right) \end{aligned} \qquad (3.3δ)$$

...όπου (XY) η χωρική απόσταση των σημείων X και Y, όπως μετράται στην ταυτοχρονική πολλαπλότητα M_X του M (παράγραφος 3.2). Πρέπει να σημειωθεί ότι ως προς το σύστημα (O',x') η M_X δεν έχει κατ' ανάγκη Ευκλείδεια γεωμετρία (βλέπε παράγραφο 5.3). Ωστόσο, επειδή το (O',x') είναι στατικό, η γεωμετρία της M_X δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Τα $\Delta t'^{(1)}$, $\Delta t'^{(2)}$ είναι ρίζες της εξίσωσης 3.3γ, οπότε από την 3.3δ έπεται ότι:

$$t'_X{}^{(\text{αφ.})} = t'_Y{}^{(\text{αφ.})} - \frac{g'_{0j}\Delta x'^j}{g'_{00}} \qquad (3.3ε)$$

Παρατηρήσεις:

α) Δεδομένου ότι το σύστημα (O',x') είναι στατικό, τα στοιχεία του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$ εξαρτώνται μόνον από τις χωρικές συντεταγμένες, οπότε οι σχέσεις 3.3α, β και γ μας επιτρέπουν

να συγχρονίζουμε χρονόμετρα που βρίσκονται σε απείρως γειτονικά χωρικά σημεία, καθώς και κατά μήκος μιας οποιασδήποτε ανοικτής καμπύλης του χωροχρονικού συνεχούς *M* [9], με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε στην παράγραφο 3.1. Επομένως, μπορούμε να συγχρονίσουμε όλα τα χρονόμετρα που είναι τοποθετημένα στα χωρικά σημεία του στατικού συστήματος (*O'*,x'), με το χρονόμετρο που έχει τοποθετηθεί στη χωρική αρχή *O'* του συστήματος αναφοράς. Οι ενδείξεις του χρονομέτρου στο *O'* θα παίζουν το ρόλο του "παγκόσμιου χρόνου", όπως αυτός ορίστηκε στην παράγραφο 3.1.
β) Σύμφωνα με την 3.3ε, οι παρατηρητές *X* και *Y*, μολονότι έχουν συγχρονίσει τα χρονόμετρά τους, διαφωνούν ως προς τη χρονική στιγμή που συνέβη το γεγονός "το σήμα μόλις έφτασε στο *Y*": σύμφωνα με το χρονόμετρο Y, το σήμα έφτασε τη στιγμή $t_Y'^{(\alpha\varphi.)}$, ενώ σύμφωνα με το X τη στιγμή: $t_Y'^{(\alpha\varphi.)} - \dfrac{g'_{0j}\Delta x'^j}{g'_{00}}$ Το σήμα φτάνει ταυτόχρονα για τους δύο παρατηρητές μόνον αν ισχύει: $g'_{0j} = 0,\ j = 1,2,3$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

Ενότητα 4
Η δύναμη Minkowski και οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου - Προσδιορισμός της αναλυτικής έκφρασης μιας αποδεκτής δύναμης Minkowski

Στην τέταρτη Ενότητα, γενικεύουμε τις εξισώσεις του Newton και διαμορφώνουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης στο πλαίσιο της Σχετικιστικής Μηχανικής, από την απαίτηση η μορφή τους να είναι αναλλοίωτη κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων του χωροχρονικού συνεχούς. Εισάγουμε την έννοια της "δύναμης Minkowski" και διερευνούμε τις "επιτρεπτές" μορφές της. Συνθέτουμε σχετικιστικά μοντέλα γνωστών φυσικών συστημάτων και συγκρίνουμε τις σχετικιστικές προβλέψεις με τις αντίστοιχες Νευτώνειες.

Θεωρούμε ένα σωματίδιο P μάζας m που κινείται σε έναν χώρο Minkowski M. Έστω (O,x) αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς του M. Όπως είδαμε στην Ενότητα 1, κάθε σημείο X του M προσδιορίζεται από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες $\mathrm{x}=\left(ct,x^1,x^2,x^3\right)$ του R^4. Το t συμβολίζει τον παγκόσμιο χρόνο, ως προς το (O,x): τον μετράμε με συγχρονισμένα χρονόμετρα που έχουμε τοποθετήσει σε κάθε χωρικό σημείο $X_{\text{χωρ.}}$ με συντεταγμένες $\left(x^1,x^2,x^3\right)$ του συστήματος αναφοράς (O,x) (Ενότητα 3).
Έστω $C_P=\Phi\circ c_P$ η κοσμική τροχιά του P, όπου $\mathrm{x}_P=c_P(\tau)$ η αντίστοιχη της C_P καμπύλη του R^4.
Το απειροστό διάστημα επί της C_P έχει οριστεί στην Ενότητα 2:
$$\Delta s_P{}^2=\left\langle \Delta X_P,\Delta X_P\right\rangle = g_{\mu\nu}(\mathrm{x}_P)\Delta x_P{}^{\mu}\Delta x_P{}^{\nu}$$

Ο ιδιόχρονος του P συνδέεται με τον παγκόσμιο χρόνο t, με τη σχέση 2.δ της Ενότητας 2:
$$\Delta\tau_P=\frac{1}{c}\Delta s_P=\frac{1}{c}\sqrt{c^2\Delta t^2-\Delta\vec{r}_P\cdot\Delta\vec{r}_P}=\Delta t\sqrt{1-\frac{v_P{}^2}{c^2}}\underset{def}{=}\frac{1}{\gamma(v_P)}\Delta t$$
$$\gamma(v_P)\underset{\text{ορισμ.}}{=}\left(1-\frac{v_P{}^2}{c^2}\right)^{-1/2},\ \vec{v}_P=\dot{\vec{r}}_P=\frac{d\vec{r}_P}{dt} \qquad (4.\alpha)$$
... όπου: $\Delta\vec{r}_P\cdot\Delta\vec{r}_P=\left(\Delta x_P{}^1\right)^2+\left(\Delta x_P{}^2\right)^2+\left(\Delta x_P{}^3\right)^2$ εκφράζει το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, του διανύσματος $\Delta\vec{r}_P=e_1\Delta x_P{}^1+e_2\Delta x_P{}^2+e_3\Delta x_P{}^3\in E_3$ με τον εαυτό του.

Στη συνέχεια, απαλείφουμε τον δείκτη "P", εφόσον δεν υπάρχει σύγχυση για τις ποσότητες ή τα χαρακτηριστικά που αναφέρονται στο σωματίδιο P.

Εφόσον διαλέξουμε τον ιδιόχρονο τ του P ως ελεύθερη παράμετρο, η αναλυτική έκφραση της κοσμικής καμπύλης C, γράφεται:
$$\mathrm{x}=c(\tau)=\left(ct,x^1,x^2,x^3\right),\ X=C(\tau)=\Phi\left(c(\tau)\right)$$
Θεωρούμε δύο γειτονικά σημεία $X(\tau)$ και $X(\tau+\Delta\tau)$ της C. Το απειροστό διάνυσμα:
$$\Delta X(\tau)=e_\mu(\mathrm{x})\Delta x^\mu=e_\mu(\mathrm{x})\frac{\Delta x^\mu}{\Delta\tau}\Delta\tau,\ \Delta\tau\to 0$$
...είναι εφαπτόμενο της C, στο σημείο της $X(\tau)=\left(\Phi\circ c\right)(\tau)$

Στην Ενότητα 2 ορίσαμε την τετρα-ταχύτητα του P από τη σχέση:
$$U=\frac{\Delta X(\tau)}{\Delta\tau}=e_\mu(\mathrm{x})\frac{\Delta x^\mu}{\Delta\tau}=e_\mu(\mathrm{x})U^\mu \text{ όπου: } U^\mu=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta x^\mu}{\Delta\tau}$$
Σύμφωνα με τη σχέση 2.η της Ενότητας 2, η τετρα-ταχύτητα ικανοποιεί τη συνθήκη:
$$\left\langle U,U\right\rangle=c^2$$
Η τετρα-ταχύτητα του P είναι ένα διανυσματικό πεδίο επί της καμπύλης C και μεταβάλλεται με το τ. Η απειροστή μεταβολή ενός διανυσματικού πεδίου κατά μήκος καμπύλης, υπολογίζεται από το συναλλοίωτο διαφορικό του πεδίου (παράγραφος (δ) του Παραρτήματος Α2). Το συναλλοίωτο διαφορικό της U κατά μήκος της C συμβολίζεται με $D_{\Delta C}U(\tau)$.

Η μεταβολή του εσωτερικού γινομένου $\langle U,U\rangle = c^2$ κατά μήκος της C, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_{\Delta C}\langle U,U\rangle = 0 \Rightarrow \langle D_{\Delta C}U,U\rangle + \langle U,D_{\Delta C}U\rangle = 0 \Rightarrow 2\langle D_{\Delta C}U,U\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{D_{\Delta C}U}{D\tau},U\right\rangle = 0 \qquad (4.\beta)$$

Η 4.β δηλώνει ότι η τετρα-ταχύτητα είναι πάντοτε ορθογώνια με την τετρα-επιτάχυνση $\frac{D_{\Delta C}U}{D\tau}$ του σωματιδίου.

Σύμφωνα με τη σχέση Α2.9, της παραγράφου Α2(δ), και δεδομένου ότι το (O,x) είναι αδρανειακό και Καρτεσιανό, η συναλλοίωτη διαφόριση ταυτίζεται με την κατευθυνόμενη διαφόριση. Έτσι, κατά μήκος της κοσμικής γραμμής του P, η τετρα-ταχύτητα μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{DU}{D\tau} = \frac{dU}{d\tau} = e_\mu \partial_\kappa U^\mu \dot{c}^\kappa \text{ όπου: } \dot{c}^\kappa \equiv \frac{dc^\kappa}{d\tau}$$

Στην Ενότητα 3 δείξαμε ότι στο πλαίσιο ενός αδρανειακού και Καρτεσιανού συστήματος αναφοράς σε έναν χώρο Minkowski M, μπορούμε πάντοτε να συγχρονίσουμε τα χρονόμετρα που έχουμε τοποθετήσει στα χωρικά σημεία του M, και έτσι, να ορίσουμε έναν "παγκόσμιο χρόνο" t.
Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παγκόσμιο χρόνο ως μια κοινή ελεύθερη παράμετρο για να εκφράσουμε την αναλυτική εξίσωση της κοσμικής γραμμής, κάθε σωματιδίου. Το απειροστό διάστημα επί της κοσμικής γραμμής και ο ιδιόχρονος του σωματιδίου P, εκφράζονται συναρτήσει του παγκόσμιου χρόνου με τις εξισώσεις:

$$\Delta s = c\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma(v)}c\Delta t\,,\ \Delta\tau = \frac{1}{\gamma(v)}\Delta t\,,\ \gamma(v) \underset{def}{=} \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Αντίστοιχα, η τετρα-ταχύτητα και η τετρα-ορμή ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$U = e_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} = e_\mu \gamma(v)\frac{dx^\mu}{dt} \qquad (4.\gamma)$$

$$U^\mu = \gamma(v)\frac{dx^\mu}{dt}\,,\ U^0 = \gamma(v)c\,,\ U^j = \gamma(v)v^j$$

$$\langle U,U\rangle = \gamma^2\left(c^2 - \vec{v}\cdot\vec{v}\right) = c^2$$

$$P = mU = m\gamma e_\mu \frac{dx^\mu}{dt} \qquad (4.\delta)$$

$$P = \sqrt{\langle P,P\rangle} = m\gamma\sqrt{\left(c^2-\vec{v}\cdot\vec{v}\right)} = mc$$

$$P^0 = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,\ P^j = \frac{mv^j}{\sqrt{1-\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}$$

Η ενέργεια του σωματιδίου ορίζεται από την έκφραση:

$$E \underset{\text{ορισμ.}}{=} \frac{P^0}{c} \Rightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2$$

...οπότε, το τετρα-διάνυσμα της ορμής γράφεται:

$$P = e_0\frac{E}{c} + e_j P^j \qquad (4.\varepsilon)$$

$$m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2\,,\ \vec{P} = e_j P^j \qquad (4.\zeta)$$

Το χωρικό διάνυσμα $\vec{P} = e_j P^j$ ονομάζεται "χωρική ορμή".

Σύμφωνα με την 4.ε, το τετρα-διάνυσμα της ορμής μπορεί να μετονομαστεί σε τετρα-διάνυσμα "ενέργειας-ορμής". Από την 4.ζ συνεπάγεται ότι η norm του τετραδιανύσματος ενέργειας-ορμής είναι σταθερή, ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων. Ωστόσο, η έκφραση:

$$\langle P,P\rangle = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2$$

...είναι έγκυρη μόνο στο πλαίσιο ενός αδρανειακού, Καρτεσιανού συστήματος αναφοράς.

Σύμφωνα με την 4.ε, η τετρα-ορμή κάθε σωματιδίου με μάζα $m>0$ είναι ένα χρονοειδές (time-like) διάνυσμα του χώρου Minkowski M. Μπορούμε, ωστόσο, να θεωρήσουμε ως πρωταρχικές έννοιες για την περιγραφή της κίνησης του σωματιδίου, αντί της ταχύτητας και της θέσης, την ενέργεια E και την ορμή P (2). Τότε, η 4.ε έχει νόημα, ακόμα και για μηδενική μάζα ηρεμίας του σωματιδίου: $m=0$. Όμως στην περίπτωση αυτή, η ορμή του σωματιδίου δεν μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της ταχύτητάς του. Η χωρική ορμή του σωματιδίου είναι διαφορετική από το μηδέν, αλλά η norm της τετρα-ορμής του είναι ίση με το μηδέν: η τετρα-ορμή είναι ένα φωτοειδές (light-like) διάνυσμα:

$$\frac{E}{c} = \left\|\vec{P}\right\|,\ \left\|\vec{P}\right\| = \sqrt{(P^1)^2 + (P^2)^2 + (P^3)^2}$$

Οι δυνάμεις Minkowski και οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου

Οι εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου Σ σε χώρο Minkowski M, προκύπτουν ως γενίκευση του 2ου νόμου του Newton. *Πώς θα πραγματοποιήσουμε αυτή τη γενίκευση;*

Στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής, η μορφή των εξισώσεων του Newton είναι ίδια σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Δηλαδή, διατηρείται αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς του Galileo[3,10], καθώς και στους μετασχηματισμούς στροφής των χωρικών συντεταγμένων, που διατηρούν αμετάβλητη την Ευκλείδεια μετρική.

Στην παράγραφο 1.2 είδαμε ότι η μετρική σε ένα χώρο Minkowski διατηρείται αναλλοίωτη κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων. **Έτσι, απαιτούμε οι διαφορικές εξισώσεις που καθορίζουν την κίνηση ενός σωματιδίου μάζας *m* ως προς ένα σύστημα αναφοράς, να διατηρούν τη μορφή τους κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων**.

Η απλούστερη δυνατή γενίκευση των εξισώσεων του Newton που ικανοποιεί την απαίτηση αυτή δίδεται από τις "**εξισώσεις κίνησης του Minkowski**":

$$\frac{D_{\Delta C}P}{D\tau} = K \text{ ή: } \frac{D_{\Delta C}{}^{\mu}P}{D\tau} = K^{\mu},\ \mu = 0,1,2,3 \qquad (4.\eta)$$

…όπου:

α) Το τ συμβολίζει τον ιδιόχρονο του Σ κατά την κίνησή του επί της κοσμικής γραμμής του C: $C = \Phi \circ c$, $c : \mathrm{x} = c(\tau)$

β) Το $P = e_{\nu}(X)P^{\nu}(X)$ είναι η τετρα-ορμή του Σ ως προς το (όχι κατ' ανάγκη αδρανειακό) σύστημα συντεταγμένων (O,x).

γ) Το $D_{\Delta C}P$ είναι το συναλλοίωτο διαφορικό της τετρα-ορμής του σωματιδίου επί της κοσμικής γραμμής C, και $D_{\Delta C}{}^{\mu}P$ οι συνιστώσες του $D_{\Delta C}P$ ως προς το (O,x) (Παράρτημα Α2.(δ)):

$$D_{\Delta C}P(\mathrm{x}) = e_{\mu}(\mathrm{x})D^{\mu}{}_{\Delta C}P(\mathrm{x}) \text{ όπου: } D^{\mu}{}_{\Delta C}P(\mathrm{x}) = \left(\frac{dP^{\mu}(\mathrm{x})}{d\tau} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\kappa}(\mathrm{x})P^{\lambda}(\mathrm{x})\frac{dc^{\kappa}}{d\tau}\right)\Delta\tau$$

δ) Το K είναι ένα **διανυσματικό πεδίο** του M που το ονομάζουμε **τετρα-δύναμη**. Η αναλυτική μορφή της τετρα-δύναμης στο πλαίσιο κάποιου συστήματος συντεταγμένων, καθορίζει το μαθηματικό μοντέλο που θεωρούμε ότι περιγράφει το φυσικό σύστημα που θέλουμε να μελετήσουμε.

Επιβεβαιώνουμε ότι οι εξισώσεις Minkowski είναι αναλλοίωτες κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^{\mu} = x^{\mu}(\mathrm{x}')$:

Στην παράγραφο 1.2 δείξαμε ότι το απειροστό διάστημα Δs μεταξύ δύο γειτονικών σημείων του M είναι αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων. Επομένως, το ίδιο συμβαίνει και για το απειροστό διάστημα μεταξύ δύο γειτονικών σημείων X και Y της κοσμικής γραμμής C του Σ: $\Delta s(\mathrm{x})=\Delta s'(\mathrm{x}')$. Ο ιδιόχρονος $\Delta\tau$ του Σ κατά την κίνησή του από το X στο Y επί της C είναι $\Delta\tau=\Delta s(x)/c$. Έπεται ότι $\Delta\tau=\Delta\tau'$, που σημαίνει ότι ο ιδιόχρονος διατηρείται αναλλοίωτος κάτω από κάθε μετασχηματισμό $x^\mu = x^\mu(x')$

Στο Παράρτημα 2, παράγραφος (δ) δείχνουμε ότι οι συνιστώσες του συναλλοίωτου διαφορικού κάθε διανυσματικού πεδίου μετασχηματίζονται όπως οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου. Οπότε, για την τετρα-ορμή ισχύει: $D_{\Delta C}P^\mu = \partial'_\kappa x^\mu D_{\Delta C}P'^\kappa$

Ομοίως, η τετρα-δύναμη μετασχηματίζεται σύμφωνα με την: $K^\mu = \partial'_\lambda x^\mu K'^\lambda$

Αντικαθιστώντας στην 4.η και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα: $\partial_\mu x'^\lambda \partial'_\nu x^\mu = \delta^\lambda{}_\nu$

...βρίσκουμε ότι στις x'_συντεταγμένες οι εξισώσεις Minkowski διατηρούν την ίδια μορφή:

$$\frac{D_{\Delta C}P'^\mu}{D\tau'} = K'^\mu \,,\ \mu = 0,1,2,3$$

Οι εξισώσεις Minkowski ως προς αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς

Θεωρούμε ένα αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O,x) και εκφράζουμε τις εξισώσεις κίνησης 4.η ως προς αυτό. Σύμφωνα με τη σχέση Α2.9 της παραγράφου Α2.(δ), στο αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O,x), η συναλλοίωτη παράγωγος ταυτίζεται με την κατευθυνόμενη παράγωγο.

Εξάλλου, από την 4.β και τον ορισμό της τετρα-ορμής, έπεται ότι η δύναμη Minkowski είναι πάντοτε ορθογώνια με την τετρα-ταχύτητα U του Σ:

$$\left\langle P,U\right\rangle = mc^2 \Rightarrow m\left\langle \frac{DU}{D\tau},U\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\{\left\langle K,U\right\rangle = 0\,,\ K^0c - \sum_{j=1}^{3}K^jv^j = 0\right\} \qquad (4.\theta)$$

Ορίζουμε τις "συναλλοίωτες" συνιστώσες της τετρα-δύναμης από τις σχέσεις:

$K_\mu = \eta_{\mu\nu}K^\nu$, $K_0 = K^0$, $K_j = -K^j$

...και η συνθήκη 4.θ γράφεται:

$$K_0c + K_jv^j = 0 \qquad (4.\iota)$$

Οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων 4.η που ικανοποιούν τον περιορισμό 4.ι και κατάλληλες αρχικές συνθήκες για τη θέση και τη χωρική ταχύτητα, προσδιορίζουν μονοσήμαντα την κοσμική γραμμή του κινούμενου σωματιδίου Σ.

Ο παγκόσμιος χρόνος t είναι η πλέον κατάλληλη παράμετρος για να εκφράσουμε τις αναλυτικές εξισώσεις της κοσμικής γραμμής του Σ ως προς το αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα (O,x). Με βάση τις 4.α, 4.γ, 4.δ, μετασχηματίζουμε τις εξισώσεις 4.η, ώστε ελεύθερη παράμετρος να είναι το t.

Δείξτε ότι καταλήγουμε στις διαφορικές εξισώσεις:

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(m\gamma c\right) = K^0 \qquad (4.\kappa)$$

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(m\gamma v^j\right) = K^j \,,\ j = 1,2,3 \qquad (4.\lambda)$$

Δείξτε ότι για $\frac{v^2}{c^2} \to 0$ η 4.λ συγκλίνει στον 2ο νόμο του Newton. Η Νευτώνεια δύναμη που δρα στο Σ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\lim_{v/c\to 0}\left(\frac{1}{\gamma}K^j\right) = F_{(N)}{}^j \qquad (4.\mu)$$

Πώς θα προσδιορίσουμε την αναλυτική έκφραση μιας αποδεκτής δύναμης Minkowski;

Η δύναμη Minkowski K που εμφανίζεται στο δεξί μέρος της διαφορικών εξίσωσης κίνησης 4.η, οφείλει να ικανοποιεί, ως προς το αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα (O,x), τη συνθήκη 4.ι. Συμπεραίνουμε ότι στο πλαίσιο της Σχετικιστικής Μηχανικής, δεν είναι αποδεκτή κάθε μορφής δύναμη. Οι αναλυτικές μορφές των δυνάμεων που επιτρέπεται να ενεργούν στα κινούμενα σωματίδιο οφείλουν να είναι συμβατές με τον περιορισμό 4.ι. Σε αυτή την παράγραφο διερευνούμε μερικές περιπτώσεις διανυσματικών πεδίων που θα μπορούσε κανείς να επιλέξει ως δυνάμεις Minkowski, στη σύνθεση μαθηματικών μοντέλων της Σχετικιστικής Μηχανικής.

Έστω (O,x) αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του M και σωματίδιο Σ κινούμενο ως προς αυτό, επί της κοσμικής γραμμής του $X(\tau) = (\Phi \circ \mathrm{x})(\tau)$

Η αναλυτική έκφραση της κοσμικής γραμμής του Σ είναι λύση των εξισώσεων κίνησης 4.η.

Έστω ένα αυθαίρετο διανυσματικό πεδίο B του M, ορισμένο επί της κοσμικής γραμμής του Σ, και U η τετρα-ταχύτητα του Σ. Η προβολή του $B(\mathrm{x}(\tau))$ κατά μήκος της $U(\tau)$, δίδεται από την έκφραση(2): $\frac{1}{c^2}\langle B,U\rangle U$

Ορίζουμε το πεδίο W από τη σχέση:

$$W(\mathrm{x}) = B(\mathrm{x}) - \frac{1}{c^2}\langle B(\mathrm{x}),U(\mathrm{x})\rangle U(\mathrm{x}) \tag{4.ν}$$

Το πεδίο W είναι κάθετο στο U, σε κάθε σημείο της κοσμικής γραμμής του Σ:

$$\langle W,U\rangle = \left\langle \left(B - \frac{1}{c^2}\langle B,U\rangle U\right),U\right\rangle = \langle B,U\rangle - \frac{1}{c^2}\langle B,U\rangle\langle U,U\rangle = 0 \tag{4.ξ}$$

Επιπλέον, για κάθε πραγματική συνάρτηση $h(\mathrm{x})$, ισχύει:

$$\left\langle h\frac{dU}{d\tau},U\right\rangle\Big|_{\mathrm{x}(\tau)} = h(\mathrm{x}(\tau))\left\langle \frac{dU}{d\tau},U\right\rangle\Big|_{\mathrm{x}(\tau)} = 0 \tag{4.ο}$$

Δεδομένου ότι το (O,x) είναι αδρανειακό και Καρτεσιανό, τα διανύσματα βάσης e_μ του εφαπτόμενου χώρου T_XM είναι ανεξάρτητα του σημείου $X=X(\mathrm{x})$ (σχέσεις 1.1β, 1.1γ, παράγραφος 1.1). Επομένως, ως προς το (O,x) η τετρα-επιτάχυνση γράφεται:

$$\frac{dU(\mathrm{x})}{d\tau} = e_\mu \frac{dU^\mu(\mathrm{x})}{d\tau} \quad \text{όπου: } \mathrm{x}=\mathrm{x}(\tau) = \left(x^0(\tau),x^1(\tau),x^2(\tau),x^3(\tau)\right)$$

Συμπεραίνουμε ότι τα πεδία:

$$A(\mathrm{x}) = e_\mu \frac{dU^\mu(\mathrm{x})}{d\tau} h(\mathrm{x}) \tag{4.π}$$

και:

$$W(\mathrm{x}) = e_\mu \left(B^\mu - \frac{1}{c^2}\langle B,U\rangle U^\mu\right)_{\mathrm{x}} \tag{4.ρ}$$

...όπου $h(\mathrm{x})$ και $B^\mu(\mathrm{x})$, μ=0,1,2,3, αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το R^4, ικανοποιούν την συνθήκη 4.ι. Επομένως, είναι υποψήφια για το ρόλο δύναμης Minkowski στο πλαίσιο κάποιου μαθηματικού μοντέλου της Σχετικιστικής Μηχανικής.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

4.1 Δύναμη Minkowski που παράγεται από βαθμωτό δυναμικό

Στη Νευτώνεια Μηχανική ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα φυσικά μοντέλα, όπου οι δυνάμεις που ενεργούν στα σωματίδια προέρχονται από ένα βαθμωτό δυναμικό. Στην παρούσα παράγραφο, διερευνούμε πώς μπορούμε να συνθέσουμε σχετικιστικά μοντέλα, στα οποία η δύναμη Minkowski, στο μη σχετικιστικό όριο, συγκλίνει σε δύναμη που προέρχεται από Νευτώνειο δυναμικό. Αναπτύσσονται δύο παραδείγματα: Ο γραμμικός ταλαντωτής και η κίνηση σε κεντρικό πεδίο. Συγκρίνονται οι προβλέψεις του σχετικιστικού και του αντίστοιχου Νευτώνειου μοντέλου.

Έστω $V(\mathrm{x})$ μια βαθμωτή συνάρτηση, η οποία στο δεδομένο αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O,x), είναι ανεξάρτητη του χρόνου: $\partial_0 V(\mathrm{x}) = 0$

Θεωρούμε ότι στο μη σχετικιστικό όριο οι συνιστώσες της Δύναμης Minkowski ικανοποιούν τις συνθήκες (σχέση 4.μ):

$$\lim_{v/c\to 0}\left(\frac{1}{\gamma}K_j\right) = F_{(N)j} = -\partial_j V(\mathrm{x}) \tag{4.1α}$$

Σύμφωνα με τις 4.π και 4.ρ, ορίζουμε τα πεδία A και B:

$$A(\mathrm{x}) = V(\mathrm{x})\frac{dU}{d\tau} = e_\nu \frac{dU^\nu}{d\tau}V(\mathrm{x}),\ B(\mathrm{x}) = e_\nu\, \eta^{\nu\kappa}\partial_\kappa V(\mathrm{x})$$

...όπου: $\left[\eta^{\mu\nu}\right] = \left[\eta_{\mu\nu}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

...και θεωρούμε ότι η δύναμη Minkowski $K(\mathrm{x})$ προσδιορίζεται από το διανυσματικό πεδίο:

$$K = e_\mu K^\mu\ ,\ K^\mu = -\frac{1}{c^2}V(\mathrm{x})\frac{dU^\mu}{d\tau} + \partial_\nu V(\mathrm{x})\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}U^\mu U^\nu\right) \qquad (4.1\beta)$$

<u>Δείξτε ότι</u>: Το πεδίο $K(\mathrm{x})$, που ορίζεται από την 4.1β είναι ένα διανυσματικό πεδίο και ικανοποιεί τη συνθήκη 4.ι. Ως εκ τούτου, είναι θεμιτό και έγκυρο να συνθέτουμε σχετικιστικά μοντέλα, στα οποία η δύναμη Minkowski που ενεργεί σε σωματίδιο Σ ως προς το αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα (O,x), να έχει τη μορφή 4.1β.

Από την 4.1β υπολογίζουμε την χρονική και τις χωρικές συνιστώσες της K στο (O,x):

$$K^0 = -\frac{1}{c^2}V(\vec r)\frac{dU^0}{d\tau} + \partial_\nu V(\vec r)\left(\eta^{0\nu} - \frac{1}{c^2}U^0U^\nu\right) = -\frac{1}{c}\gamma\left(V(\vec r)\frac{d\gamma}{dt} + \gamma\partial_j V(\vec r)v^j\right) =$$

$$= -\frac{1}{c}\gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma V(\vec r)\right) \qquad (4.1\gamma)$$

$$K^j = \eta^{jk}\partial_k V - \frac{1}{c^2}\gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma V v^j\right) \qquad (4.1\delta)$$

...όπου t είναι ο παγκόσμιος χρόνος ως προς το (O,x).

Οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης σωματιδίου Σ επί του οποίου ενεργεί η $K(\mathrm{x})$, παράγονται με βάση τις 4.η:

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(m\gamma c\right) = -\frac{1}{c}\gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma V\right),\ \gamma\frac{d}{dt}\left(m\gamma v^j\right) = \eta^{jk}\partial_k V - \frac{1}{c^2}\gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma V v^j\right) \qquad (4.1\varepsilon)$$

$$\gamma\left(mc^2 + V\right) = E\ \left(=\text{σταθερό}\right) \qquad (4.1\zeta)$$

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(\left(m + \frac{1}{c^2}V\right)\gamma v^j\right) = -\partial_j V \qquad (4.1\eta)$$

Στο μη σχετικιστικό όριο, όπου:

$$\frac{\vec v^2}{c^2} \to 0 \text{ και } \frac{V(\vec r)}{mc^2} \to 0$$

...η 4.1ζ συγκλίνει στην εξίσωση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας E_N, όπως εκφράζεται στη Νευτώνεια Μηχανική για συντηρητικές δυνάμεις:

$$E = \gamma\left(mc^2 + V\right) \Rightarrow E = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left(mc^2 + V\right) \approx \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)mc^2\left(1 + \frac{V}{mc^2}\right) \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + V$$

...από την οποία συνεπάγεται η έκφραση: $E_N = E - mc^2 = \frac{1}{2}mv^2 + V = \text{σταθερό}$

Η 4.1η συγκλίνει στον 2ο νόμο του Newton:

$$\frac{d}{dt}\left(mv^j\right) = -\partial_j V = F_{(N)j}$$

...που συμφωνεί με την 4.1α.

Από την επίλυση των 4.1ζ και 4.1η, με κατάλληλες αρχικές συνθήκες για τη χωρική ταχύτητα και τη θέση του Σ, προκύπτει η αναλυτική έκφραση της κοσμικής γραμμής του Σ στον χώρο Minkowski M ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x).

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

4.2 γραμμικός ταλαντωτής σε χώρο Minkowski

Συνθέτουμε το σχετικιστικό μοντέλο του γραμμικού ταλαντωτή σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς του χώρου Minkowski. Οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν με εφαρμογή των 4.1ζ, 4.1η, όπου η δυναμική ενέργεια *V*(*x*) προσδιορίζεται, από τη Νευτώνεια συμπεριφορά του ταλαντωτή στο μη σχετικιστικό όριο (παράγραφος 4.1). Υπολογίζουμε προσεγγιστικά την περίοδο κίνησης του ταλαντωτή κοντά στο μη σχετικιστικό όριο και συγκρίνουμε με τις προβλέψεις του αντίστοιχου Νευτώνειου μοντέλου.

Η προσομοίωση της κίνησης του γραμμικού Νευτώνειου και σχετικιστικού ταλαντωτή και η σύγκριση των δύο μοντέλων υπάρχει στην υπερσύνδεση:
Relativistic Oscillator (sch.gr)

Την προσομοίωση της κίνησης του ταλαντωτή στο χωρικό επίπεδο *xy* του αδρανειακού συστήματος (*O*,x), σύμφωνα με τα σχετικιστικό και το Νευτώνειο μοντέλο, θα βρείτε στις υπερσυνδέσεις:
Relativistic Oscillator (sch.gr)
Relativistic and Newtonian Oscillator Comparison JS Model (compadre.org)

Ορίζουμε ως "σχετικιστικό ταλαντωτή" το μηχανικό σύστημα που προσδιορίζεται από τις συνθήκες:
Α) Υπάρχει αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (*O*,x) του χώρου Minkowski *M*, ως προς το οποίο οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίου P μάζας *m*, δίδονται από τις 4.1ζ και 4.1η.
Β) Ως προς το (*O*,x) η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας δίδεται από τη σχέση:

$$V(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}kx^2 \text{ όπου: } ct \equiv x^0,\ x \equiv x^1,\ y \equiv x^2,\ z \equiv x^3 \qquad (4.2α)$$
$$\mathrm{x} \equiv \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \equiv \left(ct, x, y, z\right)$$

Το *t* συμβολίζει τον παγκόσμιο χρόνο ως προς το (*O*,x).

Με δεδομένες τις συνθήκες Α και Β, οι εξισώσεις κίνησης του ταλαντωτή γράφονται:

$$\gamma\left(mc^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = E,\ \gamma\frac{d}{dt}\left(\left(m + \frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_x\right) = -kx \qquad (4.2β)$$
$$\gamma\frac{d}{dt}\left(\left(m + \frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_y\right) = 0,\ \gamma\frac{d}{dt}\left(\left(m + \frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_z\right) = 0$$

Θεωρούμε ότι η τροχιά του σωματιδίου P ικανοποιεί τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες:

$$x(0) = x_0,\ v_x(0) = v_0,\ v_y(0) = v_z(0) = 0 \qquad (4.2γ)$$

Από τις 4.2β και τις 4.2γ, συνεπάγονται οι σχέσεις:

$$\left(m + \frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_y = C_y = \text{const.},\ \left(m + \frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_z = C_z = \text{const.}$$
$$C_y = \left(m + \frac{k}{2c^2}x_0{}^2\right)\gamma_0 v_y(0) = 0,\ C_z = \left(m + \frac{k}{2c^2}x_0{}^2\right)\gamma_0 v_z(0) = 0$$
$$v_y(t) = v_z(t) = 0 \text{ για κάθε } t$$

...οπότε, οι εξισώσεις κίνησης του P διαμορφώνονται ως εξής:

$$\gamma\left(mc^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = E \qquad (4.2δ)$$

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(\left(m + \frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_x\right) = -kx \qquad (4.2ε)$$

Η 4.2δ εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας του ταλαντωτή κατά μήκος της τροχιάς του:

$$\gamma\left(mc^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=E=\frac{mc^2+\frac{1}{2}kx_0^{\ 2}}{\sqrt{1-\frac{v_0^{\ 2}}{c^2}}},\ \gamma=\gamma(v_x)=\left(1-\frac{v_x^{\ 2}}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (4.2\zeta)$$

Διαφορίζουμε την 4.2δ ως προς t και βρίσκουμε:

$$\frac{d\gamma}{dt}\left(1+\frac{k}{2mc^2}x^2\right)+\gamma\frac{d}{dt}\left(1+\frac{k}{2mc^2}x^2\right)=0$$

Συνδυάζουμε τη σχέση αυτή με την 4.2ε και καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\gamma\frac{E}{mc^2}\frac{dv_x}{dt}=-\frac{k}{m}x \quad (4.2\eta)$$

Θέτουμε:

$$E=mc^2+w\Rightarrow\frac{w}{mc^2}=\frac{1+\frac{kx_0^{\ 2}}{2mc^2}}{\sqrt{1-\frac{v_0^{\ 2}}{c^2}}}-1\Rightarrow 1+\frac{w}{mc^2}=\gamma\left(1+\frac{kx^2}{2mc^2}\right) \quad (4.2\theta)$$

Επιλέγουμε αρχικές συνθήκες: $x(0)=x_0$, $v_x(0)=v_0=0$ οπότε, από τη 4.2θ προκύπτει:

$$w=\frac{kx_0^{\ 2}}{2}=mc^2\left(\gamma(v_x)\left(1+\frac{kx^2}{2mc^2}\right)-1\right) \quad (4.2\iota)$$

Η εξίσωση κίνησης 4.2η γράφεται:

$$\left(1+\frac{w}{mc^2}\right)\gamma\frac{dv_x}{dt}=-\frac{k}{m}x\Rightarrow\frac{dv_x}{dt}=-\frac{1+\frac{kx^2}{2mc^2}}{\left(1+\frac{w}{mc^2}\right)^2}\frac{k}{m}x\Rightarrow\frac{dv_x}{dt}=-\frac{1+\frac{kx^2}{2mc^2}}{\left(1+\frac{kx_0^{\ 2}}{2mc^2}\right)^2}\frac{k}{m}x \quad (4.2\kappa)$$

<u>Παρατήρηση 1</u>: Επιλύουμε την 4.2ι ως προς v_x:

$$\frac{v_x^{\ 2}}{c^2}=1-\frac{\left(1+\frac{kx^2}{2mc^2}\right)^2}{\left(1+\frac{kx_0^{\ 2}}{2mc^2}\right)^2}$$

Η μέγιστη τιμή του v_x^2 επιτυγχάνεται για x=0: $\frac{v_{\max}^{\ 2}}{c^2}=1-\frac{1}{\left(1+\frac{kx_0^{\ 2}}{2mc^2}\right)^2}$

...από την οποία συνεπάγεται ότι η συνθήκη $|v_{max}|<c$ ικανοποιείται για κάθε τιμή της ενέργειας $w=\frac{kx_0^{\ 2}}{2}$

<u>Παρατήρηση 2</u>: Πάλι από την 4.2ι, προκύπτει ότι: $\left(1+\frac{kx^2}{2mc^2}\right)^2=\left(1-\frac{v_x^{\ 2}}{c^2}\right)\left(1+\frac{kx_0^{\ 2}}{2mc^2}\right)^2$, από την οποία συνεπάγεται ότι η μέγιστη τιμή του x επιτυγχάνεται για v_x^2=0:

$$x_{\max}=|x_0|\Rightarrow-|x_0|\le x\le|x_0|$$

<u>Παρατήρηση 3</u>: Για $\frac{w}{mc^2}=\frac{kx_0^{\ 2}}{2mc^2}\ll 1$ η 4.2κ προσεγγίζεται από την:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

...που είναι η εξίσωση κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής, με συχνότητα: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Η αναλυτική έκφραση της τροχιάς του ταλαντωτή στο μη σχετικιστικό όριο είναι: $x_N = x_0 \cos \omega_0 t$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη σχετικιστική διόρθωση της αναλυτικής έκφρασης της τροχιάς και της περιόδου της κίνησης, με όρους μέχρι και 1ης τάξης ως προς το ε.

Έστω ότι: $\varepsilon \equiv \dfrac{w}{mc^2} = \dfrac{kx_0^{\,2}}{2mc^2} << 1$

Θεωρούμε ότι η αναλυτική έκφραση της τροχιάς σε προσέγγιση 1ης τάξης ως προς το ε, που είναι λύση της 4.2κ, με αρχικές συνθήκες τις $x(0) = x_0$, $v_x(0) = v_0 = 0$ έχει τη μορφή:

$$x = x_0\left(\cos\omega_0 t + \varepsilon f(t)\right) \text{ όπου: } f(0) = 0 \text{ και } \dot{f}(0) = 0 \qquad (4.2λ)$$

$$(4.2\lambda) \Rightarrow v_x = \dot{x} = x_0\left(-\omega_0 \sin\omega_0 t + \varepsilon \dot{f}(t)\right),\ \dot{v}_x = \ddot{x} = x_0\left(-\omega_0^2 \cos\omega_0 t + \varepsilon \ddot{f}(t)\right) \qquad (4.2μ)$$

Από την 4.2ι προκύπτει η ακόλουθη προσεγγιστική έκφραση που σχετίζει την ταχύτητα του σωματιδίου με την αντίστοιχη θέση του:

$$v_x^{\,2} \approx \frac{k}{m}\left(x_0^{\,2} - x^2\right) - \frac{k}{m}\varepsilon\left(\frac{3}{2}x_0^{\,2} - 2x^2 + \frac{x^4}{2x_0^{\,2}}\right) \qquad (4.2ν)$$

<u>Δείξτε ότι</u> ο πρώτος όρος στο δεξί μέρος της 4.2ν αντιστοιχεί στο μη σχετικιστικό όριο.

Από τη 4.2ν επιβεβαιώνουμε ότι για $|x|=x_0$ η v_x είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς, η κίνηση περιορίζεται στο διάστημα $[-x_0,x_0]$ και είναι περιοδική με περίοδο T, που μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$T = 2\int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{v_x} \qquad (4.2ξ)$$

Προσεγγίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος στην 4.2ξ, προσεγγίζοντας το $1/v_x$ από την 4.2ν. <u>Αποδείξτε ότι ισχύει</u>:

$$v_x^{\,-1} \approx \left(\frac{m}{2w}\right)^{1/2}\left(1 - y^2\right)^{-1/2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\left(3 - y^2\right)\right) \text{ όπου: } y = \frac{x}{x_0} \qquad (4.2ο)$$

Αντικαθιστούμε στην 4.2ξ και λαμβάνουμε:

$$T \approx 4\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\int_0^1 dy\left(1 - y^2\right)^{-1/2} - \frac{1}{4}\frac{w}{mc^2}\int_0^1 dy\left(1 - y^2\right)^{-1/2}\left(y^2 - 3\right)\right]$$

<u>Υπολογίστε τα ολοκληρώματα</u> που εμφανίζονται στο δεξί μέρος της προηγούμενης σχέσης και επιβεβαιώστε ότι η περίοδος και η συχνότητα του ταλαντωτή προσεγγίζονται, αντίστοιχα, από τις εκφράσεις:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{5w}{8mc^2}\right) \qquad (4.2π)$$

$$\omega \approx \omega_0\left(1 + \frac{5w}{8mc^2}\right)^{-1} \approx \omega_0\left(1 - \frac{5w}{8mc^2}\right) \qquad (4.2ρ)$$

Από τις 4.2κ, 4.2λ και 4.2μ διαμορφώνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1 + \dfrac{x^2}{x_0^{\,2}}\varepsilon}{\left(1 + \varepsilon\right)^2}\omega_0^{\,2}x$$

$$-x_0\omega_0^2\cos\omega_o t - 2\varepsilon x_0\omega_0^2\cos\omega_o t + x_0\varepsilon\ddot{f} = -\omega_0^2 x_0\cos\omega_0 t - \varepsilon\omega_0^2 x_0 f(t) - \omega_0^2 x_0\varepsilon\cos^3\omega_0 t$$

$$\ddot{f} + \omega_0^2 f = \omega_0^2\cos\omega_0 t\left(2-\cos^2\omega_0 t\right) \text{ ή:}$$

$$\ddot{f} + \omega_0^2 f = \frac{1}{4}\omega_0^2\left(5\cos\omega_0 t - \cos 3\omega_0 t\right) \qquad (4.2σ)$$

Στο Παράρτημα Α4 επιλύεται η διαφορική εξίσωση 4.2σ με τη μέθοδο των συναρτήσεων Green και εκφράζεται αναλυτικά η σχετικιστική εξίσωση της τροχιάς με όρους μέχρι και 1ης τάξης ως προς το *ε*.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

4.3 Κίνηση σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων

Συνθέτουμε το σχετικιστικό μοντέλο που επιλύει το πρόβλημα του Kepler. Το αντίστοιχο Νευτώνειο μοντέλο περιγράφει την κίνηση σωματιδίου σε κεντρικό δυναμικό της μορφής -*GM/r*, ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Για τη σύνθεση του σχετικιστικού μοντέλου, ακολουθούμε τη μέθοδο της παραγράφου παραγράφου 4.1. Οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν με εφαρμογή των 4.1ζ, 4.1η, όπου η δυναμική ενέργεια *V*(*x*) προσδιορίζεται, από τη Νευτώνεια συμπεριφορά του ταλαντωτή στο μη σχετικιστικό όριο. Όπως προκύπτει και από την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων κίνησης, που πραγματοποιείται στο πλαίσιο των προσομοιώσεων του μοντέλου (βλέπε τις ακόλουθες υπερσυνδέσεις), οι τροχιές των σωματιδίων δεν είναι πλέον κωνικές τομές, όπως προβλέπει το Νευτώνειο μοντέλο. Το σωματίδιο κινείται σε ανοικτές τροχιές που στο μη σχετικιστικό όριο συγκλίνουν στις Νευτώνειες.

Η προσομοίωση της κίνησης σωματιδίου σε κεντρικό πεδίο δυνάμεων σύμφωνα με την Νευτώνεια Μηχανική και την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, καθώς και η σύγκριση του σχετικιστικού με το Νευτώνειο μοντέλο υπάρχει στις υπερσυνδέσεις:

The Kepler problem: the Newtonian and the relativistic (Special Theory) point of view (sch.gr)
The Kepler problem: The Newtonian and the relativistic (Special Theory) Comparison (compadre.org)

Στο πλαίσιο της Σχετικιστικής Μηχανικής, το μοντέλο της κίνησης σωματιδίου P μάζας *m* σε κεντρικό δυναμικό της μορφής -*GM/r* ("το πρόβλημα του Kepler"), προσδιορίζεται από τις ακόλουθες παραδοχές:
Α) Υπάρχει αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (*O*,x) του χώρου Minkowski *M*, ως προς το οποίο οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίου P μάζας *m*, δίδονται από τις 4.1ζ και 4.1η:

$$\gamma\left(mc^2+V\right)=E\ \left(=\text{σταθερό}\right) \qquad (4.3α)$$

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(\left(m+\frac{1}{c^2}V\right)\gamma v^j\right)=-\partial_j V \qquad (4.3β)$$

Β) Ως προς το (*O*,x) η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας *V*(x) δίδεται από τη σχέση:

$$V(\mathrm{x})\equiv V(r)=-G\frac{Mm}{r}$$

$$\mathrm{x}=\left(ct,x^1,x^2,x^3\right),\ r=\left((x^1)^2+(x^1)^2+(x^1)^2\right)^{1/2} \qquad (4.3γ)$$

G είναι η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, *M* η μάζα του κεντρικού σωματιδίου που βρίσκεται ακίνητο στη χωρική αρχή *O*, του συστήματος συντεταγμένων (*O*,x), και *m* η μάζα του κινούμενου σωματιδίου P. Με *t* συμβολίζουμε τον παγκόσμιο χρόνο ως προς το σύστημα (*O*,x).
Από τις 4.3α,β,γ, συμπεραίνουμε ότι η τροχιά του P στο πλαίσιο της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας ως προς το αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O,x) προκύπτει ως λύση των εξισώσεων:

$$\gamma\left(1-\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right)=\varepsilon=\frac{E}{mc^2}=\text{σταθερό} \qquad (4.3δ)$$

$$\gamma \frac{dv^j}{dt} = -\frac{GM}{\varepsilon}\frac{1}{r^3}x^j \tag{4.3ε}$$

Το διατηρήσιμο μέγεθος E ορίζεται ως η σχετικιστική ενέργεια του κινούμενου σωματιδίου. Στο μη σχετικιστικό όριο ισχύουν οι συνθήκες:

$$\frac{v^2}{c^2} << 1 \text{ και } \frac{|V(r)|}{mc^2} = \frac{GM}{c^2}\frac{1}{r} << 1 \tag{4.3ζ}$$

Οι ποσότητες E και ε προσεγγίζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} E &= mc^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right) \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \\ \varepsilon &= \frac{E}{mc^2} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2 r} \end{aligned} \tag{4.3η}$$

Η ποσότητα $E\text{-}mc^2$ συγκλίνει στην έκφραση της μηχανικής ενέργειας του σωματιδίου, όπως ορίζεται στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής. Η εξίσωση 4.3ε συγκλίνει στην εξίσωση κίνησης του σωματιδίου, όπως προβλέπεται από τον 2ο Νόμο του Newton.

Στη συνέχεια, διαμορφώνουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου στο πλαίσιο του σχετικιστικού μοντέλου και συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες Νευτώνειες. Θεωρούμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (σχέσεις 4.3η):

$$r - \frac{GM}{c^2} > 0 \text{ και: } \varepsilon \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2}\frac{1}{r} > 1 - \frac{GM}{c^2}\frac{1}{r} > 0 \tag{4.3θ}$$

Συμβολίζουμε:

$$\mathrm{x} = \left(ct, x^1, x^2, x^3\right) = \left(ct, x, y, z\right),\ \vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \hat{x}\dot{x} + \hat{y}\dot{y} + \hat{z}\dot{z} = \hat{x}v_x + \hat{y}v_y + \hat{z}v_z$$

Τα διανύσματα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ παράγουν τον Ευκλείδειο χώρο E_3, έχουν μοναδιαίο μήκος, και είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Το εξωτερικό γινόμενο (cross-product)[12] στον E_3 είναι μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή που ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z},\ \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y},\ \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

Οι εξισώσεις 4.3δ και ε γράφονται:

$$\gamma\left(1 - \frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right) = \varepsilon \tag{4.3ι}$$

$$\gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{\varepsilon}\frac{1}{r^3}\vec{r} \tag{4.3κ}$$

Από την 4.3κ συνεπάγεται η εξίσωση:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = 0 \tag{4.3λ}$$

Συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα: $\vec{l}_N = m\vec{r} \times \vec{v}$ διατηρείται σταθερή κατά μήκος της τροχιάς του σωματιδίου. Την ονομάζουμε "Νευτώνεια στροφορμή" του P.

Ας θεωρήσουμε ότι οι αρχικές τιμές της θέσης και της χωρικής ταχύτητας του σωματιδίου δίδονται από τις σχέσεις:

$$\vec{r}(0) = \hat{x}x_0 \leftrightarrow \left(x_0, 0, 0\right),\ \vec{v}(0) = \hat{y}v_0 \leftrightarrow \left(0, v_0, 0\right) \tag{4.3μ}$$

Από τις αρχικές συνθήκες 4.3μ και την εξίσωση διατήρησης 4.3λ, βρίσκουμε ότι η σταθερή τιμή της $\vec{l}_N$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{l}_N = m\vec{r} \times \vec{v} = \hat{x} \times \hat{y}\, m x_0 v_0 = \hat{z}\, m x_0 v_0 \tag{4.3ν}$$

Από την 4.3ν συνάγεται ότι η εικόνα της τροχιάς του P στον χώρο των συντεταγμένων $\vec{r} = \vec{r}_P(t)$ βρίσκεται πάνω στο επίπεδο Oxy και ότι το μέτρο της $\vec{l}_N = m\vec{r} \times \vec{v}$ είναι μια σταθερά της κίνησης:

$$\vec{l}_N = \hat{z}\, m\left(xv_y - yv_x\right) = \hat{z} m x_0 v_0 = \text{σταθερό} \Rightarrow \left\|\vec{l}_N\right\| = m x_0 v_0 \tag{4.3ξ}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του P λαμβάνουν την απλούστερη μορφή:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\left(1 - \frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right)\frac{GM}{r^3}\vec{r} \qquad (4.3ο)$$

$$\gamma\left(1 - \frac{GM}{c^2}\frac{1}{r}\right) = \varepsilon = \frac{E}{mc^2} = \text{σταθερό} \qquad (4.3π)$$

$$\vec{l}_N = \hat{z}\, m\left(xv_y - yv_x\right) = \hat{z}mx_0v_0 = \text{σταθερό} \qquad (4.3ρ)$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y \,,\ \vec{v} = \hat{x}v_x + \hat{y}v_y \,,\ \varepsilon^2 = \frac{\left(1 - \frac{GM}{c^2x_0}\right)^2}{1 - \frac{v_0{}^2}{c^2}} \,,\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

...όπου, σύμφωνα με την 4.20γ: $\varepsilon > 0$, $x_0 > \dfrac{GM}{c^2}$

Στο μη σχετικιστικό όριο: $\varepsilon \to 1$, $\dfrac{GM}{x_0c^2} \to 0$, $\dfrac{v_0{}^2}{c^2} \to 0$ και οι εξισώσεις 4.23 συγκλίνουν στις εξισώσεις:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = E - mc^2 = E_N = \text{σταθερό} \qquad (4.3σ)$$

$$\vec{l}_N = \hat{z}\, m\left(xv_y - yv_x\right) = \hat{z}mx_0v_0 = \text{σταθερό}$$

...που περιγράφουν τις τροχιές του Kepler στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

4.4 Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη[2]

Θεωρούμε ένα αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα (O,x) και διερευνούμε αν υπάρχει αποδεκτή δύναμη Minkowski K(x) που είναι γραμμική ως προς την τετρα-ταχύτητα του κινούμενου σωματιδίου P. Αν υπάρχει, τότε η αναλυτική έκφραση της K(x) θα πρέπει να εκφράζεται από τις σχέσεις:

$$K(\mathrm{x}) = e_\mu K^\mu(\mathrm{x}) ,\ K^\mu(\mathrm{x}) = \frac{q}{c}F^\mu{}_\nu(\mathrm{x})U^\nu(\mathrm{x}) \ \text{ ή: } K_\mu = \eta_{\mu\kappa}K^\kappa = \frac{q}{c}F_{\mu\nu}U^\nu \qquad (4.4α)$$

...όπου: q είναι βαθμωτή σταθερά ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς, που χαρακτηρίζει το σωματίδιο P, και [$F_{\mu\nu}$(x)] τανυστής που προσδιορίζει τις συνιστώσες της K ως προς το (O,x).
Η K(x) οφείλει να ικανοποιεί τη συνθήκη 4.θ της παραγράφου 4:

$$\left\langle \frac{DP}{D\tau}, U\right\rangle = \left\langle K, U\right\rangle = 0 \ \text{ όπου } P = mU$$

Από την 4.θ και την 4.4α συνεπάγεται ότι σε κάθε σημείο της κοσμικής γραμμής του P, η τετρα-ταχύτητα, ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\left\langle K, U\right\rangle = 0 \Leftrightarrow \eta_{\mu\nu}K^\mu U^\nu = K_\mu U^\mu = 0 \Rightarrow \frac{q}{c}F_{\mu\nu}U^\nu U^\mu = 0 \Rightarrow \frac{q}{c}F_{\nu\mu}U^\nu U^\mu = 0$$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες συνεπάγεται ότι ο τανυστής [$F_{\mu\nu}$(x)] πρέπει να είναι αντισυμμετρικός:

$$\left(F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu}\right)U^\nu U^\mu = 0 \Leftrightarrow F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu} = 0 \qquad (4.4β)$$

Συμπεραίνουμε η δύναμη Minkowski μπορεί να είναι γραμμική ως προς την τετρα-ταχύτητα του σωματιδίου αν και μόνον αν ο πίνακας [$F_{\mu\nu}$(x)] είναι αντισυμμετρικός.

<u>Δείξτε ότι</u>:
α) Κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^\mu = x^\mu(x')$ τα στοιχεία $F_{\mu\nu}$(x) μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$F_{\mu\nu}(x) = F'_{\kappa\lambda}(x')\partial_\mu x'^\kappa \partial_\nu x'^\lambda$

β) Αν ο πίνακας [$F_{\mu\nu}$(x)] είναι αντισυμμετρικός σε ένα αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, τότε είναι αντισυμμετρικός σε κάθε αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς

γ) Ως προς κάθε αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, οι πίνακες: [$F_{\mu\nu}$], [$F_\mu{}^\nu$], [$F^{\mu\nu}$] μπορούν να γραφτούν:

$$\left[F_{\mu\nu}\right] = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \left[F^\mu{}_\nu\right] = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \left[F^{\mu\nu}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

...όπου E_j, B_j συναρτήσεις του x=(ct,x^1,x^2,x^3).

<u>Υπολογίστε</u> πώς μετασχηματίζονται οι συναρτήσεις E_j, B_j j=1,2,3, κάτω από έναν μετασχηματισμό Lorentz: $x^\mu = L^\mu{}_\nu x'^\nu$

Οι συνιστώσες της δύναμης Minkowski γράφονται:

$$K^\mu = \frac{q}{c}F^\mu{}_\nu U^\nu \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} K^0 = \frac{q}{c}\gamma\vec{E}\cdot\vec{v}\,,\ K^1 = \frac{q}{c}F^1{}_\nu U^\nu = \frac{q}{c}\gamma\left(-E_1c + B_3v^2 - B_2v^3\right) \\ K^2 = \frac{q}{c}\gamma\left(-E_2 - B_3v^1 + B_1v^3\right), K^3 = \frac{q}{c}\gamma\left(-E_3 + B_2v^1 - B_1v^2\right) \end{matrix} \right\}$$

$$K^0 = \frac{q}{c}\gamma\vec{E}\cdot\vec{v}\,,\ \vec{K} = -q\gamma\vec{E} + \frac{q}{c}\gamma\vec{v}\times\vec{B} \qquad (4.4\gamma)$$

...όπου: $\vec{K} = e_jK^j$, $j = 1,2,3$, $\vec{E} = e_1E_1 + e_2E_2 + e_3E_3$, $\vec{B} = e_1B_1 + e_2B_2 + e_3B_3$

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου P, κάτω από τη δράση της K(x) (εξισώσεις 4.κ και 4.λ της παραγράφου 4) λαμβάνουν τη μορφή:

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(m\gamma c\right) = K^0\,,\ \gamma\frac{d}{dt}\left(m\gamma v^j\right) = K^j\,,\ j = 1,2,3$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma c^2\right) = q\vec{E}\cdot\vec{v} \qquad (4.4\delta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma\vec{v}\right) = -q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B} \qquad (4.4\varepsilon)$$

Στο μη σχετικιστικό όριο οι εξισώσεις 4.4δ και 4,4ε ταυτίζονται με τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης φορτισμένου σωματιδίου μάζας m, και φορτίου q, σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$. Ο τανυστής [$F_{\mu\nu}$] που καθορίζει τη δύναμη K επί του φορτισμένου σωματιδίου P, ταυτίζεται με τον τανυστή του Η/Μ πεδίου.

Στην περίπτωση που το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ προκύπτει από ένα βαθμωτό δυναμικό $\varphi\left(\vec{r}\right)$, ισχύει:

$E_j = -\partial_j\varphi\,,\ j = 1,2,3$

...και από την 4.4δ προκύπτει εξίσωση διατήρησης της ενέργειας, στο πλαίσιο της Σχετικιστικής Μηχανικής:

$$\frac{d}{dt}\left(m\gamma c^2\right) = -q\partial_j\varphi\dot{x}^j \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi\right) = 0 \qquad (4.4\zeta)$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που ορίζεται από την υπόθεση: "υπάρχει αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O,x), ως προς το οποίο το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ είναι σε κάθε σημείο του χωροχρονικού συνεχούς ίσο με το μηδέν και το μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό, με κατεύθυνση τον αρνητικό ημιάξονα $x^3=z$: $\vec{B} = -e_3 B$, $B > 0$"

Διερευνούμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες σωματίδιο P μάζας m και φορτίου $q>0$ μπορεί να πραγματοποιήσει ομαλή κυκλική κίνηση γύρω από την αρχή O του συστήματος των χωρικών συντεταγμένων, επί του επιπέδου Oxy.

Λύση:

Οι αναλυτικές εξισώσεις της κοσμικής γραμμής του P, εφόσον αυτό πραγματοποιεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R και κυκλικής συχνότητας ω γύρω από το O, έχουν τη μορφή:

$$x^1 = R\cos\omega t\,,\ x^2 = R\sin\omega t \ \text{ όπου: } R,\omega = \ \text{σταθερά}$$

$$\left\{v^1 = -R\omega\sin\omega t\,,\ v^2 = R\omega\cos\omega t\right\} \Rightarrow \vec{v}^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 = R^2\omega^2 \qquad (4.4\eta)$$

...όπου t συμβολίζει τον παγκόσμιος χρόνος ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x).

Οι αναλυτικές εξισώσεις της κοσμικής γραμμής του P οφείλουν να ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης 4.4δ και 4.4ε.

Δεδομένου ότι:

$$\gamma = \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \text{σταθερό και } \vec{E} = 0$$

...η 4.4δ ικανοποιείται για κάθε τιμή των παραμέτρων.

Από την 4.4ε προκύπτουν οι συνθήκες:

$$m\gamma\frac{d}{dt}\left(e_1 v^1 + e_2 v^2\right) = -\frac{qB}{c}\left(e_1 v^1 + e_2 v^2\right)\times e_3 \Rightarrow m\gamma\frac{d}{dt}\left(e_1 v^1 + e_2 v^2\right) = \frac{qB}{c}\left(-e_1 v^2 + e_2 v^1\right)$$

$$m\gamma R\omega\frac{d}{dt}\left(-e_1\sin\omega t + e_2\cos\omega t\right) = \frac{qB}{c}R\omega\left(-e_1\cos\omega t - e_2\sin\omega t\right)$$

$$\omega = \frac{qB}{mc}\left(1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}\right)^{-1/2} \Rightarrow \omega = \frac{qB}{mc}\left(1 + \left(\frac{qBR}{mc^2}\right)^2\right)^{-1/2} \qquad (4.4\theta)$$

Σύμφωνα με την 4.4θ, η κυκλική συχνότητα της κίνησης του σωματιδίου έχει τιμή μικρότερη από την qB/mc, που υπολογίζεται στο μη σχετικιστικό όριο, και εξαρτάται και από την ακτίνα R της τροχιάς.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

Ενότητα 5
Ελεύθερο σωματίδιο - Κοσμική γραμμή ελευθέρου σωματιδίου σε πολικό και σε ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς - Χωρική γεωμετρία μιας ταυτοχρονικής πολλαπλότητας του χώρου Minkowski σε Καρτεσιανό και σε ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς

Στην πέμπτη Ενότητα, ορίζουμε την έννοια του "ελευθέρου σωματιδίου" σε χώρο Minkowski, και διερευνούμε την αναλυτική έκφραση της κοσμικής γραμμής του ως προς αδρανειακό Καρτεσιανό ή πολικό σύστημα, καθώς και ως προς ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων.
Στην ίδια Ενότητα, θεωρούμε ένα σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται ομαλά γύρω από τον άξονα *z* αδρανειακού συστήματος και παράγουμε τη γεωμετρία ενός στιγμιότυπου του περιστρεφόμενου επιπέδου *Oxy* ("ταυτοχρονικό επίπεδο του *Oxy*"): υπολογίζουμε τον μετρικό τανυστή, τη συνοχή, τις γεωδαιτικές καμπύλες και την καμπυλότητα του ταυτοχρονικού επιπέδου, καθώς και το συναλλοίωτο διαφορικό και την παράλληλη μετατόπιση διανυσματικού πεδίου κατά μήκος της περιμέτρου κύκλου που βρίσκεται επί του ταυτοχρονικού επιπέδου. Υπολογίζουμε τον λόγο της περιμέτρου προς τη διάμετρο του κύκλου και αναδεικνύουμε τον μη Ευκλείδειο χαρακτήρα του ταυτοχρονικού επιπέδου.

Έστω σωματίδιο Σ που κινείται ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων του χώρου Minkowski *M*. Η κοσμική γραμμή του Σ καθορίζεται από τις διαφορικές εξισώσεις 4.η και τις αρχικές συνθήκες που επιβάλλουμε στην κίνηση. Θα λέμε ότι το Σ είναι ένα **ελεύθερο σωματίδιο** τότε και μόνον αν η δύναμη Minkowski που ασκείται σε αυτό, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων (*O*,x) είναι ίση με το μηδέν:
$K^{\mu}(X)=0,\ \mu=0,1,2,3,\ \forall X\in M$
Όπως είδαμε στην Ενότητα 4, η δύναμη Minkowski είναι ένα διανυσματικό πεδίο του *M*. Κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^{\mu}=x^{\mu}(x')$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με τις σχέσεις: $K^{\mu}=\partial'_{\lambda}x^{\mu}K'^{\lambda}$ ή: $K'^{\mu}=\partial_{\lambda}x'^{\mu}K^{\lambda}$ Συνεπάγεται ότι **αν οι συνιστώσες της *K* είναι ίσες με το μηδέν σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τότε είναι ίσες με το μηδέν σε κάθε σύστημα συντεταγμένων**. Ή, αλλιώς: "**αν το σωματίδιο Σ κινείται στον χώρο Minkowski *M* και είναι ελεύθερο ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων, είναι ελεύθερο ως προς κάθε σύστημα συντεταγμένων**".

Εφόσον το (*O*,x) είναι Καρτεσιανό και αδρανειακό, και το Σ ελεύθερο, οι διαφορικές εξισώσεις της κίνησης του Σ με ελεύθερη παράμετρο τον παγκόσμιο χρόνο *t* του (*O*,x) έχουν τη μορφή (βλέπε εξισώσεις 4.κ, 4.λ):

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(m\gamma c\right)=0 \text{ όπου: } \gamma(v)=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \qquad (5.α)$$

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(m\gamma v^{j}\right)=0,\ j=1,2,3 \qquad (5.β)$$

...όπου:

$$c\Delta\tau=c\Delta t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}>0\Rightarrow v=\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2}<c \qquad (5.γ)$$

Από την 5.α έπεται ότι *γ*=σταθερό, οπότε, από την 5.β συνεπάγεται ότι:

$$\frac{dv^{j}}{dt}=0\Rightarrow v^{j}=\text{σταθερό},\ j=1,2,3 \qquad (5.δ)$$

Συμπεραίνουμε ότι ένα ελεύθερο σωματίδιο κινείται με σταθερή χωρική ταχύτητα, ως προς κάθε αδρανειακό και Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

5.1 Πολικό σύστημα αναφοράς (ΠΣΑ) στον χώρο Minkowski *M*
Έστω (*O*,x) ένα αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στον χώρο Minkowski *M*. Κάθε σημείο $X\in M$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του:
x=$\left(x^0,x^1,x^2,x^3\right)\in R^4$, ή: $x^0=ct$, $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$

Τα διανύσματα βάσης e_μ, $\mu = 0,1,2,3$ των εφαπτόμενων χώρων του *M* ως προς το (*O*,x) είναι σταθερά (σχέση 1.1γ της παραγράφου 1.1).

Θεωρούμε τον πολικό μετασχηματισμό συντεταγμένων:

$t = \bar{t}$, $x = \bar{r}\cos\bar{\theta}$, $y = \bar{r}\sin\bar{\theta}$, $z = \bar{z}$ ή:

$x^0 = \bar{x}^0$, $x^1 = \bar{x}^1\cos\bar{x}^2$, $x^2 = \bar{x}^1\sin\bar{x}^2$, $x^3 = \bar{x}^3$ (5.1α)

...όπου: $c\bar{t} = \bar{x}^0$, $\bar{r} = \bar{x}^1$, $\bar{\theta} = \bar{x}^2$, $\bar{z} = \bar{x}^3$

Το σύστημα συντεταγμένων $(O,\bar{\mathrm{x}})$ ονομάζεται "πολικό σύστημα συντεταγμένων" (ΠΣΣ) του χώρου Minkowski *M*.

Ο Ιακωβιανός πίνακας (Jacobian matrix) του μετασχηματισμού 5.1α, ορίζεται από την εξίσωση:

$$(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = (c\Delta\bar{t}, \Delta\bar{r}, \Delta\bar{\theta}, \Delta\bar{z})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\bar{\theta} & \sin\bar{\theta} & 0 \\ 0 & -\bar{r}\sin\bar{\theta} & \bar{r}\cos\bar{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.1\beta)$$

Το στοιχειώδες διάστημα στην περιοχή κάθε σημείου $X \in M$ διατηρείται αναλλοίωτο ως προς κάθε μετασχηματισμό συντεταγμένων, αλλά γενικά, η αναλυτική μορφή του διαφέρει στις νέες συντεταγμένες. Για παράδειγμα, σε Καρτεσιανές και σε πολικές συντεταγμένες, ισχύει:

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2 = (\Delta\bar{x}^0)^2 - (\Delta\bar{x}^1)^2 - (\bar{x}^1)^2(\Delta\bar{x}^2)^2 - (\Delta\bar{x}^3)^2 \qquad (5.1\gamma)$$

Παρατηρούμε ότι το στοιχειώδες διάστημα εκφράζεται με διαφορετικές αναλυτικές παραστάσεις στα δύο συστήματα συντεταγμένων.

Υπολογίζουμε τα διανύσματα βάσης των εφαπτόμενων χώρων του *M* ως προς το πολικό σύστημα σε συνάρτηση με τα διανύσματα βάσης σε Καρτεσιανές συντεταγμένες:

Για κάθε απειροστό διάνυσμα $\Delta X \in T_X M$ ισχύει:

$$\Delta X = e_0 c\Delta t + e_1\Delta x + e_2\Delta y + e_3\Delta z = e_{\bar{t}} c\Delta\bar{t} + e_{\bar{r}}\Delta\bar{r} + e_{\bar{\theta}}\Delta\bar{\theta} + e_{\bar{z}}\Delta\bar{z} \qquad (5.1\delta)$$

$$e_0 c\Delta\bar{t} + e_1\left(\Delta\bar{r}\cos\bar{\theta} - \Delta\bar{\theta}\,\bar{r}\sin\bar{\theta}\right) + e_2\left(\Delta\bar{r}\sin\bar{\theta} + \Delta\bar{\theta}\,\bar{r}\cos\bar{\theta}\right) + e_3\Delta\bar{z} = e_{\bar{t}} c\Delta\bar{t} + e_{\bar{r}}\Delta\bar{r} + e_{\bar{\theta}}\Delta\bar{\theta} + e_{\bar{z}}\Delta\bar{z}$$

...από την οποία συνεπάγονται οι σχέσεις:

$$e_{\bar{t}} \equiv \bar{e}_0 = e_0 \equiv e_t,\ e_{\bar{r}} \equiv \bar{e}_1 = e_1\cos\bar{\theta} + e_2\sin\bar{\theta}$$
$$e_{\bar{\theta}} \equiv \bar{e}_2 = -e_1\bar{r}\sin\bar{\theta} + e_2\bar{r}\cos\bar{\theta},\ e_{\bar{z}} \equiv \bar{e}_3 = e_3 \qquad (5.1\varepsilon)$$

<u>Υπολογίστε </u>τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή στις πολικές συντεταγμένες από τις σχέσεις:

$\bar{g}_{\mu\nu} = \langle \bar{e}_\mu, \bar{e}_\nu \rangle$

<u>Δείξτε ότι</u>:

$$\bar{g} = \left[\bar{g}_{\mu\nu}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{r}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (5.1\zeta)$$

...και επιβεβαιώστε την ισότητα 5.1γ.

Δεδομένου ότι στους πολικούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων η συντεταγμένη *z* διατηρείται αμετάβλητη, στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στη μελέτη της τρισδιάστατης υποπολλαπλότητας M_z του χώρου Minkowski *M* που ορίζεται από τη συνθήκη *z*=0.

Το απειροστό διάστημα μεταξύ δύο γειτονικών σημείων *X* και *Y* της M_z με συντεταγμένες ως προς το ΠΣΣ: $(c\bar{t}, \bar{r}, \bar{\theta})$ και $(c\bar{t} + \Delta\bar{t}, \bar{r} + \Delta\bar{r}, \bar{\theta} + \Delta\bar{\theta})$ αντίστοιχα, υπολογίζεται από την έκφραση:

$$\Delta s^2 = \|\Delta X\|^2 = c^2\Delta\bar{t}^2 - \Delta\bar{r}^2 - \bar{r}^2\Delta\bar{\theta}^2 \qquad (5.1\eta)$$

Εφόσον περιοριζόμαστε στη μελέτη της M_z, οι Ελληνικοί δείκτες $\mu,\nu,...$ λαμβάνουν τιμές στο σύνολο $\{0,1,2\}$ και οι Λατινικοί $j,k,...$ στο $\{1,2\}$

Στο ΠΣΣ, ο πίνακας του μετρικού τανυστή της M_z, και ο αντίστροφός του γράφονται:

$$\bar{g} \underset{def}{=} \left[\bar{g}_{\mu\nu}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{r}^2 \end{pmatrix},\ \bar{g}^{-1} = \left[\bar{g}^{\mu\nu}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\bar{r}^2} \end{pmatrix} \tag{5.1θ}$$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

5.2 Κοσμική γραμμή ελεύθερου σωματιδίου σε χώρο Minkowski ως προς το ΠΣΣ

Έστω Σ ελεύθερο σωματίδιο που κινείται στην υποπολλαπλότητα M_z του χώρου Minkowski M. Θα βρούμε τις εξισώσεις κίνησης Minkowski του Σ ως προς το πολικό σύστημα $(O,\bar{\mathrm{x}})$ του M, και από αυτές, την αναλυτική έκφραση της κοσμικής γραμμής του Σ για ορισμένες αρχικές συνθήκες της θέσης και της χωρικής ταχύτητας του.

Εφόσον το Σ είναι ελεύθερο, η αναλυτική έκφραση της κοσμικής γραμμής του είναι λύση των διαφορικών εξισώσεων (4.η, παράγραφος 4):

$$m\frac{D^{\mu}\bar{U}}{D\bar{\tau}} = 0,\ \mu = 0,1,2 \tag{5.2α}$$

...όπου (παράγραφος 5.1):

$$D\bar{\tau} = \frac{1}{\bar{\gamma}}Dt,\ \bar{\gamma} \underset{\text{ορισμ.}}{=} \left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\dot{\bar{r}}^2 + \bar{r}^2\dot{\bar{\theta}}^2\right)\right)^{-1/2} \tag{5.2β}$$

$$\bar{U} = \frac{DX}{D\bar{\tau}} = \bar{e}_0 c\bar{\gamma} + \bar{e}_1\dot{\bar{r}}\,\bar{\gamma} + \bar{e}_2\dot{\bar{\theta}}\bar{\gamma} \Rightarrow \bar{U}^0 = c\bar{\gamma},\ \bar{U}^1 = \dot{\bar{r}}\,\bar{\gamma},\ \bar{U}^2 = \dot{\bar{\theta}}\bar{\gamma}$$
$$\dot{\bar{r}} = \frac{d\bar{r}}{dt},\ \dot{\bar{\theta}} = \frac{d\bar{\theta}}{dt} \tag{5.2γ}$$

Οι συνιστώσες της συναλλοίωτης παραγώγου της τετρα-ταχύτητας δίδονται από τη σχέση Α2.8δ της παραγράφου Α2.(δ):

$$\frac{D^{\mu}\bar{U}}{D\bar{\tau}} = \frac{d\bar{U}^{\mu}}{d\bar{\tau}} + \bar{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\kappa}\bar{U}^{\lambda}\bar{U}^{\kappa},\ \mu = 0,1,2 \tag{5.2δ}$$

Από τις 5.2α και 5.2γ συνεπάγεται ότι οι εξισώσεις κίνησης του ελεύθερου σωματιδίου Σ ως προς το πολικό σύστημα $(O,\bar{\mathrm{x}})$ γράφονται:

$$\frac{d\bar{U}^{\mu}}{d\bar{\tau}} + \bar{\Gamma}^{\mu}_{\lambda\kappa}\bar{U}^{\lambda}\bar{U}^{\kappa} = 0,\ \mu = 0,1,2 \tag{5.2ε}$$

Τα σύμβολα Christoffel υπολογίζονται με εφαρμογή των σχέσεων Α2.6β της παραγράφου Α2.(γ), δεδομένης της μορφής 5.1θ του μετρικού τανυστή, ως προς το $(O,\bar{\mathrm{x}})$

Επιβεβαιώστε τις σχέσεις:

$$\bar{\Gamma}_{000} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{011} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{022} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{001} = \bar{\Gamma}_{010} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{002} = \bar{\Gamma}_{020} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{012} = \bar{\Gamma}_{021} = 0$$
$$\bar{\Gamma}_{111} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{100} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{122} = \bar{r}\ \ \bar{\Gamma}_{112} = \bar{\Gamma}_{121} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{101} = \bar{\Gamma}_{110} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{102} = \bar{\Gamma}_{120} = 0$$
$$\bar{\Gamma}_{222} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{200} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{211} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{201} = \bar{\Gamma}_{210} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{202} = \bar{\Gamma}_{220} = 0\ \ \bar{\Gamma}_{212} = \bar{\Gamma}_{221} = -\bar{r}$$

$$\bar{\Gamma}^{0}_{00} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{0}_{01} = \bar{\Gamma}^{0}_{10} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{0}_{02} = \bar{\Gamma}^{0}_{20} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{0}_{12} = \bar{\Gamma}^{0}_{21} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{0}_{11} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{0}_{22} = 0$$
$$\bar{\Gamma}^{1}_{00} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{1}_{01} = \bar{\Gamma}^{1}_{10} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{1}_{02} = \bar{\Gamma}^{1}_{20} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{1}_{12} = \bar{\Gamma}^{1}_{21} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{1}_{11} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{1}_{22} = -\bar{r}$$
$$\bar{\Gamma}^{2}_{00} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{2}_{01} = \bar{\Gamma}^{2}_{10} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{2}_{02} = \bar{\Gamma}^{2}_{20} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{2}_{12} = \bar{\Gamma}^{2}_{21} = \frac{1}{\bar{r}}\ \ \bar{\Gamma}^{2}_{11} = 0\ \ \bar{\Gamma}^{2}_{22} = 0$$

...οπότε από τις 5.2ε και 5.2γ διαμορφώνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\bar{\gamma}\frac{d}{dt}\left(c\bar{\gamma}\right)=0,\ \bar{\gamma}\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{r}}\bar{\gamma}\right)-\bar{r}\left(\dot{\bar{\theta}}\bar{\gamma}\right)^{2}=0,\ \bar{\gamma}\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{\theta}}\bar{\gamma}\right)+\frac{2}{\bar{r}}\dot{\bar{r}}\bar{\gamma}\dot{\bar{\theta}}\bar{\gamma}=0$$

$$\bar{\gamma}=\left(1-\frac{1}{c^{2}}\left(\dot{\bar{r}}^{2}+\bar{r}^{2}\dot{\bar{\theta}}^{2}\right)\right)^{-1/2}\equiv\gamma_{0}=\text{σταθερό} \qquad (5.2ζ)$$

$$\frac{d^{2}\bar{r}}{dt^{2}}-\bar{r}\dot{\bar{\theta}}^{2}=0 \qquad (5.2η)$$

$$\frac{d\dot{\bar{\theta}}}{dt}+\frac{2}{\bar{r}}\dot{\bar{r}}\dot{\bar{\theta}}=0 \qquad (5.2θ)$$

Θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή t=0 το Σ βρίσκεται στο χωρικό σημείο με συντεταγμένες: $\bar{r}(0)=\bar{r}_{0}$, $\bar{\theta}(0)=\varphi$, η ακτινική του ταχύτητα είναι: $\dot{\bar{r}}(0)=v_{0}$ και η γωνιακή ίση με το μηδέν: $\dot{\bar{\theta}}(0)=0$

Επιβεβαιώστε τις ισοδύναμες μορφές της εξίσωσης 5.2θ:

$$\frac{d\dot{\bar{\theta}}}{dt}+\frac{2}{\bar{r}}\dot{\bar{r}}\dot{\bar{\theta}}=0\Leftrightarrow\bar{r}^{2}\frac{d\dot{\bar{\theta}}}{dt}+2\bar{r}\dot{\bar{r}}\dot{\bar{\theta}}=0\Leftrightarrow\frac{d}{dt}\left(\dot{\bar{\theta}}\bar{r}^{2}\right)=0\Leftrightarrow\dot{\bar{\theta}}\bar{r}^{2}=l=\text{ σταθερό}$$

Η τελευταία, σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες λαμβάνει τη μορφή: $\dot{\bar{\theta}}\bar{r}^{2}=0$ Από την οποία έπεται ότι η γωνιακή ταχύτητα του Σ είναι ίση με το μηδέν για κάθε t: $\dot{\bar{\theta}}(t)=0$ Η γωνιακή συντεταγμένη των σημείων της κοσμικής γραμμής του Σ είναι σταθερή, και ίση με την αρχική: $\bar{\theta}(t)=\varphi$ Κάτω από αυτή τη συνθήκη, από την 5.2η συνεπάγεται ότι:

$$\frac{d^{2}\bar{r}}{dt^{2}}=0\Rightarrow\bar{r}=v_{0}t+\bar{r}_{0}$$

...που δηλώνει ότι το Σ κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_0, που σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x.

Από την 5.2ζ και τις αρχικές συνθήκες, συνεπάγεται ο περιορισμός:

$$R^{+}\ni\gamma_{0}=\left(1-\frac{1}{c^{2}}\left(\dot{\bar{r}}^{2}+\bar{r}^{2}\dot{\bar{\theta}}^{2}\right)\right)^{-1/2}=\left(1-\frac{v_{0}^{2}}{c^{2}}\right)^{-1/2}\Rightarrow c>v_{0}$$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

5.3 Ταυτοχρονικό (simultaneous) επίπεδο Riemann χώρου Minkowski ως προς στατικό σύστημα συντεταγμένων [9]

Έστω (O,x) ένα αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του χώρου Minkowski M. Τα σημεία της τρισδιάστατης υποπολλαπλότητας M_z (παράγραφος 5.1) προσδιορίζονται από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες x=(x^0,x^1,x^2). Ο παγκόσμιος χρόνος του M ως προς το (O,x) είναι $t=x^0/c$. Η $x^3=z$ συντεταγμένη είναι ίση με το μηδέν για κάθε σημείο της M_z, και ως εκ τούτου την αγνοούμε. Κάθε εφαπτόμενος χώρος της M_z σαρώνεται από τα σταθερά διανύσματα βάσης e_μ μ=0,1,2. Τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή της M_z ορίζονται από τις:

$$\left\langle e_{\mu},e_{\nu}\right\rangle=\eta_{\mu\nu}$$

...όπου (παράγραφος 1.1):

$$\left[\eta_{\mu\nu}\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Θεωρούμε έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων στην M_z:

$$x'^{\mu}=x'^{\mu}(x^{0},x^{1},x^{2})\text{ για }\mu=0,1,2,\text{ και }x'^{3}=x^{3}$$

...τέτοιον ώστε το σύστημα συντεταγμένων (O',x') να είναι στατικό (παράγραφος 3.3).

Τα διανύσματα βάσης $e'_\mu(X)$, μ=0,1,2 που σαρώνουν τους εφαπτόμενους υπόχωρους T_XM_z υπολογίζονται συναρτήσει των $e_\mu(X)$ ως ακολούθως:

Έστω απειροστό διάνυσμα $\Delta X\in T_XM_z$

$$\Delta X = e_\nu \Delta x^\nu = e'_\mu(X)\Delta x'^\mu = e'_\mu(X)\partial_\nu x'^\mu \Delta x^\nu \Rightarrow e_\nu = e'_\mu(X)\partial_\nu x'^\mu \,,\; e'_\mu(X) = e_\nu \partial'_\mu x^\nu$$

Τα στοιχεία του μετρικού τανυστή της M_z ως προς το (O',x'), υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \left\langle e'_\mu(X), e'_\nu(X) \right\rangle = \left\langle e_\kappa, e_\lambda \right\rangle \partial'_\mu x^\kappa \, \partial'_\nu x^\lambda = \eta_{\kappa\lambda}\, \partial'_\mu x^\kappa \, \partial'_\nu x^\lambda \quad (5.3α)$$

...όπου: $\left\langle U,V \right\rangle$, $\forall U,V \in T_X M_z$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο, όπως ορίζεται στους εφαπτόμενους χώρους της M_z ως προς το Καρτεσιανό, αδρανειακό σύστημα (O,x).
Αφού θεωρήσαμε ότι το (O',x') είναι στατικό, τα $g_{\mu\nu}$(x') δεν εξαρτώνται από τη χρονική συντεταγμένη:

$$g'_{\mu\nu}(x') = g'_{\mu\nu}(x'^1, x'^2) \text{ ή: } \partial'_0 g'_{\mu\nu}(x') = 0 \quad (5.3β)$$

Στο στατικό σύστημα συντεταγμένων (O',x') μπορούμε να συγχρονίσουμε τα χρονόμετρα που είναι τοποθετημένα στα χωρικά σημεία του με το χρονόμετρο στο O' (παράγραφος 3.3): οι ενδείξεις $t'_{O'}$ του χρονομέτρου στο O' ορίζουν τον παγκόσμιο χρόνο ως προς το (O',x').

Ορίζουμε ως "**ταυτοχρονικό επίπεδο Riemann της *Mz* τη χρονική στιγμή *t'*, ως προς το σύστημα συντεταγμένων (*O'*,x')**" το σύνολο των γεγονότων (σημείων) της M_z που συμβαίνουν τη χρονική στιγμή t', σύμφωνα με την ένδειξη του χρονομέτρου που είναι αγκιστρωμένο στο O'. Το συμβολίζουμε: $\boldsymbol{M_z[t']}$.
Μπορούμε να πούμε ότι το $M_z[t']$ είναι ένα στιγμιότυπο της χωροχρονικής πολλαπλότητας M_z τη στιγμή που ο παγκόσμιος χρόνος ως προς το (O',x') έχει την τιμή t'.
Στη συνέχεια, ορίζουμε αναλυτικά το $M_z[t']$, μελετάμε τους εφαπτόμενους χώρους του και παράγουμε την αναλυτική έκφραση του μετρικού τανυστή. Στην επόμενη παράγραφο, θα εφαρμόσουμε τις γενικές σχέσεις και προτάσεις που διατυπώνουμε εδώ, για να βρούμε τη γεωμετρία του ταυτοχρονικού επιπέδου $M_z[t']$, όταν το (O',x') είναι ένα ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων.

Πώς θα προσδιορίσουμε αναλυτικά τη γεωμετρία του ταυτοχρονικού επιπέδου $M_z[t']$ της M_z;
Δεδομένου ότι, σύμφωνα με τις παραγράφους 3.1 και 3.3 μπορούμε να ορίσουμε παγκόσμιο χρόνο ως προς το σύστημα (O',x'), θα μπαίναμε στον πειρασμό να ορίσουμε την $M_z[t']$ ως το σύνολο των σημείων της M_z που έχουν κοινή χρονική συντεταγμένη ct'. Ωστόσο στην παράγραφο 3.3 είδαμε ότι το ίδιο γεγονός καταγράφεται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές του παγκόσμιου χρόνου, από χρονόμετρα που βρίσκονται σε διαφορετικά χωρικά σημεία του (O',x'). Επομένως για να ορίσουμε δύο γειτονικά γεγονότα της M_z ως ταυτόχρονα (ή "ταυτοχρονικά"), καταφεύγουμε στη γενίκευση της σχέσης 3.2α της παραγράφου 3.2.

Έστω X ένα σημείο της M_z με συντεταγμένες x'=(ct',x^1,x^2). Κάθε σημείο Y που βρίσκεται σε μια απειροστή περιοχή $N_\varepsilon(X)$ της M_z θα λέμε ότι είναι ταυτοχρονικό του X εφόσον το απειροστό διάνυσμα:

$$\Delta_Y X = \overrightarrow{XY} = e'_\mu(X)\Delta_Y x'^\mu \in T_X M_z \,,\; \mu = 0,1,2$$

...είναι ορθογώνιο με το χρονοειδές διάνυσμα βάσης $e'_0(X)$ του $T_X M_z$ (9):

$$\left\langle e'_0(X), \Delta_Y X \right\rangle = 0 \quad (5.3γ)$$

<u>Δείξτε ότι</u>: το σύνολο $S_z[X]$ των διανυσμάτων του $T_X M_z$ που ικανοποιούν τη συνθήκη 5.3γ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $T_X M_z$.

Ονομάζουμε τον υπόχωρο $S_z[X]$ "ταυτοχρονικό επίπεδο του $T_X M_z$". Το ταυτοχρονικό επίπεδο $S_z[X]$ είναι ο εφαπτόμενος χώρος της ταυτοχρονικής πολλαπλότητας $M_z[t']$ στο σημείο $X \in M_z[t']$
Η εφαπτόμενη δέσμη της $M_z[t']$ είναι η ένωση όλων των ταυτοχρονικών επιπέδων $S_z[X]$, όπου X σημείο της $M_z[t']$:

$$S_z[t'] = \bigcup_{X \in M_z[t']} S_z[X] \quad (5.3δ)[2]$$

---

[2] Μπορούμε να φανταστούμε ότι η πολλαπλότητα $M_z[t']$ συντίθεται ως εξής:
(α) Θεωρούμε το σημείο $O'_{t'} \to (ct', 0, 0) \in M_z$ ως προς το σύστημα (O',x'). Το t' είναι ο παγκόσμιος χρόνος, όπως ορίστηκε στην παράγραφο 3.3.

Το επόμενο βήμα είναι να περιγράψουμε τη γεωμετρία της ταυτοχρονικής πολλαπλότητας $M_z[t']$. Αυτό απαιτεί τον προσδιορισμό της θεμελιώδους ποσότητας που καθορίζει τη γεωμετρία μιας πολλαπλότητας, δηλαδή του μετρικού τανυστή $[\gamma_{\mu\nu}()]$ επί της εφαπτόμενης δέσμης $S_z[t']$.
Έστω:

$$\Delta X = e_0'(X)\Delta x'^0 + e_1'(X)\Delta x'^1 + e_2'(X)\Delta x'^2 \in S_z[X],\ X \in M_z[t']$$

Από τον ορισμό του $S_z[X]$ το ΔX οφείλει να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\left\langle e_0'(X), \Delta X \right\rangle = 0$$

...από την οποία συνεπάγονται οι σχέσεις:

$$\Delta x'^0 = -\frac{g_{01}'}{g_{00}'}\Delta x'^1 - \frac{g_{02}'}{g_{00}'}\Delta x'^2$$

$$\Delta X = \left(-e_0'g_{01}' + e_1'g_{00}'\right)\frac{1}{g_{00}'}\Delta x'^1 + \left(-e_0'g_{02}' + e_2'g_{00}'\right)\frac{1}{g_{00}'}\Delta x'^2$$

Οι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων:

$$\varepsilon_1' = \left(-e_0'g_{01}' + e_1'g_{00}'\right)\frac{1}{g_{00}'},\ \varepsilon_2' = \left(-e_0'g_{02}' + e_2'g_{00}'\right)\frac{1}{g_{00}'} \qquad (5.3\varepsilon)$$

...αποτελούν τα πεδία βάσης της εφαπτόμενης δέσμης $S_z[t']$: και παράγουν τους εφαπτόμενους χώρους $S_z[X]$ της $M_z[t']$:

$$\left\{X \in M_z[t'], \Delta X \in S_z(X)\right\} \Rightarrow \Delta X = \varepsilon_1'(X)\Delta x'^1 + \varepsilon_2'(X)\Delta x'^2 \qquad (5.3\zeta)$$

Ορίζουμε τον μετρικό τανυστή $[\gamma'_{jk}]$ στους εφαπτόμενους χώρους $S_z[X]$ για κάθε $X \in M_z[t']$ από τις σχέσεις 5.3ε:

$$\gamma'_{jk}(X) = -\left\langle \varepsilon_j', \varepsilon_k' \right\rangle_X = \left(-g_{jk}' + \frac{g_{j0}'g_{0k}'}{g_{00}'}\right)_X \quad j,k = 1,2 \quad X \in M_z[t'] \qquad (5.3\eta)$$

...όπου το αρνητικό πρόσημο καθιστά το εσωτερικό γινόμενο που επάγεται από τον $[\gamma'_{jk}]$ στους εφαπτόμενους χώρους $S_z[X]$ θετικά ορισμένο (βλέπε παραπομπή 9: The Classical Theory of Fields: L.D. Landau, E.M. Lifshitz, παράγραφος 84, σελίδες 234, 235...).
Η norm ΔL του $\Delta X = \varepsilon_j'\Delta x^j \in S_z[X]$ υπολογίζεται από την έκφραση:

$$\Delta L^2 = \left\langle \Delta X, \Delta X \right\rangle_S = \gamma'_{jk}(x'^1, x'^2)\Delta x'^j \Delta x'^k \qquad (5.3\theta)$$

...όπου: $\langle\,,\rangle_S$ συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο στον $S_z[X]$, όπως καθορίζεται από την 5.3η.
Το σύστημα συντεταγμένων (O',x') είναι στατικό: τα στοιχεία $g_{\mu\nu}$ είναι ανεξάρτητα της χρονικής συντεταγμένης x'^0. Έπεται ότι τα στοιχεία πίνακα γ'_{jk} είναι συναρτήσεις μόνο των χωρικών συντεταγμένων x^1, x^2, του X.

(β) Υπολογίζουμε τα διανύσματα βάσης του εφαπτόμενου χώρου $T_{O'_{t'}}M_z$ της M_z στο $O'_{t'}$ και βρίσκουμε τον ταυτοχρονικό του υπόχωρο $S_z[O'_{t'}]$, σύμφωνα με τη συνθήκη 5.3γ.
(γ) Για $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$ ορίζουμε το υποσύνολο $S_z[O'_{t'};\varepsilon]$ του $S_z[O'_{t'}]$ που απαρτίζεται από τα απειροστά διανύσματα $\overrightarrow{O'_{t'}Y}$ με συντεταγμένες στο διάστημα $(-\varepsilon,\varepsilon)$.
(δ) Ορίζουμε το σύνολο:

$$M_z[O'_{t'};\varepsilon] = \left\{Y \in M_z : Y \leftrightarrow \left(x'^{\ \mu}_{O'_{t'}} + \Delta y'^{\mu}\right) \text{ όπου: } e_\mu'(O'_{t'})\Delta y'^{\mu} \in S_z[O'_{t'};\varepsilon]\right\}$$

(ε) Επιλέγουμε ένα σημείο $Y_{(1)}$ της $M_z[O'_{t'};\varepsilon]$, διαφορετικό του $O'_{t'}$, επαναλαμβάνουμε τα βήματα (α)-(γ) και ορίζουμε το σύνολο:

$$M_z[Y_{(1)};\varepsilon] = \left\{Y \in M_z : Y \leftrightarrow \left(x'^{\ \mu}_{Y_{(1)}} + \Delta y'^{\mu}\right) \text{ όπου: } e_\mu'(Y_{(1)})\Delta y'^{\mu} \in S_z[Y_{(1)};\varepsilon]\right\}$$

...και ούτω καθεξής. Η $M_z[t']$ προσδιορίζεται από την έκφραση:

$$M_z[t'] = M_z[O'_{t'};\varepsilon] \cup M_z[Y_{(1)};\varepsilon] \cup \ldots \cup M_z[Y_{(n)};\varepsilon] \cup \ldots$$

Ο πίνακας $\gamma' = \left[\gamma'_{jk}(x^1, x^2)\right]$ προσδιορίζει τον μετρικό τανυστή στην ταυτοχρονική πολλαπλότητα $M_z[t]$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων (O',x'). Η μετρική που ορίζεται από τη σχέση 5.3θ είναι θετικά ορισμένη, που σημαίνει ότι η $M_z[t]$ έχει τη δομή ενός **επιπέδου Riemann**(4). Αξίζει να σημειωθεί ότι στα στατικά συστήματα συντεταγμένων όπως το (O',x'), η μετρική Riemann των ταυτοχρονικών επιπέδων $M_z[t]$ είναι ανεξάρτητη της τιμής t' του παγκόσμιου χρόνου, που σημαίνει ότι οι αποστάσεις μεταξύ των χωρικών σημείων, καθώς και όλες οι γεωμετρικές ιδιότητες του επιπέδου $M_z[t]$ δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Αντίθετα, σε περιπτώσεις μη στατικών συστημάτων αναφοράς, ένας παρατηρητής θα διαπίστωνε ότι οι αποστάσεις μεταξύ των χωρικών σημείων, καθώς και κάθε άλλη γεωμετρική ιδιότητα του ταυτοχρονικού επιπέδου, εξαρτώνται από τη χρονική στιγμή που έχει ληφθεί το στιγμιότυπο της M_z.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

5.4 Το Ευκλείδειο επιπεδο

Στην περίπτωση που το (O',x') είναι ένα είναι αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του χώρου Minkowski, η μετρική της τρισδιάστατης πολλαπλότητας M_z (x^3=0) εκφράζεται από τη σχέση (καταργούμε τους τόνους και συμβολίζουμε το σύστημα αναφοράς: (O,x)):

$$\Delta s^2 = \left\|\Delta X\right\|^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \ , \ \mu,\nu = 0,1,2 \tag{5.4α}$$

Ο πίνακας [γ_{jk}] του μετρικού τανυστή του ταυτοχρονικού επιπέδου $M_z[t]$ ως προς το (O,x), υπολογίζεται σύμφωνα με τις σχέσεις 5.3η:

$$\gamma_{jk} = -\left\langle \varepsilon_j, \varepsilon_k \right\rangle = \delta_{jk} \ , \ \Delta L^2 = \left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 \tag{5.4β}$$

Από την 5.4β έπεται ότι ως προς κάθε αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, τα ταυτοχρονικά επίπεδα Riemann $M_z[t]$ της τρισδιάστατης πολλαπλότητας Minkowski M_z έχουν Ευκλείδεια δομή για κάθε τιμή του παγκόσμιου χρόνου.

Σε πολικές, συντεταγμένες (παράγραφος 5.1), τα στοιχεία-πίνακα του μετρικού τανυστή του $M_z[t]$ υπολογίζονται πάλι με εφαρμογή των 5.3η, αλλά τώρα ο πίνακας του μετρικού τανυστή της M_z δίδεται από την 5.1θ:

$$\bar{\gamma}_{11} = -\bar{g}_{11} + \frac{\bar{g}_{10}\bar{g}_{01}}{\bar{g}_{00}} = 1 \, , \, \bar{\gamma}_{22} = -\bar{g}_{22} + \frac{\bar{g}_{20}\bar{g}_{02}}{\bar{g}_{00}} = \bar{r}^{\,2} \, , \, \bar{\gamma}_{12} = \bar{\gamma}_{21} = 0 \tag{5.4γ}$$

Η μετρική του ταυτοχρονικού επιπέδου Riemann $M_z[t]$ εκφράζεται με τη σχέση:

$$\Delta L^2 = \bar{\gamma}_{jk}\Delta\bar{x}^j\Delta\bar{x}^k = \Delta\bar{r}^2 + \bar{r}^2\Delta\bar{\theta}^2 \ \text{όπου:}\ \bar{x}^1 \equiv \bar{r} \ , \ \bar{x}^2 \equiv \bar{\theta} \tag{5.4δ}$$

...όπως ήταν αναμενόμενο.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

5.5 Ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς σε χώρο Minkowski

Στην παρούσα παράγραφο θεωρούμε ένα αδρανειακό σύστημα (O,x) του χώρου Minkowski M και ένα σύστημα (O',x') που έχει κοινή χωρική αρχή με το (O,x) και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον άξονα $x^3=z$. Συνθέτουμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων που συνδέουν τα συστήματα (O,x) και (O',x') και παράγουμε την αναλυτική μορφή του μετρικού τανυστή του χώρου Minkowski M, καθώς και της υποπολλαπλότητας M_z (z=0) του M ως προς το (O',x').

Ορίζουμε το ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα (O,x') όπου: x'=(ct',r',θ',z') μέσω του μετασχηματισμού συντεταγμένων:

$$t' = t \ , \ r' = \bar{r} \ , \ \theta' = \bar{\theta} - \omega t \ , \ z' = z \tag{5.5α}$$

όπου τα σύμβολα με μπάρα αναφέρονται στις πολικές συντεταγμένες των σημείων του χώρου Minkowski M, ως προς ένα πολικό σύστημα αναφοράς $(O,\bar{x}) \equiv (O;t,\bar{r},\bar{\theta})$ (παράγραφος 5.1).

Το (O,x') περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα z του (O,x). Τα δύο συστήματα έχουν κοινό παγκόσμιο χρόνο t και κοινή αρχή O.

Περιορίζουμε τη μελέτη μας στην υποπολλαπλότητα M_z του χώρου Minkowski που, και στα δύο συστήματα ορίζεται από την εξίσωση z=0. Οπότε, ο μετασχηματισμός 5.5α περιορίζεται στον:

$$t' = t \ , \ r' = \bar{r} \ , \ \theta' = \bar{\theta} - \omega t \tag{5.5β}$$

Βρίσκουμε τον μετασχηματισμό των συνιστωσών των διανυσμάτων των εφαπτόμενων χώρων της M_z που επιφέρει ο μετασχηματισμός 5.5β. Προς τούτο χρειαζόμαστε τις σχέσεις των απειροστών μεταβολών των συντεταγμένων που συνεπάγονται από τον 5.5β:

$$\Delta t' = \Delta t\,,\ \Delta r' = \Delta \bar{r}\,,\ \Delta\theta' = \Delta\bar{\theta} - \omega\Delta t \qquad (5.5\gamma)$$

ή:

$$\left(c\Delta t', \Delta r', \Delta\theta'\right) = \left(c\Delta t, \Delta\bar{r}, \Delta\bar{\theta}\right)\Omega \ \text{ όπου: } \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega/c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5.5\delta)$$

Ο πίνακας Ω είναι ο "Ιακωβιανός πίνακας" του μετασχηματισμού συντεταγμένων 5.5β.
Τα πεδία των διανυσμάτων βάσης των εφαπτόμενων χώρων και ο μετρικός τανυστής της M_z, ως προς το σύστημα (O,x') υπολογίζονται από τις ακόλουθες ισότητες και σχέσεις:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta\bar{r}^2 - \bar{r}^2\Delta\bar{\theta}^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta r'^2 - r'^2\left(\Delta\theta' + \omega\Delta t'\right)^2 =$$

$$= c^2\Delta t'^2\left(1 - \frac{\omega^2 r'^2}{c^2}\right) - 2r'^2\frac{\omega}{c}c\Delta t'\Delta\theta' - \Delta r'^2 - r'^2\Delta\theta'^2$$

$$\Delta s = c\Delta t\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\dot{r}'^2 + r'^2\left(\omega + \dot{\theta}'\right)^2\right)} = \frac{c\Delta t}{\gamma'} \qquad (5.5\varepsilon)$$

όπου: $\gamma' \underset{def}{=} \dfrac{c\Delta t}{\Delta s} = \left(1 - \dfrac{1}{c^2}\left(\dot{r}'^2 + r'^2\left(\omega + \dot{\theta}'\right)^2\right)\right)^{-1/2}$, $\dot{r}' \underset{def}{=} \dfrac{dr'}{dt}$, $\dot{\theta}' \underset{def}{=} \dfrac{d\theta'}{dt}$

Τα πεδία των διανυσμάτων βάσης των εφαπτόμενων χώρων της M_z ως προς τα $(O,\bar{\mathrm{x}}) \equiv (O;t,\bar{r},\bar{\theta})$ και $(O,\mathrm{x}') \equiv (O;t,r',\theta')$ για κάθε $\Delta X \in T_X M_z$ ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$\Delta X = e_0'c\Delta t + e_1'\Delta r' + e_2'\Delta\theta' = \bar{e}_0 c\Delta t + \bar{e}_1\Delta\bar{r} + \bar{e}_2\Delta\bar{\theta} \qquad (5.5\zeta)$$

Από τις 5.1δ, 5.1ε, 5.5γ και 5.5ζ συνεπάγονται διαδοχικά οι εξισώσεις:

$$e_0'c\Delta t + e_1'\Delta r' + e_2'\Delta\theta' = e_0 c\Delta t + \bar{e}_1\Delta r' + \bar{e}_2\left(\Delta\theta' + \omega\Delta t\right)$$

$$\left(e_0' - e_0 - \bar{e}_2\frac{\omega}{c}\right)c\Delta t' + \left(e_1' - \bar{e}_1\right)\Delta r' + \left(e_2' - \bar{e}_2\right)\Delta\theta' = 0$$

$$e_0' = e_0 + \bar{e}_2\frac{\omega}{c}\,,\ e_1' = \bar{e}_1\,,\ e_2' = \bar{e}_2 \qquad (5.5\eta)$$

Από τις 5.5η και την 5.1ζ, υπολογίζουμε τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή της M_z, ως προς το ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων (O,x'):

$$g_{00}' = 1 - \frac{r'^2\omega^2}{c^2}\,,\ g_{11}' = -1\,,\ g_{22}' = -r'^2\,, g_{01}' = g_{10}' = 0\,,\ g_{02}' = g_{20}' = -\frac{\omega r'^2}{c}\,, g_{12}' = g_{21}' = 0 \qquad (5.5\theta)$$

Ο μετρικός τανυστής της M_z, ως προς το (O,x') προσδιορίζεται από τους πίνακες:

$$g' = \left[g_{\mu\nu}'\right] = \begin{pmatrix} g_{00}' & 0 & -\frac{\omega}{c}r'^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\omega}{c}r'^2 & 0 & -r'^2 \end{pmatrix} \quad g'^{-1} = \left[g^{\mu\nu}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\omega}{c} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\omega}{c} & 0 & -\frac{1}{r'^2}g_{00}' \end{pmatrix} \qquad (5.5\iota)$$

...όπου: $g_{00}' = 1 - \dfrac{r'^2\omega^2}{c^2}$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

5.6 Κοσμική γραμμή ελεύθερου σωματιδίου ως προς ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς σε χώρο Minkowski

Στην προηγούμενη παράγραφο υπολογίσαμε τον πίνακα του μετρικού τανυστή ως προς το ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς (O',x') (σχέσεις 5.5ι) και εκφράσαμε τα πεδία βάσης των εφαπτόμενων χώρων της πολλαπλότητας M_z, ως γραμμικούς συνδυασμούς των πεδίων βάσης του πολικού συστήματος αναφοράς $(O,\bar{\mathrm{x}}) \equiv (O;t,\bar{r},\bar{\theta})$ (εξισώσεις: 5.5η). Τα πεδία βάσης και ο μετρικός τανυστής καθορίζουν και τα υπόλοιπα στοιχεία της γεωμετρίας της M_z, όπως τη συνοχή,

την παράλληλη μετατόπιση και τη συναλλοίωτη διαφόριση ενός διανυσματικού πεδίου. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την κοσμική γραμμή ενός ελεύθερου σωματιδίου στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων του χώρου Minkowski. Ακολουθούμε το δρόμο της παραγράφου 5.2:
α) Υπολογίζουμε τις συνιστώσες της τετρα-ταχύτητας του Σ ως προς τα πεδία βάσης της M_z, στο ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα (O',x').
β) Υπολογίζουμε τα σύμβολα Christoffel, που προσδιορίζουν τη συνοχή της πολλαπλότητας Mz ως προς το σύστημα (O',x').
γ) Γράφουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης για το ελεύθερο σωματίδιο Σ, ως προς το (O',x').
δ) Διερευνούμε τις εξισώσεις κίνησης του Σ και μελετάμε τη συμπεριφορά των λύσεων για ορισμένες τιμές της αρχικής θέσης και της χωρικής ταχύτητας του Σ.

Ο ιδιόχρονος του Σ κατά μήκος της κοσμικής γραμμής του, ως προς το (O',x') υπολογίζεται από την 5.5ε:

$$\Delta\tau' = \frac{1}{c}\Delta s = \frac{1}{\gamma'}\Delta t \text{ όπου: } \gamma' = \left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\dot{r}'^2 + r'^2\left(\omega + \dot{\theta}'\right)^2\right)\right)^{-1/2},\ \dot{r}' = \frac{dr'}{dt},\ \dot{\theta}' = \frac{d\theta'}{dt}$$

Η τετρα-ταχύτητα $U(X)$ του Σ, ως προς τα πεδία βάσης της M_z, στο (O',x'), εκφράζεται με τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} \Delta X &= e_0' c\Delta t + e_1'\Delta r' + e_2'\Delta\theta' \\ U &= \frac{\Delta X}{\Delta\tau'},\ \Delta\tau' = \frac{1}{\gamma'}\Delta t \end{aligned}\right\} \Rightarrow U = e_0' c\gamma' + e_1'\dot{r}'\gamma' + e_2'\dot{\theta}'\gamma' \qquad (5.6\alpha)$$

$$U'^0 = c\gamma',\ U'^1 = \dot{r}'\gamma',\ U'^2 = \dot{\theta}'\gamma' \qquad (5.6\beta)$$

Τα σύμβολα Christoffel υπολογίζονται από τις σχέσεις (A2.6β) της παραγράφου A2.(γ).
Επιβεβαιώστε τις σχέσεις:

$$\Gamma_{000} = 0\ \ \Gamma_{011} = 0\ \ \Gamma_{022} = 0\ \ \Gamma_{001} = \Gamma_{010} = -\frac{\omega^2}{c^2}r\ \ \Gamma_{002} = \Gamma_{020} = 0\ \ \Gamma_{012} = \Gamma_{021} = -\frac{\omega}{c}r$$

$$\Gamma_{111} = 0\ \ \Gamma_{100} = \frac{\omega^2}{c^2}r\ \ \Gamma_{122} = r\ \ \Gamma_{112} = \Gamma_{121} = 0\ \ \Gamma_{101} = \Gamma_{110} = 0\ \ \Gamma_{102} = \Gamma_{120} = \frac{\omega}{c}r$$

$$\Gamma_{222} = 0\ \ \Gamma_{200} = 0\ \ \Gamma_{211} = 0\ \ \Gamma_{201} = \Gamma_{210} = -\frac{\omega}{c}r\ \ \Gamma_{202} = \Gamma_{220} = 0\ \ \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = -r$$

$$\Gamma^0{}_{00} = 0\ \ \Gamma^0{}_{01} = \Gamma^0{}_{10} = 0\ \ \Gamma^0{}_{02} = \Gamma^0{}_{20} = 0\ \ \Gamma^0{}_{11} = 0\ \ \Gamma^0{}_{12} = \Gamma^0{}_{21} = 0\ \ \Gamma^0{}_{22} = 0$$

$$\Gamma^1{}_{00} = -\frac{\omega^2}{c^2}r\ \ \Gamma^1{}_{01} = \Gamma^1{}_{10} = 0\ \ \Gamma^1{}_{02} = \Gamma^1{}_{20} = -\frac{\omega}{c}r\ \ \Gamma^1{}_{11} = 0\ \ \Gamma^1{}_{12} = \Gamma^1{}_{21} = 0\ \ \Gamma^1{}_{22} = -r$$

$$\Gamma^2{}_{00} = 0\ \ \Gamma^2{}_{01} = \Gamma^2{}_{10} = \frac{\omega}{c}\frac{1}{r}\ \ \Gamma^2{}_{02} = \Gamma^2{}_{20} = 0\ \ \Gamma^2{}_{11} = 0\ \ \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \frac{1}{r}\ \ \Gamma^2{}_{22} = 0$$

Η κοσμική γραμμή του ελεύθερου σωματιδίου Σ, ως προς το σύστημα συντεταγμένων (O',x') είναι λύση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης 4.η (Ενότητα 4), για K=0:

$$m\frac{D^\mu U}{D\tau'} = 0 \Rightarrow \frac{dU'^\mu}{d\tau'} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\kappa}U'^\lambda U'^\kappa = 0,\ \mu = 0,1,2 \qquad (5.6\gamma)$$

Θεωρούμε ότι η μηχανική κατάσταση του Σ τη χρονική στιγμή t=0 ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$r'(0) = r_0,\ \theta'(0) = \varphi,\ \dot{r}'(0) = 0,\ \dot{\theta}'(0) = 0 \qquad (5.6\delta)$$

Για να έχουμε πραγματικές λύσεις πρέπει να ισχύει:

$$\frac{1}{\left(\gamma'(0)\right)^2} = \left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\dot{r}'^2 + r'^2\left(\omega + \dot{\theta}'\right)^2\right)\right]_{t=0} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2} > 0 \Rightarrow \frac{\omega r_0}{c} < 1$$

Από τις 5.6γ προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{d\gamma'}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{r}'^2 + r'^2\left(\omega + \dot{\theta}'\right)^2 = r_0^2\omega^2 \qquad (5.6\varepsilon)$$

$$\gamma'\frac{d}{dt}(\gamma'\dot{r}') + \Gamma^1{}_{00}(c\gamma')^2 + \Gamma^1{}_{02}c\gamma'\dot{\theta}'\gamma' + \Gamma^1{}_{20}c\gamma'\dot{\theta}'\gamma' + \Gamma^1{}_{22}(\dot{\theta}'\gamma')^2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d\dot{r}'}{dt} - r'\left(\omega + \dot{\theta}'\right)^2 = 0 \qquad (5.6\zeta)$$

$$\gamma'\frac{d}{dt}(\dot{\theta}'\gamma') + 2\frac{\omega}{c}\frac{1}{r'}c\gamma'\dot{r}'\gamma' + 2\frac{1}{r'}\dot{r}'\gamma'\dot{\theta}'\gamma' = 0 \Rightarrow \frac{d\dot{\theta}'}{dt} + \frac{2\dot{r}'}{r'}\left(\omega + \dot{\theta}'\right) = 0 \qquad (5.6\eta)$$

<u>Δείξτε ότι</u> η συντεταγμένη r', και η ακτινική ταχύτητα του σωματιδίου σε συνάρτηση με τον χρόνο υπολογίζονται, αντίστοιχα, από τις αναλυτικές εκφράσεις:

$$r' = r_0\sqrt{\omega^2t^2+1}\,,\ \frac{dr'}{dt} = r_0\omega\frac{\omega t}{\sqrt{\omega^2t^2+1}}$$

Παρατηρούμε ότι η ακτινική ταχύτητα του Σ είναι πάντοτε μικρότερη της τιμής ωr_0 και επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dr'}{dt} = \lim_{t\to\infty}\left(r_0\omega\frac{\omega t}{\sqrt{\omega^2t^2+1}}\right) = r_0\omega$$

<u>Δείξτε ότι</u>: $\lim_{t\to\infty}\frac{d\theta'}{dt} = -\omega$

(...χρησιμοποιήστε την εξίσωση 5.6ε).

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

5.7 Η γεωμετρία ταυτοχρονικού επιπέδου Riemann του χώρου Minkowski ως προς ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

Διερευνούμε τα χαρακτηριστικά στοιχεία που συνθέτουν τη γεωμετρία του ταυτοχρονικού επιπέδου Riemann $M_z[t]$ της υποπολλαπλότητας M_z του χώρου Minkowski M ως προς το ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων (O,x). Θα δείξουμε ότι το $M_z[t]$ δεν είναι πλέον Ευκλείδειο, όπως συμβαίνει σε αδρανειακές συντεταγμένες, ή στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής. Οι αποστάσεις δύο σημείων του $M_z[t]$ δεν εξαρτώνται μόνον από τις διαφορές των συντεταγμένων τους, αλλά και από τις αποστάσεις τους από την αρχή του συστήματος αναφοράς. Κάθε ευθεία γραμμή δεν είναι κατ' ανάγκη γεωδαιτική γραμμή του επιπέδου και οι συνιστώσες ενός διανύσματος που μετατοπίζεται παράλληλα κατά μήκος καμπύλης, δεν διατηρούνται σταθερές. Η καμπυλότητα του $M_z[t]$ είναι διαφορετική από το μηδέν, σε αντίθεση με την Ευκλείδεια δομή των ταυτοχρονικών επιπέδων στο πλαίσιο των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς και της Νευτώνειας Μηχανικής. Τέλος, ο λόγος της περιμέτρου κύκλου C[O,R] του $M_z[t]$ που έχει κέντρο την αρχή O και ακτίνα R, προς τη διάμετρό του, είναι διαφορετικός από το π και η μεταβολή ενός διανύσματος που μεταφέρεται παράλληλα με τον εαυτό του κατά μήκος της περιμέτρου του C[O,R] και επανέρχεται στην αρχική του θέση, δεν είναι ίση με το μηδέν, όπως συμβαίνει σε Ευκλείδειο επίπεδο. Διερευνούμε και υπολογίζουμε τα ακόλουθα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του $M_z[t]$:

α) Τα πεδία βάσης και τον μετρικό τανυστή, β) Τη συνοχή, τα σύμβολα Christoffel και το συναλλοίωτο διαφορικό διανυσματικού πεδίου, γ) Τις γεωδαιτικές γραμμές, δ) Την καμπυλότητα, δ) Το λόγο της περιμέτρου προς τη διάμετρο κύκλου C[O,R]

α) Πεδία βάσης και μετρικός τανυστής

Στα επόμενα, καταργούμε τους τόνους στις ποσότητες που αναφέρονται στο ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς.

Η αναλυτική έκφραση των στοιχείων γ_{jk} του μετρικού τανυστή γ του ταυτοχρονικού επιπέδου Riemann $M_z[t]$ ως προς το ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα (O,x), προκύπτουν από τον συνδυασμό των 5.3η (παράγραφος 5.3) και 5.5ι (παράγραφος 5.5):

$$\gamma_{11} = -g_{11} + \frac{g_{10}g_{01}}{g_{00}} = 1\,,\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = -g_{12} + \frac{g_{10}g_{02}}{g_{00}} = 0 \qquad (5.7\alpha)$$

$$\gamma_{22} = -g_{22} + \frac{g_{20}g_{02}}{g_{00}} = r^2 + \frac{\frac{\omega}{c}r^2 \frac{\omega}{c}r^2}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}} = \frac{r^2}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}} = \frac{r^2}{g_{00}} \qquad (5.7\beta)$$

...όπου: $g_{00} \equiv 1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{g_{00}} \end{pmatrix}, \ \gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{g_{00}}{r^2} \end{pmatrix} \ \text{και: } \det\gamma = \frac{r^2}{g_{00}} \qquad (5.7\gamma)$$

Παρατηρούμε ότι:
α) τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή είναι ανεξάρτητα του παγκόσμιου χρόνου. Επομένως, η γεωμετρία του επιπέδου είναι στατική: οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων, καθώς και οι λοιπές γεωμετρικές σχέσεις δεν μεταβάλλονται με το χρόνο.
β) Η απόσταση μεταξύ δύο απειροστά γειτονικών σημείων του $M_z[t]$ με συντεταγμένες (r,θ) και $(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta)$, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta L^2 = \gamma_{jk}\Delta x^j \Delta x^k = \Delta r^2 + \frac{r^2}{g_{00}}\Delta\theta^2 \qquad (5.7\delta)$$

...όπου, έχουμε θέσει: $x^1=r$, $x^2=\theta$.
γ) για $\omega=0$, ή στο μη σχετικιστικό όριο όπου οι τιμές του ω και του r είναι τέτοιες ώστε $\omega r/c<<1$, το g_{00} συγκλίνει στο 1, και η 5.7δ συγκλίνει στη σχέση 5.4δ της παραγράφου 5.4). Στις περιπτώσεις αυτές το ταυτοχρονικό επίπεδο $M_z[t]$ έχει Ευκλείδεια γεωμετρική δομή.

Για $\omega>0$, η μετρική που ορίζεται από την 5.7δ είναι μη Ευκλείδεια. Παρουσιάζει ανωμαλία στα σημεία με ακτινική συντεταγμένη $r=\frac{c}{\omega}$, όπου το g_{00} μηδενίζεται.

Τα διανύσματα βάσης του $M_z[t]$ από τα οποία προκύπτει και η μορφή του μετρικού τανυστή, υπολογίζονται από τις εξισώσεις 5.3ε (παράγραφος 5.3), σε συνδυασμό με τις σχέσεις 5.1θ (παράγραφος 5.1) και 5.5η (παράγραφος 5.5):

$$\varepsilon_1 = e_r,\ \varepsilon_2 = \left(e_0\frac{\omega}{c}r^2 + e_\theta g_{00}\right)\frac{1}{g_{00}} = e_0\frac{\frac{\omega}{c}r^2}{1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2} + e_\theta$$

$$\varepsilon_1 = e_r,\ \varepsilon_2 = \left(\left(e_0 + e_\theta\frac{\omega}{c}\right)\frac{\omega}{c}r^2 + e_\theta g_{00}\right)\frac{1}{g_{00}} = e_0\frac{\frac{\omega}{c}r^2}{1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2} + e_\theta\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2} \qquad (5.7\varepsilon)$$

Από τις 5.7ε, με δεδομένες τις σχέσεις (παράγραφος 5.1):

$\langle e_0,e_0\rangle = 1,\ \langle e_0,e_r\rangle = 0,\ \langle e_0,e_\theta\rangle = 0,\ \langle e_r,e_\theta\rangle = 0,\ \langle e_r,e_r\rangle = -1,\ \langle e_\theta,e_\theta\rangle = -r^2$

... λαμβάνουμε:

$$\gamma_{11} = -\langle\varepsilon_1,\varepsilon_1\rangle = 1,\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0,\ \gamma_{22} = -\langle\varepsilon_2,\varepsilon_2\rangle = -\frac{\frac{\omega^2}{c^2}r^4}{\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2\right)^2} + r^2\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2\right)^2} = \frac{r^2}{1-\frac{\omega^2}{c^2}r^2}$$

...που συμφωνούν με τις 5.7β.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

β) Συνοχή και συναλλοίωτη διαφόριση

Ο ορισμός συνοχής στο $M_z[t]$ που είναι συμβατή με τον μετρικό τανυστή γ ως προς το ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων, μας βοηθά να κατανοήσουμε πώς μπορούμε να μετακινήσουμε ένα διάνυσμα παράλληλα με τον εαυτό του κατά μήκος μιας καμπύλης C του $M_z[t]$ και επιπλέον, μας δίνει τα εργαλεία για να εκφράσουμε τη μεταβολή οποιουδήποτε

διανυσματικού πεδίου $V(X)$ που μεταφέρεται κατά μήκος της C(4,6,10) (Παράρτημα Α2, παρ. (δ)). Η συνοχή προσδιορίζεται από τα σύμβολα Christoffel. Η απειροστή μεταβολή του $V(X)$ κατά μήκος της C υπολογίζεται από το συναλλοίωτο διαφορικό του $V(X)$, που καθορίζεται από τα σύμβολα Christoffel της συνοχής.
Τα σύμβολα Christoffel υπολογίζονται από τις σχέσεις (παρ. Α2(γ)):

$$\Gamma_{jkl} = \frac{1}{2}\left(-\partial_j \gamma_{kl} + \partial_l \gamma_{jk} + \partial_k \gamma_{lj}\right)$$

...όπου τα στοιχεία πίνακα του μετρικού τανυστή δίδονται από τις 5.7α και β:
<u>Επιβεβαιώστε ότι</u>:

$$\Gamma_{111} = 0,\ \Gamma_{112} = \Gamma_{121} = 0,\ \Gamma_{122} = -\frac{r}{g_{00}{}^2},\ \Gamma_{211} = 0,\ \Gamma_{212} = \Gamma_{221} = \frac{r}{g_{00}{}^2},\ \Gamma_{222} = 0 \qquad (5.7\zeta)$$

$$\Gamma^1{}_{11} = 0,\ \Gamma^1{}_{12} = \Gamma^1{}_{21} = 0,\ \Gamma^1{}_{22} = -\frac{r}{g_{00}{}^2},\ \Gamma^2{}_{11} = 0,\ \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = \frac{1}{rg_{00}},\ \Gamma^2{}_{22} = 0 \qquad (5.7\eta)$$

Έστω καμπύλη $c : c(L) = \left(c^1(L), c^2(L)\right)$ στον χώρο των συντεταγμένων και η εικόνα της C, στο ταυτοχρονικό επίπεδο $M_z[t]$. Η παράμετρος L είναι το μήκος της καμπύλης C που το μετράμε από κάποιο αυθαίρετα επιλεγμένο σημείο της. Το απειροστό μήκος ΔL επί της C δίδεται από την 5.7δ. Ένα απειροστό εφαπτόμενο διάνυσμα ΔC στο σημείο $C(L)$ της C, προσδιορίζεται από την απειροστή μετατόπιση: $\Delta C = \overrightarrow{XY}$ όπου: $X = C(L)$, $Y = C(L + \Delta L)$ (Παράρτημα Α1)
Το διάνυσμα ΔC ανήκει στον εφαπτόμενο χώρο $T_X M_z[t]$ και έχει τη μορφή:

$$\Delta C = \varepsilon_1\left(c(L)\right)\Delta c^1 + \varepsilon_2\left(c(L)\right)\Delta c^2\ ,\ \Delta c^j = \dot{c}^j \Delta L\ ,\ \dot{c}^j \underset{def}{=} \frac{dc^j(L)}{dL}\ ,\ j = 1,2$$

...όπου τα διανύσματα βάσης ε_1 και ε_2, δίδονται από τις 5.7ε.

Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο $V(r,\theta)$, που ορίζεται στην εφαπτόμενη δέσμη του ταυτοχρονικού επιπέδου $M_z[t]$. Η απειροστή μεταβολή του διανυσματικού πεδίου V κατά μήκος της καμπύλης C καθορίζεται από το συναλλοίωτο διαφορικό $D_{\Delta C}V\left(c(L)\right)$ του διανυσματικού πεδίου V κατά μήκος της C. Στο Παράρτημα Α2: παράγραφος (δ), δείχνουμε ότι το συναλλοίωτο διαφορικό είναι απειροστό διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου $T_{C(L)}M_z[t]$ και παράγουμε την αναλυτική του έκφραση:

$$D_{\Delta C}V\left(c(L)\right) = e_k D_{\Delta C}{}^k V\left(c(L)\right) = e_k \Delta L\left(\frac{dV^k}{dL} + \Gamma^k{}_{ij} V^i \frac{dc^j}{dL}\right)\Bigg|_{c(L)}$$

$$D_{\Delta C}{}^k V = \Delta L\left(\partial_j V^k + \Gamma^k{}_{ij} V^i\right)\frac{dc^j}{dL} \quad \text{ή:} \quad \frac{D_{\Delta C}{}^k V}{DL} = \frac{dV^k}{dL} + \Gamma^k{}_{ij} V^i \frac{dc^j}{dL}$$

...όπου $D_{\Delta L}{}^k V\left(c(L)\right)$ οι συνιστώσες του $D_{\Delta L}V\left(c(L)\right)$ ως προς τη βάση $\left\{e_k\left(c(L)\right)\right\}$
Σύμφωνα με τις σχέσεις 5.7η, η μεταβολή του του V κατά μήκος της C, υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$\frac{D_{DC}{}^1 V}{DL} = \frac{dV^1}{dL} - \frac{r}{g_{00}{}^2} V^2 \frac{d\theta}{dL},\ \frac{D_{DC}{}^2 V}{DL} = \frac{dV^2}{dL} + \frac{1}{rg_{00}} V^1 \frac{d\theta}{dL} + \frac{1}{rg_{00}} V^2 \frac{dr}{dL} \qquad (5.7\theta)$$

Το διανυσματικό πεδίο $V(r,\theta)$ μεταφέρεται παράλληλα προς τον εαυτό του κατά μήκος της C (ή αλλιώς: το διανυσματικό πεδίο $V(r,\theta)$ προκύπτει από την παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος V_0 κατά μήκος της καμπύλης C), αν και μόνον αν το συναλλοίωτο διαφορικό του V είναι ίσο με το μηδέν, σε κάθε σημείο της C (4,6,9,10,12) (Παράρτημα Α2: παράγραφος (δ)):
$D_{\Delta C}V\left(c(L)\right) = 0$ ή:

$$\left[\frac{dV^k}{dL} + \Gamma^k{}_{ij} V^i \frac{dc^j}{dL}\right]_{c(L)} = 0,\ \text{όπου: } k = 1,2 \qquad (5.7\iota)$$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

γ) Γεωδαιτικές γραμμές
Η έννοια και η περιγραφή των γεωδαιτικών καμπύλων ενός επιπέδου Riemann, αναλύεται στο Παράρτημα Α2, παράγραφος (ε). Η διαφορική εξίσωση που προσδιορίζει την αναλυτική έκφραση μιας γεωδαιτικής καμπύλης δίδεται από τις Α2.12α ή Α2.12β:

$$D_{\Delta C}{}^{j}U = \Delta U^{j} + \Gamma^{j}{}_{kl}U^{k}\Delta c^{l} = 0 \Leftrightarrow \frac{dU^{j}}{dL} + \Gamma^{j}{}_{kl}U^{k}U^{l} = 0$$

Ας θεωρήσουμε ότι η καμπύλη:

$C : C(r) = \bar{\Phi}\left(c(r)\right)$ όπου: $c^{1}(r) = r, c^{2}(r) = \theta(r)$

...είναι μια γεωδαιτική του ταυτοχρονικού επιπέδου $M_z[t]$. Το στοιχειώδες μήκος επί της C υπολογίζεται από την έκφραση:

$$\Delta L^{2} = \gamma_{jk}\Delta c^{j}\Delta c^{k} = \Delta r^{2} + \frac{r^{2}}{g_{00}}\Delta\theta^{2} = \Delta r^{2}\left(1 + \frac{r^{2}}{g_{00}}\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^{2}\right) \text{ όπου: } g_{00} \equiv 1 - \frac{r^{2}\omega^{2}}{c^{2}}$$

Ορίζουμε:

$$\eta \underset{def}{=} \left(1 + \frac{r^{2}}{g_{00}}\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^{2}\right)^{-1/2}$$

Οπότε: $\Delta L = \dfrac{\Delta r}{\eta}$

Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της C, γράφεται:

$$U = \varepsilon_{1}\frac{dc^{1}}{dL} + \varepsilon_{2}\frac{dc^{2}}{dL} = \varepsilon_{1}\frac{dr}{dL} + \varepsilon_{2}\frac{d\theta}{dL} = \varepsilon_{1}\eta + \varepsilon_{2}\eta\frac{d\theta}{dr}$$

$$\left[\varepsilon_{j} = \partial_{j}\bar{\Phi}\left(x^{1}, x^{2}\right),\ x^{1} = r, x^{2} = \theta\right]$$

Εφόσον υποθέσαμε ότι η C είναι γεωδαιτική, το U μεταφέρεται παράλληλα προς τον εαυτό του κατά μήκος της C (παρ. Α2.(ε)) επομένως ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$D_{\Delta C}{}^{\mu}U = \Delta U^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\kappa\lambda}U^{\kappa}\Delta c^{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{dU^{\mu}}{dL} + \Gamma^{\mu}{}_{\kappa\lambda}U^{\kappa}U^{\lambda} = 0$$

$$\eta\frac{d\eta}{dr} + \Gamma^{1}{}_{22}\eta^{2}\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^{2} = 0 \text{ και: } \eta\frac{d}{dr}\left(\eta\frac{d\theta}{dr}\right) + 2\Gamma^{2}{}_{12}\eta^{2}\frac{d\theta}{dr} = 0$$

$$\frac{d\eta}{dr} - \frac{r}{g_{00}{}^{2}}\eta\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^{2} = 0 \text{ και: } \frac{d}{dr}\left(\eta\frac{d\theta}{dr}\right) + \frac{2}{rg_{00}}\eta\frac{d\theta}{dr} = 0$$

$$\frac{d^{2}\theta}{dr^{2}} + \frac{2}{rg_{00}}\frac{d\theta}{dr} + \frac{r}{g_{00}{}^{2}}\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^{3} = 0 \qquad (5.7\kappa)$$

Οι λύσεις της 5.7κ είναι γεωδαιτικές του ταυτοχρονικού επιπέδου $M_z[t]$. Σημειώστε ότι οι ευθείες γραμμές που διέρχονται από την αρχή O και ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\frac{d\theta}{dr} = 0 \qquad (5.7\lambda)$$

...είναι λύσεις της 5.7κ (βέβαια, δεν είναι οι μόνες). Συμπεραίνουμε ότι οι καμπύλες με αναλυτική έκφραση:

$\theta(r) = \text{σταθερό}$

...είναι γεωδαιτικές του $M_z[t]$.

Δείξτε ότι οι διαφορικές εξισώσεις που προσδιορίζουν τις γεωδαιτικές καμπύλες του $M_z[t]$, αν θεωρήσουμε ως ελεύθερη παράμετρο τη συντεταγμένη θ, είναι οι ακόλουθες:

$$\frac{d\tilde{\eta}}{d\theta} + \frac{2}{rg_{00}}\tilde{\eta}\frac{dr}{d\theta} = 0 \text{ και: } \frac{d}{d\theta}\left(\tilde{\eta}\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{r}{g_{00}}\tilde{\eta} = 0 \text{ όπου: } \tilde{\eta} = \left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^{2} + \frac{r^{2}}{g_{00}}\right)^{-1/2}$$

…από τις οποίες συνεπάγεται η:

$$g_{00}\frac{d^{2}r}{d\theta^{2}} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^{2} - r = 0$$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

δ) Καμπυλότητα του ταυτοχρονικού επιπέδου Riemann

Η καμπυλότητα του $M_z[t]$ στην περιοχή ενός σημείου του P, υπολογίζεται με εφαρμογή της σχέσης Α3.10 του Παραρτήματος Α3, όπου οι τιμές των συμβόλων Christoffel λαμβάνονται από τις 5.7η (παράγραφος 5.7(β)):

$$K(P)=\frac{R}{\det\gamma}=\frac{1}{\det\gamma}\left(-\partial_1\Gamma_{212}+\Gamma_{\lambda 12}\Gamma^{\lambda}{}_{12}+\partial_2\Gamma_{211}-\Gamma_{\lambda 22}\Gamma^{\lambda}{}_{11}\right)$$

$$K(P)=\frac{R}{\det\gamma}=\frac{1}{\det\gamma}\left(-\partial_1\Gamma_{212}+\Gamma_{\lambda 12}\Gamma^{\lambda}{}_{12}+\partial_2\Gamma_{211}-\Gamma_{\lambda 22}\Gamma^{\lambda}{}_{11}\right)=\frac{g_{00}}{r^2}\left(-\partial_1\Gamma_{212}+\Gamma_{212}\Gamma^{2}{}_{12}\right)=$$

$$=\frac{g_{00}}{r^2}\left(-\frac{1}{g_{00}{}^3}\left(1+3\frac{\omega^2}{c^2}r^2\right)+\frac{r}{g_{00}{}^2}\frac{1}{rg_{00}}\right)=\frac{1}{g_{00}{}^2r^2}\left(-\left(1+3\frac{\omega^2}{c^2}r^2\right)+1\right)=-3\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{g_{00}{}^2}$$

Καταλήγουμε ότι η καμπυλότητα του $M_z[t]$ στο σημείο του P, δίδεται από την αναλυτική έκφραση:

$$K(P)=-3\frac{\omega^2}{c^2}\frac{1}{\left(1-\dfrac{r^2\omega^2}{c^2}\right)^2} \qquad (5.7\mu)$$

Σημειώστε ότι: α) Για $\omega=0$ η καμπυλότητα είναι ίση με το μηδέν σε κάθε σημείο του ταυτοχρονικού επιπέδου Riemann $M_z[t]$. Στην περίπτωση αυτή, όπως ήταν αναμενόμενο, το $M_z[t]$ έχει Ευκλείδεια γεωμετρική δομή. β) Στα σημεία με συντεταγμένη $r\to c/\omega$ η καμπυλότητα τείνει στο $-\infty$.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

ε) Υπολογισμός του λόγου της περιμέτρου προς τη διάμετρο κύκλου (*O,R*) στο ταυτοχρονικό επίπεδο $M_z[t]$

Ένας κύκλος κέντρου *O* και ακτίνας *R* στο $M_z[t]$ ορίζεται όπως στον Ευκλείδειο χώρο, ως ο γεωμετρικός τόπος τω σημείων του $M_z[t]$ που απέχουν από το *O* απόσταση μικρότερη ή ίση του *R*. Ο ορισμός ευσταθεί δεδομένου ότι, όπως είδαμε στην παράγραφο 5.3, στο $M_z[t]$ έχει οριστεί μετρική, άρα μπορούμε να υπολογίζουμε τις αποστάσεις μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων του. Επιπλέον, η μετρική είναι στατική που σημαίνει ότι η γεωμετρικές ιδιότητες των ταυτοχρονικών επιπέδων $M_z[t]$ δεν αλλάζουν με τον χρόνο. Πρέπει, ωστόσο να αποσαφηνίσουμε την έννοια της "απόστασης μεταξύ δύο σημείων του $M_z[t]$". Στο Ευκλείδειο επίπεδο E_2, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων του *P* και *Q*, υπολογίζεται ως εξής: συνδέουμε τα *P* και *Q* με μια ευθεία και υπολογίζουμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος *PQ*, χρησιμοποιώντας την Ευκλείδεια μετρική. Με άλλα λόγια: συνδέουμε τα *P* και *Q* με μια γεωδαιτική του E_2 και υπολογίζουμε το μήκος του τμήματος (*PQ*) της γεωδαιτικής χρησιμοποιώντας τη μετρική του E_2. Με βάση τη διαδικασία αυτή, μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια της απόστασης σε κάθε επίπεδο Riemann: Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων ενός επιπέδου Riemann *R* ορίζεται ως το μήκος του τόξου της γεωδαιτικής που συνδέει τα δύο σημεία του *R*. Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με την Πρόταση Α2.1 του Παραρτήματος Α2, αν συνδέσουμε τα δύο σημεία με οποιαδήποτε άλλη καμπύλη του *R*, γειτονική της γεωδαιτικής, το αντίστοιχο μήκος είναι μεγαλύτερο της απόστασής τους.

Έστω ο κύκλος (*O,R*) του $M_z[t]$ όπου *O* η αρχή του συστήματος των συντεταγμένων. *Ποια είναι η συντεταγμένη* r_0 *των σημείων της περιμέτρου του* (*O,R*);

Γνωρίζουμε ότι η ακτίνα του (*O,R*) είναι ίση με *R*. Αυτό σημαίνει ότι αν συνδέσουμε το κέντρο *O* και τυχαίο σημείο *Q* της περιμέτρου, με μια γεωδαιτική καμπύλη του $M_z[t]$, το τμήμα (*OQ*) της γεωδαιτικής έχει μήκος ίσο με *R*: (*OQ*)=*R*. Στην παράγραφο 5.7(γ) είδαμε ότι οι καμπύλες του $M_z[t]$ που διέρχονται από την αρχή *O* και ικανοποιούν τη συνθήκη (εξίσωση 5.7λ):

$$\frac{d\theta}{dr}=0$$

...είναι γεωδαιτικές του $M_z[t]$.

Θεωρούμε τη γεωδαιτική καμπύλη $C(r,\theta)=\left(\bar{\Phi}\circ c\right)(r,\theta)$ του $M_z[t]$ που ορίζεται από την καμπύλη *c* του χώρου των συντεταγμένων:

$$c:\{r\in[0,+\infty),\ \theta=\text{const.}\}$$

Το μήκος του τμήματος επί της C από το σημείο $O = C(0,\theta)$ στο $Q = C(r_0,\theta)$ υπολογίζεται από την παράσταση (σχέση 5.7δ, παράγραφος 5.7(α)):

$$(OQ) = \int_{\substack{r=0\\ \theta=\text{σταθ.}}}^{r=r_0} dL = \int_{\substack{r=0\\ \theta=\text{σταθ.}}}^{r=r_0} \sqrt{dr^2 + \frac{r^2}{g_{00}} d\theta^2} = \int_{r=0}^{r=r_0} dr = r_0$$

Συμπεραίνουμε ότι $r_0=R$. Επομένως, η περίμετρος $Per(C)$ του κύκλου (O,R) προσδιορίζεται από την καμπύλη $per(c)$ του χώρου των συντεταγμένων:

$$per(c): \{r = R,\ \theta \in [0,2\pi]\}$$

Το μήκος της περιμέτρου είναι:

$$L_{Per(C)}(R) = \oint_{per(c)} dL = \iint_{\substack{r=R\\ \theta\in[0,2\pi]}} \sqrt{\Delta r^2 + \frac{r^2}{g_{00}} \Delta\theta^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{R^2}{g_{00}(R)}} d\theta = \frac{2\pi R}{\sqrt{g_{00}(R)}} \qquad (5.7ν)$$

Από την 5.7ν, έπεται ότι ο λόγος της περιμέτρου προς τη διάμετρο $D=2R$ του κύκλου (O,R) δίδεται από τη σχέση:

$$\frac{L_c(R)}{2R} = \frac{\pi}{\sqrt{g_{00}(R)}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}} \qquad (5.7ξ)$$

Παρατηρούμε ότι για $\omega>0$, ο λόγος είναι μεγαλύτερος του π: η γεωμετρία του ταυτοχρονικού επιπέδου $M_z[t]$ είναι μη Ευκλείδεια. Για $\omega=0$, από την 5.7ξ προκύπτει ότι $L_C(R)/2R=\pi$, όπως προβλέπεται στο πλαίσιο της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

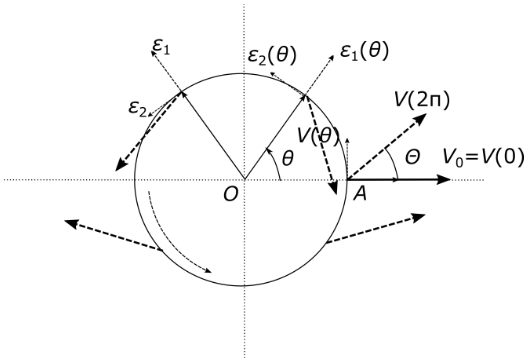
ζ) Παράλληλη μεταφορά διανύσματος κατά μήκος της περιμέτρου του κύκλου (*O,R*)

Η προσομοίωση της παράλληλης μετατόπισης διανύσματος κατά μήκος της περιμέτρου κύκλου του ταυτοχρονικού επιπέδου χώρου Minkowski σε ομαλά περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, και η σύγκριση με το αντίστοιχο Νευτώνειο μοντέλο, υπάρχει στις υπερσυνδέσεις:

The spatial geometry of a uniformly rotating reference frame: the relativistic and the Newtonian point of view (sch.gr)

Spatial Geometry of a Uniformly Rotating Reference Frame JS Model (compadre.org)

Στις παραγράφους 5.7α έως και ε, μελετήσαμε τη γεωμετρία του ταυτοχρονικού επιπέδου $M_z[t]$ και διαπιστώσαμε τον μη Ευκλείδειο χαρακτήρα της. Μια ακόμα συνέπεια μιας μη Ευκλείδειας γεωμετρικής δομής έχει να κάνει με την παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος κατά μήκος καμπύλης: Παράρτημα Α2, παράγραφος (β). Στο Ευκλείδειο επίπεδο E_2, αν μεταφέρουμε ένα διάνυσμα παράλληλα με τον εαυτό του κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης C, οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου που προκύπτει, διατηρούνται αναλλοίωτες σε κάθε σημείο της C. Είναι φανερό ότι αν η C είναι κλειστή και η τελική θέση του μεταφερόμενου διανύσματος ταυτίζεται με την αρχική του, τότε το αρχικό και το τελικό διάνυσμα ταυτίζονται.



Σχήμα 5.7.α: Παράλληλη μετατόπιση ενός διανύσματος κατά μήκος της περιμέτρου του κύκλου (*O,R*) του ταυτοχρονικού επιπέδου $M_z[t]$.

Στη συνέχεια, δείχνουμε με ένα παράδειγμα ότι αυτό δεν συμβαίνει στο μη Ευκλείδειο επίπεδο $M_z[t]$. Θεωρούμε ένα διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου $T_A M_z[t]$, όπου A σημείο της περιμέτρου $Per(C)$ του κύκλου (O,R) (παράγραφος 5.7(ε)), και το μεταφέρουμε παράλληλα κατά μήκος του (O,R), μέχρις ότου επιστρέψει στο A (σχήμα 5.7.α). Υπολογίζουμε τις συνιστώσες του τελικού διανύσματος και διαπιστώνουμε ότι για $\omega>0$ διαφέρουν από τις αρχικές τους τιμές.

Έστω: $V(\theta)=\varepsilon_1(R,\theta)V^1(\theta)+\varepsilon_2(R,\theta)V^2(\theta)$
...το διανυσματικό πεδίο που παράγεται από την παράλληλη μετατόπιση του διανύσματος:
$V(0)=\varepsilon_1(R,0)V_0\in T_AM_z[t]$
...κατά μήκος της $Per(C)$ (σχήμα 5.7.α, παράγραφος 5.7(α)).
Σύμφωνα με την παράγραφο (β) του Παραρτήματος Α2, το $V(\theta)$ μετατοπίζεται παράλληλα με τον εαυτό του κατά μήκος της $Per(C)$ τότε και μόνον τότε αν το συναλλοίωτο διαφορικό του κατά μήκος της $Per(C)$ είναι ίσο με το μηδέν. Αν συμβαίνει αυτό, οι συνιστώσες του $V(\theta)$ είναι λύσεις των εξισώσεων:
$\Delta V^j+\Gamma^j{}_{kl}V^k\Delta c^l=0$ όπου: $\Delta c^1=\Delta r=0$, $\Delta c^2=\Delta\theta$

$$\frac{dV^1}{d\theta}+\Gamma^1{}_{k2}V^k=0\,,\;\frac{dV^2}{d\theta}+\Gamma^2{}_{k2}V^k=0$$

Αντικαθιστούμε τα σύμβολα Christoffel με τις τιμές τους, σύμφωνα με τις σχέσεις 5.7η (παράγραφος 5.7(β)) και καταλήγουμε στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dV^1}{d\theta}-\frac{R}{\left(g_{00}(R)\right)^2}V^2=0\,,\;\frac{dV^2}{d\theta}+\frac{1}{Rg_{00}(R)}V^1=0 \qquad (5.7ο)$$

<u>Δείξτε ότι</u> Από τη επίλυση των 5.7ο, βρίσκουμε:

$$V^1(\theta)=V_0\cos\lambda\theta\,,\;V^2(\theta)=-V_0\frac{\sqrt{g_{00}(R)}}{R}\sin\lambda\theta$$
$$\text{όπου: }\lambda=\left(g_{00}(R)\right)^{-3/2}\,,\;g_{00}(R)=1-\frac{R^2\omega^2}{c^2} \qquad (5.7π)$$

Τα πεδία βάσης ε_1, ε_2 είναι ορθογώνια, αλλά όχι μοναδιαία. Ισχύει:

$$\langle\varepsilon_1,\varepsilon_1\rangle=1\,,\langle\varepsilon_1,\varepsilon_2\rangle=0\,,\langle\varepsilon_2,\varepsilon_2\rangle=\frac{r^2}{g_{00}(r)}$$

Είναι επιθυμητό και σκόπιμο να παρακολουθούμε την μεταβολή τως συνιστωσών του $V(\theta)$ ως προς ένα τοπικά ορθοκανονικό πεδίο βάσης. Προς τούτο, σε κάθε εφαπτόμενο χώρο $T_AM_z[t]$ όπου A σημείο της περιμέτρου του κύκλου (O,R), ορίζουμε τη βάση:

$$\tilde{\varepsilon}_1=\varepsilon_1\,,\;\tilde{\varepsilon}_2=\varepsilon_2\frac{\sqrt{g_{00}}}{r} \qquad (5.7ρ)$$

<u>Δείξτε ότι</u> το πεδίο βάσης $\{\tilde{\varepsilon}_1(R,\theta),\,\tilde{\varepsilon}_2(R,\theta)\}$ είναι ορθοκανονικό για κάθε $\theta\in(-\infty,+\infty)$

Ως προς το πεδίο βάσης $\{\tilde{\varepsilon}_1(R,\theta),\,\tilde{\varepsilon}_2(R,\theta)\}$ το διανυσματικό πεδίο $V(\theta)$ εκφράζεται από τη σχέση:

$$V(\theta)=\varepsilon_1V_0\cos\lambda\theta-\varepsilon_2V_0\frac{\sqrt{g_{00}(R)}}{R}\sin\lambda\theta=\tilde{\varepsilon}_1V_0\cos(-\lambda\theta)+\tilde{\varepsilon}_2V_0\sin(-\lambda\theta) \qquad (5.7σ)$$

<u>Δείξτε ότι</u> η norm του $V(\theta)$ διατηρείται σταθερή κατά μήκος της $Per(C)$, και ισχύει:
$\|V(\theta)\|=|V_0|$ για κάθε $\theta\in(-\infty,+\infty)$
Πώς συνδέεται το αποτέλεσμα αυτό με τις ιδιότητες της συνοχής που αναπτύσσονται στην παράγραφο (α) του παραρτήματος Α2;

Η γωνία Θ που σχηματίζει το διάνυσμα $V(\theta)$ με το στοιχείο βάσης $\tilde{\varepsilon}_1(\theta)$ υπολογίζεται από την ταυτότητα: $\cos\Theta=\dfrac{\langle V(\theta),\tilde{\varepsilon}_1(\theta)\rangle}{\|V(\theta)\|\|\tilde{\varepsilon}_1(\theta)\|}$
...και σε συνδυασμό με τις 5.7ρ, 5.7σ, βρίσκουμε ότι:

$$\cos\Theta=\cos\lambda\theta \qquad (5.7τ)$$

Από τις 5.7π, σ και τ, καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\Theta = -\left(1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}\right)^{-3/2} \theta \qquad (5.7υ)$$

Στο Ευκλείδειο επίπεδο, η γωνία Θ' που σχηματίζει το παράλληλα μεταφερόμενο διανυσματικό πεδίο $V(\theta)$ κατά μήκος της περιμέτρου του κύκλου (O,R) με το διάνυσμα βάσης $\varepsilon_1(\theta)$, από το σημείο A στο ίδιο σημείο, ισούται με -2π (σχήμα 5.7.α). Από την 5.7υ προκύπτει ότι στο μη Ευκλείδειο ταυτοχρονικό επίπεδο $M_z[t]$, η γωνία αυτή είναι διαφορετική από το -2π:

$$\theta = 0 \Rightarrow \Theta = 0 \text{ και για: } \theta = 2\pi \Rightarrow \Theta = -\frac{2\pi}{\left(1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}\right)^{-3/2}} \Rightarrow \Theta \leq -2\pi \qquad (5.7φ)$$

Σημειώνουμε ότι για $\omega = 0$ το ταυτοχρονικό επίπεδο έχει Ευκλείδεια γεωμετρική δομή (παράγραφος 5.7(α)) και η 5.7υ συγκλίνει στην: $\Theta=-\theta$. Για $\theta=2\pi$ έπεται ότι $\Theta=-2\pi$, όπως ήταν αναμενόμενο.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

Παράρτημα Α1: Τοπολογία, συνέχεια και διαφόριση σε affine χώρο (V,V_n)[7,8,11]

Βασικές έννοιες: Affine space (V,V_n) - Διανύσματα βάσης στο συσχετισμένο γραμμικό χώρο V_n - Ανοικτές περιοχές σημείων του V - Εσωτερικό σημείο υποσυνόλου του V - Ανοικτά σύνολα του V - Συνεχείς συναρτήσεις στο V - Διαφόριση στο V

Θεωρούμε ένα σύνολο σημείων V και ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο V_n. Το ζεύγος (V,V_n) αποτελεί έναν affine space[11], εφόσον ο χώρος V_n είναι **συσχετισμένος** με το σύνολο V σύμφωνα με την ακόλουθη παραδοχή: για κάθε ζεύγος σημείων X, Y του V ορίζεται η απεικόνιση $V \times V \ni (X,Y) \to \overrightarrow{XY} \in V_n$ που έχει τις ιδιότητες:

α) $\forall X \in V$ και $\forall U \in V_n$ υπάρχει ακριβώς ένα $Y \in V$ τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{XY} = U$

β) Για $U=0$ (0: το ουδέτερο στοιχείο του V_n) ισχύει $\overrightarrow{XX} = 0$ για κάθε $X \in V$ Αντιστρόφως: αν $\overrightarrow{XY} = 0$ τότε τα X και Y ταυτίζονται: $X \equiv Y$

γ) Για κάθε $X,Y,Z \in V$ ισχύει: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$

Από τις β και γ προκύπτουν οι σχέσεις:

δ) $\forall X,Y \in V$ ισχύει: $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX} = \overrightarrow{XX} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}$

ε) $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZX} = 0$

<u>Πρόταση 1</u>: Θεωρούμε ορισμένο -σταθερό- σημείο $O \in V_n$ Τότε, η απεικόνιση $V \ni X \to \overrightarrow{OX} \in V_n$ είναι 1-1 και επί.

<u>Απόδειξη</u>:

Σύμφωνα με την ιδιότητα α, για κάθε $U \in V_n$ υπάρχει ακριβώς ένα $Y \in V$ τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{OY} = U$, άρα η απεικόνιση είναι επί.

Έστω ότι για δύο σημεία X και Y του V ισχύει: $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OY}$ Τότε, σύμφωνα με τις ιδιότητες α-ε προκύπτει: $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = 0 \Rightarrow X \equiv Y$ άρα η απεικόνιση είναι ένα προς ένα. QED

Σύμφωνα με την πρόταση 1, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο O του V ως "αρχή" και να προσδιορίσουμε οποιοδήποτε άλλο σημείο του X, από το O και ένα **μονοσήμαντα ορισμένο** διάνυσμα του V_n:

$X \leftrightarrow \overrightarrow{OX} = U_X$, $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = U_Y - U_X = U \in V_n$

Έστω B_j , $j = 1,2...n$ μια βάση διανυσμάτων του V_n. Κάθε διάνυσμα $U \in V_n$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης:

$$U = \sum_{j=1}^{n} B_j U^j \, , \; U^j \in R$$

Για $X,Y,O \in V$ ισχύει: $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} \equiv U_{OY} - U_{OX} = \sum_{j=1}^{n} B_j \left(U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j \right)$ (A1.1)

Για ε>0, ορίζουμε ως ε-περιοχή του σημείου $X \in V$ το υποσύνολο του V:

$$N_\varepsilon(X) = \left\{ Y \in V : \overrightarrow{XY} = \sum_{j=1}^{n} B_j U_{XY}{}^j \text{ όπου: } \left| U_{XY}{}^j \right| < \varepsilon \text{ για κάθε } j = 1,2...n \right\} \quad \text{(A1.2)}$$

Αν O αυθαίρετο σημείο του V, σύμφωνα με τις σχέσεις Α1.1, ισχύει $U_{XY}{}^j = U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j$ και η Α1.2 γράφεται:

$$N_\varepsilon(X) = \left\{ Y \in V : \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = \sum_{j=1}^{n} B_j \left(U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j \right) \text{ όπου: } \left| U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j \right| < \varepsilon \text{ για κάθε } j = 1,2...n \right\}$$

Έστω A ένα υποσύνολο του V, και Z ένα σημείο του: $Z \in A$ Το Z είναι ένα **εσωτερικό σημείο** του A $\underset{ορισμός}{\Leftrightarrow}$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: $N_\varepsilon(Z) \subseteq A$

Θα λέμε ότι το A είναι ένα **ανοικτό** σύνολο στο $V \underset{ορισμός}{\Leftrightarrow}$ κάθε σημείο $X \in A$ είναι εσωτερικό σημείο του A.
Οι ορισμοί της περιοχής και του ανοικτού συνόλου ορίζουν μια τοπολογία[7,8,12] στον σύνολο V.

Πρόταση 2: Κάθε περιοχή $N_\varepsilon(X)$, $X \in V$ είναι ανοικτό σύνολο.
Απόδειξη:
Έστω $Y \in N_\varepsilon(X)$, $Y \neq X$. Αρκεί να δείξουμε ότι το Y είναι εσωτερικό σημείο της $N_\varepsilon(X)$, δηλαδή ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: $N_\delta(Y) \subseteq N_\varepsilon(X)$
Αν υπάρχει τέτοιο δ, θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη: $Z \in N_\delta(Y) \Rightarrow Z \in N_\varepsilon(X)$ ή:
$\left|U_{OZ}{}^j - U_{OY}{}^j\right| < \delta \ \Rightarrow \left|U_{OZ}{}^j - U_{OX}{}^j\right| < \varepsilon$ για κάθε $j = 1,2..n$
Με δεδομένη τη συνθήκη $\left|U_{OZ}{}^j - U_{OY}{}^j\right| < \delta$, αληθεύουν οι ανισότητες:

$$\left|U_{OZ}{}^j - U_{OX}{}^j\right| \le \left|U_{OZ}{}^j - U_{OY}{}^j\right| + \left|U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j\right| \le \delta + \max_{j=1,2...n}\left(\left|U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j\right|\right) \qquad (A1.3α)$$

Ώστε, για να αληθεύει η $\left|U_{OZ}{}^j - U_{OX}{}^j\right| < \varepsilon$ για κάθε j, αρκεί να διαλέξουμε το δ ώστε:

$$\delta + \max_{j=1,2...n}\left(\left|U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j\right|\right) < \varepsilon \qquad (A1.3β)$$

Δεδομένου ότι $Y \in N_\varepsilon(X)$, $Y \neq X$, ισχύει: $\left|U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j\right| < \varepsilon$ για κάθε $j = 1,2...n$, άρα και:

$$\max_{j=1,2...n}\left(\left|U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j\right|\right) < \varepsilon$$

Από την A1.3β συνεπάγεται ότι μπορούμε να διαλέξουμε το δ ώστε:

$$\delta = \frac{\varepsilon - \max\limits_{j=1,2...n}\left(\left|U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j\right|\right)}{2} > 0$$

Τότε όμως, από την A1.3α προκύπτει:

$$\left|U_{OZ}{}^j - U_{OX}{}^j\right| \le \left|U_{OZ}{}^j - U_{OY}{}^j\right| + \left|U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j\right| \le \frac{\varepsilon - \max\limits_{j=1,2...n}\left(\left|U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j\right|\right)}{2} + \max_{j=1,2...n}\left(\left|U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j\right|\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon + \max\limits_{j=1,2...n}\left(\left|U_{OY}{}^j - U_{OX}{}^j\right|\right)}{2} < \frac{\varepsilon + \varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{QED}$$

Σύγκλιση ακολουθίας σημείων του *V* - Συνεχείς συναρτήσεις στο *V*
Έστω μια ακολουθία X_n n=1,2,…σημείων του V. Η X_n λέμε ότι συγκλίνει σε ένα σημείο $X \in V \underset{ορισμ.}{\Leftrightarrow}$ για κάθε περιοχή $N_\varepsilon(X)$, υπάρχει φυσικός αριθμός $n(\varepsilon)$ ώστε: $n > n(\varepsilon) \Rightarrow X_n \in N_\varepsilon(X)$
Το X ονομάζεται όριο της X_n. Γράφουμε: $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \in X$

Έστω συνάρτηση $F: V \supseteq A \to F(A) = B \subseteq V$
Η F είναι συνεχής στο σημείο $X \in A \underset{ορισμ.}{\Leftrightarrow}$ για κάθε ακολουθία σημείων X_n του A που συγκλίνει στο X, ισχύει: $\lim\limits_{n\to\infty} F(X_n) = F(X)$, ή ισοδύναμα:
Για κάθε περιοχή $N_\varepsilon(F(X))$ υπάρχει $\delta(\varepsilon)$>0 ώστε: $Y \in N_{\delta(\varepsilon)}(X) \Rightarrow F(Y) \in N_\varepsilon\left(F(X)\right)$
Ή:
"Για κάθε περιοχή $N_\varepsilon(F(X))$, υπάρχει περιοχή $N_{\delta(\varepsilon)}(X)$ που περιέχεται στο σύνολο $F^{-1}\left(N_\varepsilon\left(F(X)\right)\right)$
Δηλαδή, η αντίστροφη εικόνα της περιοχής $N_\varepsilon(Y)$ όπου $Y=F(X)$, είναι ανοικτό σύνολο: για κάθε $X \in F^{-1}\left(N_\varepsilon(Y)\right)$ υπάρχει $N_{\delta(\varepsilon)}(X) \subseteq F^{-1}\left(N_\varepsilon(Y)\right)$

Διαφορίσιμες συναρτήσεις στο *V*
Έστω X και Y δύο "γειτονικά" σημεία του V. Το Y θεωρείται γειτονικό του X, εφόσον βρίσκεται σε μια περιοχή $N_\varepsilon(X)$ του X, όπου το ε θετικός αριθμός όσο κοντά στο μηδέν επιθυμούμε (λέμε ότι το ε τείνει στο μηδέν). Το αντίστοιχο διάνυσμα $\overrightarrow{XY}$ του συσχετισμένου χώρου V_n γράφεται:

$\overrightarrow{XY} = \sum_{j=1}^{n} B_j \Delta X^j$ όπου: $\overrightarrow{OY} = \sum_{j=1}^{n} B_j Y^j$, $\overrightarrow{OX} = \sum_{j=1}^{n} B_j X^j$ και $\Delta X^j \underset{\text{ορισμ.}}{=} Y^j - X^j$

Σύμφωνα με την τοπολογία που έχει οριστεί, ισχύει: $Y \in N_\varepsilon(X) \Rightarrow \left|\Delta X^j\right| < \varepsilon$ για κάθε $j = 1, 2..n$

Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $F : V \to R$ και τα γειτονικά σημεία X και Y του V:

$\overrightarrow{OX} = \sum_{j=1}^{n} B_j X^j$, $\overrightarrow{OY} = \sum_{j=1}^{n} B_j Y^j$, όπου: $Y^j = \begin{cases} X^j & \text{για } j \neq k \\ X^j + \Delta X^j & \text{για } j = k \end{cases}$

Ορίζουμε την k_μερική παράγωγο (k_partial derivative) της $F^{(7,8)}$ στο X, το όριο (εφόσον υπάρχει):

$$\partial_k F(X) \underset{\text{ορισμ.}}{=} \lim_{\Delta x^k \to 0} \frac{F(Y) - F(X)}{\Delta X^k} \qquad \text{(A1.4)}$$

Η διαφορική μεταβολή (ή: κατευθυνόμενο διαφορικό) της F κατά μήκος του απειροστού διανύσματος:

$\Delta X = \overrightarrow{XY} = \sum_{j=1}^{n} B_j \Delta X^j$ όπου για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει: $0 < \left|\Delta X^j\right| < \varepsilon$

...του συσχετισμένου χώρου V_n, ορίζεται από τη σχέση:

$$\Delta F(X) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k F(X) \Delta X^k \qquad \text{(A1.5)}$$

Καμπύλες στον affine χώρο (*V,Vn*)

Ως καμπύλη C στον affine χώρο (V,V_n) ορίζουμε κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση ενός διαστήματος I των πραγματικών αριθμών R, στον V:

$C : R \supseteq I \to V$ ή: $R \ni \sigma \to X_\sigma = C(\sigma) \in V$

...που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

α) Για κάθε **σταθερό** σημείο O του V, ορίζεται η καμπύλη C_O του συσχετισμένου χώρου V_n από τη σχέση:

$$C_O(\sigma) = \overrightarrow{OX}\Big|_\sigma = \sum_{j=1}^{n} B_j C^j(\sigma)$$

Οι συντεταγμένες $C^j(\sigma)$ είναι διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις.

β) Το απειροστό εφαπτόμενο διάνυσμα ΔX της $C : R \supseteq I \to V$ στο σημείο της $X = C(\sigma)$ ορίζεται ως το εφαπτόμενο διάνυσμα της αντίστοιχης καμπύλης C_O του συσχετισμένου χώρου V_n στο $C_O(\sigma)$. Συμβολίζουμε:

$\overrightarrow{OX} = \sum_{j=1}^{n} B_j C_O{}^j(\sigma)$, $\overrightarrow{OY} = \sum_{j=1}^{n} B_j C_O{}^j(\sigma + \Delta\sigma)$ όπου $\Delta\sigma \to 0$

...οπότε, το ΔX υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta X = \overrightarrow{XY} = \sum_{j=1}^{n} B_j \left(C_O{}^j(\sigma + \Delta\sigma) - C_O{}^j(\sigma)\right) \equiv \sum_{j=1}^{n} B_j \Delta C_O{}^j(\sigma) = \Delta\sigma \sum_{j=1}^{n} B_j \dot{C}_O{}^j(\sigma) \qquad \text{(A1.6)}$$

Ο εφαπτόμενος χώρος της C στο $X = C(\sigma)$ είναι ο μονοδιάστατος γραμμικός χώρος που παράγεται από το διάνυσμα ΔX.

Παρατήρηση: Το εφαπτόμενο διάνυσμα ΔX είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου O. Εξαρτάται μόνο από την καμπύλη C. Οι εφαπτόμενοι χώροι των καμπύλων C_O, $\forall O \in V$ του συσχετισμένου χώρου V_n, στα σημεία τους $\overrightarrow{OX} = C_O(\sigma)$ ταυτίζονται.

Πρόταση 3: Για δεδομένη τιμή του $\Delta\sigma$, τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπύλων C_O και C_Q στο σ ταυτίζονται.

Απόδειξη:

Επιβεβαιώστε ότι αληθεύουν οι σχέσεις:

$\overrightarrow{OX} = \sum_{j=1}^{n} B_j C_O{}^j(\sigma)$, $\overrightarrow{OY} = \sum_{j=1}^{n} B_j C_O{}^j(\sigma + \Delta\sigma)$, $\overrightarrow{QX} = \sum_{j=1}^{n} B_j C_Q{}^j(\sigma)$, $\overrightarrow{QY} = \sum_{j=1}^{n} B_j C_Q{}^j(\sigma + \Delta\sigma)$

$$\overrightarrow{QX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OQ} = \sum_{j=1}^{n} B_j C_O{}^j(\sigma) - \sum_{j=1}^{n} B_j Q_O{}^j \Rightarrow C_Q{}^j(\sigma) = C_O{}^j(\sigma) - Q_O{}^j$$

$$\overrightarrow{QY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OQ} = \sum_{j=1}^{n} B_j C_O{}^j(\sigma + \Delta\sigma) - \sum_{j=1}^{n} B_j Q_O{}^j \Rightarrow C_Q{}^j(\sigma + \Delta\sigma) = C_O{}^j(\sigma + \Delta\sigma) - Q_O{}^j \qquad (A1.6\alpha)$$

$$\Delta X\big|_Q \equiv \overrightarrow{QY} - \overrightarrow{QX} = \sum_{j=1}^{n} B_j \left(C_Q{}^j(\sigma + \Delta\sigma) - C_Q{}^j(\sigma) \right) \underset{(A1.6\alpha)}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} B_j \left(C_O{}^j(\sigma + \Delta\sigma) - C_O{}^j(\sigma) \right) = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} \equiv \Delta X\big|_O \qquad (A1.6\beta)$$

Ώστε το διάνυσμα $\Delta X = \overrightarrow{XY} = \Delta\sigma \sum_{j=1}^{n} B_j \dot{C}^j(\sigma)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε μέλος της κλάσης των καμπύλων C_O του συσχετισμένου χώρου V_n, και, για δεδομένο $\Delta\sigma$, μονοσήμαντα ορισμένο σε κάθε σημείο $C(\sigma)$ της καμπύλης C του χώρου V. QED

γ) Η καμπύλη C θεωρείται ότι είναι καλά ορισμένη, εφόσον σε κάθε σημείο της $X = C(\sigma)$ υπάρχει εφαπτόμενο διάνυσμα διαφορετικό από το μηδενικό (ο εφαπτόμενος χώρος της C δεν είναι εκφυλισμένος).

<u>Παρατήρηση</u>: Ξεκινώντας από ένα σύνολο αυθαίρετων σημείων V χωρίς καμιά ιδιαίτερη δομή, με την ιδέα του συσχετισμένου χώρου V_n μπορέσαμε να ορίσουμε στο V μια τοπολογία, λείες καμπύλες[7,8] και εφαπτόμενους διανυσματικούς χώρους σε κάθε σημείο τους. Ωστόσο, το V δεν είναι ένας μετρικός χώρος και δεν αποτελεί μοντέλο του χωροχρονικού συνεχούς που είναι ο στόχος μας. Ο affine space (V, V_n) είναι ένα ενδιάμεσο βήμα που αποσκοπεί στον ορισμό ενός τετραδιάστατου μετρικού συνεχούς (πολλαπλότητα ή manifold[6,10,12]) M, υποσυνόλου του V, το οποίο θα αποτελέσει μαθηματικό μοντέλο του χωροχρόνου. Ακολουθώντας τη διαδικασία αυτή, προσδιορίζουμε το M ως ένα manifold που είναι ενσωματωμένο στο V, όπως είναι για παράδειγμα, οι επιφάνειες στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο E_3, αλλά με μια μετρική που ορίζεται ανεξάρτητα από την τοπολογική δομή του V. Δεδομένου ότι ένα manifold μπορεί να οριστεί αυτόνομα, χωρίς να είναι ενσωματωμένο σε κάποιον ευρύτερο χώρο[12], θα μπορούσε κανείς να αποφύγει το ενδιάμεσο βήμα του affine space. Ωστόσο, για κάθε πολλαπλότητα διάστασης k αποδεικνύεται[8,10] ότι υπάρχει χώρος V διάστασης $n>k$ στον οποίο μπορούμε να βρούμε ενσωματωμένο manifold ισόμορφο με το αρχικό, που σημαίνει ότι οι δύο διαδικασίες είναι ισοδύναμες. Αν και στη βιβλιογραφία δεν είναι ο συνήθης δρόμος, ακολουθούμε την πορεία μέσω της ενσωμάτωσης σε έναν affine space, γιατί κατά τη γνώμη του γράφοντος απαιτεί απλούστερα μαθηματικά, ενώ παράλληλα δεν υπολείπεται σε αυστηρότητα.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

Παράρτημα A2: Συνοχή (connection) στο χωροχρονικό συνεχές *M* - Παράλληλη μετατόπιση διανύσματος κατά μήκος καμπύλης του *M* - Συναλλοίωτη (covariant) διαφόριση - Γεωδαιτικές καμπύλες

Βασικές έννοιες: Ισομορφισμοί μεταξύ των εφαπτόμενων χώρων ενός χώρου Minkowski M - Ισομετρικοί ισομορφισμοί - Συνοχή στον M - Παράλληλη μετατόπιση ενός διανύσματος κατά μήκος καμπύλης του M - Συναλλοίωτη διαφόριση ενός διανυσματικού πεδίου στο M - Τα σύμβολα Christoffel - Γεωδαιτικές καμπύλες

α) Συνοχή (connection) στο χωροχρονικό συνεχές

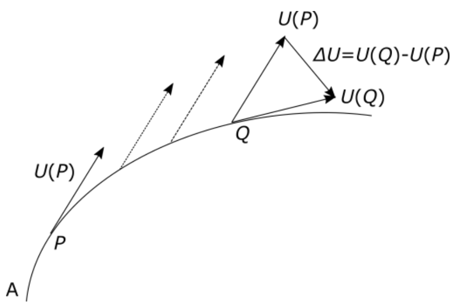
Ας θεωρήσουμε ένα διανυσματικό πεδίο U ορισμένο επί καμπύλης A του χώρου Minkowski M. *Πως θα μπορούσαμε να προβούμε σε έναν ποσοτικό υπολογισμό της μεταβολής του* U *κατά μήκος της καμπύλης* A*;*

Ως προς ένα αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (O,x), αυτό επιτυγχάνεται με την ακόλουθη διαδικασία: Τα στοιχεία βάσης $e_\mu(X)$ του εφαπτόμενου χώρου $T_X M$ είναι ανεξάρτητα του σημείου X του M, είναι ίσα διανύσματα του συσχετισμένου χώρου V_n:

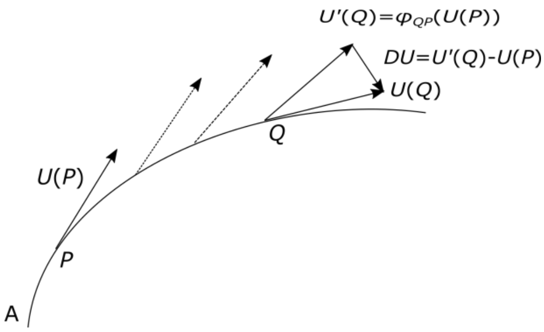
$e_\mu(X) = e_\mu(Y)$, $\forall X, Y \in M$, $\mu = 0,1,2,3$

...(σχέση 1.1γ, παράγραφος 1.1). Επομένως, μπορούμε να μετατοπίσουμε το διάνυσμα κατά μήκος της καμπύλης παράλληλα με τον εαυτό του, έτσι ώστε οι Καρτεσιανές συνιστώσες του να διατηρούνται σταθερές, μέχρι το σημείο που θέλουμε να γίνει η σύγκριση (σχήμα A2.1).

Σε μη αδρανειακά ή/και μη Καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων ή σε μη Ευκλείδειους χώρους, αυτή η διαδικασία δεν είναι εφικτή, γιατί τα διανύσματα βάσης των εφαπτόμενων χώρων είναι γενικά συναρτήσεις της θέσης. Ωστόσο, μπορούμε να γενικεύσουμε την ιδέα της **παράλληλης μετατόπισης διανύσματος** κατά μήκος καμπύλης με την εισαγωγή της έννοιας της "**συνοχής**".



Σχήμα A2.1 Παράλληλη μετατόπιση και διαφόριση στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.



Σχήμα A2.2 Παράλληλη μετατόπιση και διαφόριση σε μη Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Έστω τυχαίο σύστημα συντεταγμένων (O,x) (όχι κατ' ανάγκη αδρανειακό και Καρτεσιανό) του χώρου Minkowski M. Θα λέμε ότι έχουμε εφοδιάσει το M με μια **συνοχή** φ ως προς το (O,x), αν για κάθε καμπύλη $A = \Phi \circ a$ του M που διέρχεται από το $X \in M$ και για κάθε $U \in T_X M$ ορίζεται ένα διανυσματικό πεδίο $U(Y)$ επί της A:

$T_X M \ni U \to U(Y) = \varphi_{A(t),X}(U) \in T_{A(t)} M$ όπου: $Y = A(t)$

...που θα το ονομάζουμε "παράλληλη μετατόπιση του διανύσματος U κατά μήκος της A", εφόσον ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

α) Για κάθε $Y = A(t) = (\Phi \circ a)(t)$, με $A(t_0) = X$, η $\varphi_{Y,X} : T_X M \to T_Y M$ είναι γραμμική απεικόνιση ορισμένη επί του $T_x M$

β) $\varphi_{x,x}(U) = U$ για κάθε $U \in T_x M$

γ) $\varphi_{Z,X} = \varphi_{Z,Y} \circ \varphi_{Y,X}$, για κάθε X, Y, Z σημεία της καμπύλης A.

δ) $\varphi_{Y,X} = \varphi^{-1}_{X,Y}$ ή: $\varphi_{Y,X}\left(\varphi_{X,Y}(U)\right) = U$ για κάθε $U \in T_Y M$

ε) Η $\varphi_{Y,X}$ είναι ισομετρική: $\left\langle U(X), V(X) \right\rangle_X = \left\langle \varphi_{Y,X}(U(X)), \varphi_{Y,X}(V(X)) \right\rangle_Y$ για κάθε $U(X), V(X) \in T_X M$

Τα στοιχεία-πίνακα της $\varphi_{y,x}$ στο σύστημα συντεταγμένων (O,x) προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$\varphi_{y,x}\left(e_\mu(x)\right) = e_\nu(y)\varphi^\nu{}_\mu(y,x)$

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:	$x = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$, $y = \left(y^0, y^1, y^2, y^3\right)$ $\varphi_{Y,X} \equiv \varphi_{y,x}$ όπου: $X = \Phi(x), Y = \Phi(y)$

<u>Δείξτε ότι αληθεύουν οι ισότητες</u>:

$\varphi^\mu_\nu(y,y) = \delta^\mu_\nu$

$\varphi^\mu{}_\nu(z,x) = \varphi^\mu{}_\kappa(z,y)\varphi^\kappa{}_\nu(y,x)$

$\varphi^\nu{}_\kappa(y,x)\varphi^\kappa{}_\mu(x,y) = \delta^\nu_\mu$

...για κάθε x, y, z σημεία της καμπύλης a.

Πώς μεταβάλλονται τα στοιχεία πίνακα της συνοχής φ, κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων;
Έστω ο μετασχηματισμός συντεταγμένων $x^\mu = x^\mu(x')$.
Επιβεβαιώστε ότι αληθεύουν οι ισότητες:

$$\varphi_{Y,X}\left(e_\mu(X)\right) = \varphi_{Y,X}\left(e'_\nu(X)\partial_\mu x'^\nu\right) = \varphi_{Y,X}\left(e'_\nu(X)\right)\partial_\mu x'^\nu = e'_\kappa(Y)\varphi'^\kappa_\nu(y',x')\partial_\mu x'^\nu =$$
$$= e_\lambda(Y)\partial'_\kappa y^\lambda \varphi'^\kappa_\nu(y',x')\partial_\mu x'^\nu$$
$$\varphi_{Y,X}\left(e_\mu(X)\right) = e_\lambda(Y)\varphi^\lambda{}_\mu(y,x) \Rightarrow$$
$$e_\lambda(Y)\varphi^\lambda{}_\mu(y,x) = e_\lambda(Y)\partial'_\kappa y^\lambda \varphi'^\kappa{}_\nu(y',x')\partial_\mu x'^\nu \Rightarrow \varphi^\lambda{}_\mu(y,x) = \partial'_\kappa y^\lambda \varphi'^\kappa{}_\nu(y',x')\partial_\mu x'^\nu \qquad \text{(A2.1α)}$$

Με βάση τις A2.1α μπορούμε να δείξουμε ότι οι συνιστώσες του $U(Y) = \varphi_{Y,X}\left(U(X)\right)$ μετασχηματίζονται όπως οι συνιστώσες ενός διανυσματικού πεδίου:

$$U(Y) = e_\mu(Y)U^\mu(Y) = \varphi_{Y,X}\left(U(X)\right) = \varphi_{Y,X}\left(e_\nu(X)U^\nu(X)\right) = \varphi_{Y,X}\left(e_\nu(X)\right)U^\nu(X) =$$
$$= e_\mu(Y)\varphi^\mu{}_\nu(Y,X)U^\nu(X) \Rightarrow U^\mu(Y) = \varphi^\mu{}_\nu(Y,X)U^\nu(X) \qquad \text{(A2.1β)}$$

Στο x' σύστημα συντεταγμένων οι συνιστώσες του $U(Y)$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$U'^\mu(Y) = \varphi'^\mu_\nu(Y,X)U'^\nu(X) \qquad \text{(A2.1γ)}$$

...οπότε, με τη βοήθεια των A2.1α και A2.1β, βρίσκουμε:

$$U^\lambda(Y) = \varphi^\lambda{}_\mu(Y,X)U^\mu(X) = \partial'_\kappa y^\lambda \varphi'^\kappa_\nu(y',x')\partial_\mu x'^\nu U^\mu(X) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \partial_\lambda y'^\kappa U^\lambda(Y) = \varphi'^\kappa_\nu(y',x')\partial_\mu x'^\nu U^\mu(X) \underset{(A2.1\gamma)}{\Rightarrow} U'^\kappa(Y) = \partial_\lambda y'^\kappa U^\lambda(Y) \qquad \text{(A2.1δ)}$$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

β) Απειροστή παράλληλη μετατόπιση διανύσματος
Παράγουμε την αναλυτική έκφραση της απειροστής μεταβολής ενός διανυσματικού πεδίου $U(x)$ που δημιουργήσαμε από την παράλληλη μετατόπιση δεδομένου διανύσματος U_0, κατά μήκος καμπύλης A του M. Στη συνέχεια, διαμορφώνουμε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί το $U(x)$ κατά μήκος της A.

Στον χώρο Minkowski M θεωρούμε πάλι το σύστημα συντεταγμένων (O,x), (όχι κατ' ανάγκη αδρανειακό και Καρτεσιανό).
Επί της καμπύλης $A = \Phi \circ a$ του M, διαλέγουμε δύο απειροστά γειτονικά σημεία X και Y:
$X = \Phi(x)$, $Y = \Phi(x + \Delta x)$ όπου: $x = a(t)$, $\Delta x^\mu = \dot{a}^\mu(t)\Delta t$, $\Delta t \to 0$
Η ελεύθερη παράμετρος t έχει επιλεγεί αυθαίρετα.

Η στοιχειώδης μετατόπιση από το σημείο X στο Y, επί της A, προσδιορίζεται από το απειροστό διάνυσμα (παράγραφος 1.2):
$\Delta X = \overrightarrow{XY} = e_\mu(x)\Delta x^\mu \in T_X M$
Το διανυσματικό πεδίο $U(x)$ που παράγεται από την παράλληλη μετατόπιση του διανύσματος $U_0 \in T_{a(0)}M$ κατά μήκος της A προσδιορίζεται με τη βοήθεια της συνοχής φ που έχουμε ορίσει στον M, ως προς το (O,x):
$U\left(a(t)\right) = \varphi_{a(t),a(0)}\left(U_0\right)$
Η μεταβολή του U κατά την παράλληλη μετατόπισή του από το σημείο X στο Y, υπολογίζεται από τις σχέσεις:

$$U(x+\Delta x) = \varphi_{x+\Delta x,x}\left(U(x)\right) = \varphi_{x+\Delta x,x}\left(e_\nu(x)U^\nu(x)\right) = \varphi_{x+\Delta x,x}\left(e_\nu(x)\right)U^\nu(x) =$$
$$= e_\mu(x+\Delta x)\varphi^\mu{}_\nu(x+\Delta x,x)U^\nu(x) \approx e_\mu(x+\Delta x)\left(\delta^\mu{}_\nu + \left.\frac{\partial\varphi^\mu{}_\nu(y,x)}{\partial y^\kappa}\right|_{y=x}\Delta x^\kappa\right)U^\nu(x)$$

...από τις οποίες συνεπάγεται ότι:

$$U(x+\Delta x) \approx e_\mu(x+\Delta x)\left(\delta^\mu{}_\nu - \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}\Delta x^\kappa\right)U^\nu(x) \qquad \text{(A2.2α)}$$

$$U^{\mu}(x+\Delta x) \approx U^{\mu}(x) - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}(x)U^{\nu}(x)\Delta x^{\kappa} \qquad \text{(A2.2β)}$$

...όπου: $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}(x) \underset{def}{=} -\left.\dfrac{\partial \varphi^{\mu}{}_{\nu}(y,x)}{\partial y^{\kappa}}\right|_{y=x}$

Οι ποσότητες $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}(x)$ ονομάζονται "σύμβολα Christoffel". Τα σύμβολα Christoffel προσδιορίζονται από τη συνοχή φ που έχουμε ορίσει στο M, ως προς το (O,x).

Επιβεβαιώστε την αλήθεια των ακόλουθων ισοτήτων, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (α) έως (ε) των στοιχείων πίνακα $\varphi^{\mu}{}_{\nu}(y,x)$ της συνοχής:

$$\frac{\partial \varphi^{\mu}{}_{\nu}(y,x)}{\partial y^{\kappa}} \varphi^{\nu}{}_{\lambda}(x,y) + \varphi^{\mu}{}_{\nu}(y,x)\frac{\partial \varphi^{\nu}{}_{\lambda}(x,y)}{\partial y^{\kappa}} = 0$$

...από την οποία, για $x=y$ προκύπτει:

$$\left.\frac{\partial \varphi^{\mu}{}_{\nu}(y,x)}{\partial y^{\kappa}}\right|_{y=x} \delta^{\nu}{}_{\lambda} + \delta^{\mu}{}_{\nu}\left.\frac{\partial \varphi^{\nu}{}_{\lambda}(x,y)}{\partial y^{\kappa}}\right|_{y=x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}(x) = -\left.\frac{\partial \varphi^{\mu}{}_{\nu}(y,x)}{\partial y^{\kappa}}\right|_{y=x} = \left.\frac{\partial \varphi^{\mu}{}_{\nu}(x,y)}{\partial y^{\kappa}}\right|_{y=x} \qquad \text{(A2.3)}$$

Από την A2.2β, προκύπτει ότι οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου που παράγεται από την παράλληλη μετατόπιση του διανύσματος $U_0 \in T_{a(0)}M$ κατά μήκος της καμπύλης $A = \Phi \circ a$ του M, είναι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dU^{\mu}}{dt} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}U^{\nu}\dot{a}^{\kappa} = 0,\ U^{\mu}(a(0)) = U_0{}^{\mu} \qquad \text{(A2.4)}$$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

γ) Υπολογισμός των συμβόλων Christoffel συναρτήσει του μετρικού τανυστή

Σύμφωνα με τον ορισμό της συνοχής (ιδιότητα ε) η απεικόνιση $\varphi_{y,x} : T_xM \to T_yM$ είναι ισομετρική. Δηλαδή, για κάθε διανυσματικό πεδίο $U(x)$ που παράγεται από την παράλληλη μετατόπιση ενός διανύσματος $U_0 \in T_{a(0)}M$ κατά μήκος της καμπύλης $A = \Phi \circ a$ του M, αληθεύουν οι σχέσεις:

$$\langle U(x+\Delta x), U(x+\Delta x)\rangle = \langle U(x), U(x)\rangle \text{ όπου: } x = a(t) \qquad \text{(A2.5)}$$

Από την A2.5 και τις A2.2α,β συνεπάγεται ότι:

$$\left(g_{\mu\lambda}(x) + \partial_{\beta}g_{\mu\lambda}(x)\Delta x^{\beta}\right)\left(\delta^{\mu}{}_{\nu}\delta^{\lambda}{}_{a} - \delta^{\mu}{}_{\nu}\Gamma^{\lambda}{}_{a\beta}\Delta x^{\beta} - \delta^{\lambda}{}_{a}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}\Delta x^{\kappa}\right)U^{\nu}(x)U^{a}(x) = g_{\nu a}(x)U^{\nu}(x)U^{a}(x)$$

$$\left(-g_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa} - g_{\lambda\mu}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\kappa} + \partial_{\kappa}g_{\nu\mu}\right)U^{\nu}U^{\mu}\Delta x^{\kappa} = 0 \Rightarrow$$

$$\Gamma_{\nu\mu\kappa} + \Gamma_{\mu\nu\kappa} = \partial_{\kappa}g_{\nu\mu},\ \Gamma_{\nu\mu\kappa} \underset{def}{=} g_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\kappa} \qquad \text{(A2.6)}$$

Στα μοντέλα της Θεωρίας της Σχετικότητας θεωρούμε ότι τα σύμβολα Christoffel $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}(x)$ είναι συμμετρικά ως προς τους κάτω δείκτες:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}(x) = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}(x),\ \Gamma_{\mu\nu\kappa}(x) = \Gamma_{\mu\kappa\nu}(x) \qquad \text{(A2.6α)}$$

Κάτω από τον περιορισμό A2.6α, μπορούμε να επιλύσουμε το σύστημα των εξισώσεων A2.6 και να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel συναρτήσει των παραγώγων των στοιχείων πίνακα του μετρικού τανυστή:

$$\Gamma_{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left(-\partial_{\mu}g_{\nu\kappa} + \partial_{\kappa}g_{\mu\nu} + \partial_{\nu}g_{\kappa\mu}\right)$$
$$\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\kappa} = g^{\lambda\mu}\Gamma_{\mu\nu\kappa} \qquad \text{(A2.6β)}$$

...όπου, ο πίνακας $\left[g^{\lambda\mu}\right]$ είναι ο αντίστροφος του $\left[g_{\lambda\mu}\right]$: $g_{\lambda\mu}g^{\mu\kappa} = \delta^{\kappa}_{\lambda}$

Στην περίπτωση που το χωροχρονικό συνεχές M είναι ένας χώρος Minkowski, και το (O,x) αδρανειακό και Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ο πίνακας του μετρικού τανυστή έχει τη μορφή:

$$\left[g_{\mu\nu}\right]=\left[\eta_{\mu\nu}\right]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Τότε, από τις A2.6β συνεπάγεται ότι $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}=0$ για κάθε συνδυασμό των δεικτών *ν,κ,μ*. Από την A2.4 συνεπάγεται ότι στην περίπτωση αυτή, οι συνιστώσες κάθε διανυσματικού πεδίου που προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση διανύσματος κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης *A*, διατηρούνται αμετάβλητες.
Ομοίως, στον Ευκλείδειο χώρο E_3, τα σύμβολα Christoffel της συνοχής του E_3 σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, είναι όλα ίσα με το μηδέν και η παράλληλη μετατόπιση διανύσματος κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης $x^j=a^j(t)$ προσδιορίζεται από την $\dfrac{dU^j}{dt}=0,\ U^j(0)=U_0{}^j$

...που συνεπάγεται ότι η παράλληλη μετατόπιση ορίζεται από την απεικόνιση:

$$T_{a(t_0)}E_3 \ni U\left(a(t_0)\right)\to U\left(a(t)\right)\in T_{a(t)}E_3 : U\left(a(t)\right)=U\left(a(t_0)\right) \qquad \text{(A2.6γ)}$$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

δ) Συναλλοίωτη διαφόριση στο χωροχρονικό συνεχές *M*

Ας θεωρήσουμε ένα διανυσματικό πεδίο $V(x)\in\bigcup_{X\in M}T_X M,\ \left(X=\Phi(x),\ x\in R^4\right)$ και μια απειροστή μεταβολή Δx του x. Το διάνυσμα $V(x+\Delta x)$ ανήκει στον εφαπτόμενο χώρο $T_{x+\Delta x}M$. *Με ποια διαδικασία μπορούμε να υπολογίσουμε ποσοτικά τη μεταβολή του* $V(x)$ από το σημείο $X=\Phi(x)$ στο γειτονικό σημείο $Y=\Phi(x+\Delta x)$;

Τα διανύσματα $V(x+\Delta x)$ και $V(x)$ ανήκουν σε διαφορετικούς εφαπτόμενους χώρους. Για να τα συγκρίνουμε, πρέπει να "μεταφέρουμε" με κάποια συγκεκριμένη διαδικασία, το ένα εξ αυτών στον εφαπτόμενο χώρο που βρίσκεται το άλλο. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία η μεταφορά αυτή πραγματοποιείται με τον μηχανισμό της "παράλληλης μετατόπισης διανύσματος". Για μη αδρανειακά και Καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων και σε μη Ευκλείδειους χώρους, χρησιμοποιούμε την έννοια της συνοχής τη γενικευμένη έννοια της παράλληλης μετατόπισης διανύσματος κατά μήκος καμπύλης που αναπτύξαμε στην παράγραφο A2.(α) (σχήματα A2.1 και A2.2).

Ορίζουμε το **συναλλοίωτο διαφορικό** (ή 'απειροστή μεταβολή') του διανυσματικού πεδίου $V(x)$ κατά μήκος της στοιχειώδους μετατόπισης:

$$\Delta X=e_\mu(x)\Delta x^\mu,\ \Delta x^\mu\to 0,\ \mu=0,1,2,3$$

…από την έκφραση:

$$D_{\Delta x}V(x)\underset{def}{=}\varphi_{x,x+\Delta x}\left(V(x+\Delta x)\right)-V(x) \qquad \text{(A2.7)}$$

Με τη βοήθεια των A2.1α,β,γ,δ της παραγράφου A2.(α) δείχνουμε ότι αληθεύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$D_{\Delta x}V(x)\approx e_\mu(x)\varphi^\mu{}_\lambda\left(x,x+\Delta x\right)\left(V^\lambda(x)+\partial_\kappa V^\lambda(x)\Delta x^\kappa\right)-e_\mu(x)V^\mu(x)$$

$$D_{\Delta x}V(x)\approx e_\mu(x)\left(\left(\delta^\mu_\lambda+\Gamma^\mu{}_{\lambda\kappa}(x)\Delta x^\kappa\right)\left(V^\lambda(x)+\partial_\kappa V^\lambda(x)\Delta x^\kappa\right)-V^\mu(x)\right)$$

$$D_{\Delta x}V(x)=e_\mu(x)\left(\partial_\kappa V^\mu(x)+\Gamma^\mu{}_{\lambda\kappa}(x)V^\lambda(x)\right)\Delta x^\kappa \qquad \text{(A2.8α)}$$

Οι συνιστώσες του $D_{\Delta x}V(x)$ υπολογίζονται από την έκφραση:

$$D_{\Delta x}{}^\mu V(x)=\left(\partial_\kappa V^\mu(x)+\Gamma^\mu{}_{\lambda\kappa}(x)V^\lambda(x)\right)\Delta x^\kappa \qquad \text{(A2.8β)}$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος του $V(x)$ κατά μήκος της καμπύλης $A(t)=\left(\Phi\circ a\right)(t)$ προκύπτει από τις A2.8α και β:

$$\frac{D_{(a)}V}{Dt}=e_\mu\left(\partial_\kappa V^\mu\,\dot{a}^\kappa+\Gamma^\mu{}_{\lambda\kappa}V^\lambda\,\dot{a}^\kappa\right) \qquad \text{(A2.8γ)}$$

$$\frac{D_{(a)}{}^{\mu}V}{Dt} = \partial_{\kappa}V^{\mu}\,\dot{a}^{\kappa} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\kappa}V^{\lambda}\,\dot{a}^{\kappa} = \frac{dV^{\mu}}{dt} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\kappa}V^{\lambda}\,\dot{a}^{\kappa} \qquad \text{(A2.8δ)}$$

Παρατηρήσεις:

α) Εφόσον το χωροχρονικό συνεχές M είναι ένας χώρος Minkowski και το σύστημα συντεταγμένων είναι αδρανειακό και Καρτεσιανό, τα σύμβολα Christoffel είναι όλα ίσα με το μηδέν. Τότε, από την A2.8δ συνεπάγεται ότι η συναλλοίωτη παράγωγος του διανυσματικού πεδίου $V(x)$ κατά μήκος της καμπύλης $A = \Phi \circ a$ ταυτίζεται με τη συνήθη κατευθυνόμενη παράγωγο:

$$\frac{D^{\mu}V}{Dt} = \partial_{\kappa}V^{\mu}\,\dot{a}^{\kappa} = \frac{dV^{\mu}\left(a(t)\right)}{dt} \qquad \text{(A2.9)}$$

Το ίδιο ισχύει στην περίπτωση που το M είναι ένας Ευκλείδειος χώρος και το σύστημα συντεταγμένων Καρτεσιανό.

β) Εφόσον το διανυσματικό πεδίο $V(x)$ προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση ενός διανύσματος $V_0 \in T_{a(t_0)}M$ κατά μήκος καμπύλης $A = \Phi \circ a$ τότε, οι συνιστώσες του $V(x)$ ικανοποιούν τις εξισώσεις A2.4 (παράγραφος A2.(β)):

$$\frac{dV^{\mu}}{dt} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}V^{\nu}\dot{a}^{\kappa} = 0\,,\; V^{\mu}\left(a(0)\right) = V_0{}^{\mu} \qquad \text{(A2.10α)}$$

Από τις A2.10 και A2.8δ συνεπάγεται ότι: αν το $V(x)$ μετατοπίζεται παράλληλα με το εαυτό του κατά μήκος καμπύλης $A = \Phi \circ a$ του M, τότε το συναλλοίωτο διαφορικό του $V(x)$ κατά μήκος της A είναι ίσο με το μηδέν, και αντίστροφα:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Το } V(\text{x}) \text{ μετατοπίζεται παράλληλα} \\ \text{κατά μήκος της καμπύλης } A = \Phi \circ a\end{array}\right\} \Leftrightarrow D_{\Delta A}V(a(t)) = 0 \qquad \text{(A2.10β)}$$

γ) *Πώς μετασχηματίζονται οι συνιστώσες του συναλλοίωτου διαφορικού, κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων;*

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^{\mu} = x^{\mu}(x')$

Θέτουμε $x+\Delta x=y$ και από τις A2.1α και A2.7 λαμβάνουμε διαδοχικά τις ισότητες:

$$D^{\mu}{}_{\Delta x}V(x) = \varphi^{\mu}{}_{\nu}\left(x,y\right)V^{\nu}(y) - V^{\mu}(x) = \partial'_{\kappa}x^{\mu}\varphi'^{\kappa}{}_{\lambda}\left(x',y'\right)\partial_{\nu}y'^{\lambda}\partial'_{\rho}y^{\nu}V'^{\rho}(y') - \partial'_{\kappa}x^{\mu}V'^{\kappa}(x') \Rightarrow$$

$$D^{\mu}{}_{\Delta x}V(x) = \partial'_{\kappa}x^{\mu}\left(\varphi'^{\kappa}{}_{\lambda}\left(x',y'\right)V'^{\lambda}(y') - V'^{\kappa}(x')\right) = \partial'_{\kappa}x^{\mu}D^{\kappa}{}_{\Delta x}V'(x') \qquad \text{(A2.10γ)}$$

Συμπεραίνουμε ότι οι συνιστώσες του συναλλοίωτου διαφορικού μετασχηματίζονται όπως οι συνιστώσες ενός διανυσματικού πεδίου.

δ) *Πώς μετασχηματίζονται τα σύμβολα Christoffel, κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων;*

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό συντεταγμένων $x^{\mu} = x^{\mu}(x')$ και από τις A2.3 (παράγραφος A2.(β)), A2.1α, και τις ιδιότητες της συνοχής (παράγραφος A2(α)), προκύπτουν οι διαδοχικές ισότητες:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa}(x) = \left.\frac{\partial\varphi^{\mu}{}_{\nu}\left(x,y\right)}{\partial y^{\kappa}}\right|_{y=x} = \left.\frac{\partial}{\partial y^{\kappa}}\left(\partial'_{\rho}x^{\mu}\varphi'^{\rho}{}_{\sigma}\left(x',y'\right)\partial_{\nu}y'^{\sigma}\right)\right|_{y'=x'} =$$

$$= \left.\left(\partial'_{\rho}x^{\mu}\varphi'^{\rho}{}_{\sigma}\left(y',x'\right)\frac{\partial^2 y'^{\sigma}}{\partial y^{\kappa}\partial y^{\nu}} + \partial'_{\rho}x^{\mu}\partial_{\nu}y'^{\sigma}\partial_{\kappa}y'^{\lambda}\,\frac{\partial\varphi'^{\rho}{}_{\sigma}\left(y',x'\right)}{\partial y'^{\lambda}}\right)\right|_{y'=x'} = \qquad \text{(A2.10δ)}$$

$$= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}}\frac{\partial^2 x'^{\sigma}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\nu}} + \partial'_{\rho}x^{\mu}\partial_{\nu}x'^{\sigma}\partial_{\kappa}x'^{\lambda}\Gamma'^{\rho}{}_{\sigma\lambda}(x')$$

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με την A2.10δ, αν στο x'_σύστημα συντεταγμένων τα σύμβολα Christoffel είναι ίσα με το μηδέν, δεν είναι κατ' ανάγκη μηδέν και στο x_σύστημα, εκτός κι αν ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός.

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

ε) Γεωδαιτικές καμπύλες στο χωροχρονικό συνεχές *M* (1,4,6,8,9)

Στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής, τα σωματίδια κινούνται μέσα σε έναν Ευκλείδειο χώρο E_3. Οι τροχιές κάθε ελευθέρου σωματιδίου Σ είναι ευθεία γραμμή, της οποίας η αναλυτική έκφραση προκύπτει από τον 2ο Νόμο του Newton:

$$m\frac{dV^j(t)}{dt} = 0,\ j = 1,2,3 \qquad \text{(A2.11)}$$

...όπου $\vec{V} = \left(V^1, V^2, V^3\right)$ η ταχύτητα του Σ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Η ταχύτητα του σωματιδίου είναι, εξ ορισμού, εφαπτόμενη στην τροχιά του. Από την A2.11 συνεπάγεται ότι η ταχύτητα του Σ είναι σταθερή κατά μήκος της τροχιάς: Αν την χρονική στιγμή t=0 προσδιορίζεται από το διάνυσμα $\vec{V}_0$ τότε σε κάθε σημείο της τροχιάς, ισχύει $\vec{V}(t) = \vec{V}_0$. Ή, σύμφωνα με τη σχέση A2.6γ (παράγραφος A2.(γ)), "το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{V}(t)$ μεταφέρεται παράλληλα με τον εαυτό του κατά μήκος της τροχιάς του Σ". Η έκφραση αυτή συνιστά και τον ορισμό της ευθείας γραμμής στον E_3. Η ευθεία γραμμή είναι μια ειδική περίπτωση 'γεωδαιτικής καμπύλης' που αφορά στον Ευκλείδειο χώρο E_3.

Ορίζουμε **γεωδαιτική καμπύλη** σε ένα χώρο Riemann, ή στο χωροχρονικό συνεχές *M*, κάθε καμπύλη *C* που έχει την ιδιότητα: "κάθε διανυσματικό πεδίο, εφαπτόμενο της *C*, μεταφέρεται παράλληλα με τον εαυτό του κατά μήκος της *C*".

Αν η καμπύλη $C(\tau) = \left(\Phi \circ c\right)(\tau)$ είναι γεωδαιτική του *M* τότε το εφαπτόμενο σε αυτή διανυσματικό πεδίο:

$$U(\tau) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta C(\tau)}{\Delta\tau} = e_\mu(\tau)U^\mu(\tau) \text{ όπου: } U^\mu(\tau) = \frac{dc^\mu(\tau)}{d\tau}$$

...μεταφέρεται κατά μήκος της *C*, παράλληλα προς τον εαυτό του. Τότε όμως, σύμφωνα με την A2.10α (παράγραφος A2.(δ)), το $U(\tau)$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}U^\nu\frac{dc^\kappa}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\kappa}U^\nu U^\kappa = 0 \qquad \text{(A2.12α)}$$

...ή ισοδύναμα, το συναλλοίωτο διαφορικό του κατά μήκος της *C* είναι ίσο με το μηδέν (A2.10β):

$$D_{\Delta C}U(c(\tau)) = 0 \qquad \text{(A2.12β)}$$

Από τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του Minkowski (4.η, Ενότητα 4) συμπεραίνουμε ότι ένα ελεύθερο σωματίδιο διαγράφει μια κοσμική γραμμή που ικανοποιεί τις A2.12α και β, όπου τ στην προκειμένη περίπτωση είναι ο ιδιόχρονος του Σ. Επομένως, **η κοσμική γραμμή του Σ είναι μια γεωδαιτική καμπύλη του χωροχρονικού συνεχούς *M***.

<u>Πρόταση A2.1</u>: Έστω $C(s) = \left(\Phi \circ c\right)(s)$ καμπύλη του επιπέδου Riemann E_R, που διέρχεται από τα σημεία A και B του E_R. Θεωρούμε το σύνολο των γειτονικών καμπύλων $S[c]$ του E_R που διέρχονται από τα σημεία A και B με αναλυτική έκφραση:

$$c_\varepsilon{}^\mu(s) = c^\mu(s) + \varepsilon\eta^\mu(s)$$

...όπου:

α) Το s συμβολίζει το μήκος του τόξου επί της *C*, αρχής γενομένης από το *A*: s_A=0

β) Το στοιχειώδες μήκος επί της C_ε υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta s_\varepsilon{}^2 = g_{\mu\nu}\left(c_\varepsilon(s)\right)\dot{c}_\varepsilon{}^\mu\dot{c}_\varepsilon{}^\nu\Delta s^2 \text{ όπου: } \dot{c}_\varepsilon{}^\kappa = \frac{dc_\varepsilon{}^\kappa}{ds}$$

γ) Οι πραγματικές συναρτήσεις η^μ είναι φραγμένες, διαφορίσιμες και ικανοποιούν τις συνθήκες: $\eta^\mu(s_A)= \eta^\mu(s_B)=0$

δ) Το ε είναι αδιάστατο και λαμβάνει τιμές σε μια απειροστή περιοχή του μηδενός.

Θα δείξουμε ότι:

Αν το μήκος του τόξου AB επί της *C* είναι τοπικό ακρότατο στο σύνολο των καμπύλων του συνόλου $S[c]$, τότε η *C* είναι γεωδαιτική στο E_R, και αντίστροφα:

$$\delta\int_A^B ds_\varepsilon = \delta\int_A^B ds\sqrt{g_{\mu\nu}\left(c_\varepsilon(s)\right)\dot{c}_\varepsilon{}^\mu\dot{c}_\varepsilon{}^\nu} = 0 \Leftrightarrow \frac{dU^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0 \text{ όπου: } U^\mu = \dot{c} \equiv \frac{dc^\mu}{ds}$$

Απόδειξη:
Θα βρούμε ποιες συνθήκες πρέπει και αρκεί να ικανοποιεί η καμπύλη c ώστε να ισχύει η απαίτηση:

$$\delta\int_A^B ds_\varepsilon = \int_A^B ds_\varepsilon - \int_A^B ds = \int_A^B \delta\left(ds_\varepsilon\right) = 0$$

Ελέγξτε την αλήθεια των ακόλουθων σχέσεων:

$$\left.\begin{array}{l}\delta\Delta s_\varepsilon = \Delta s_\varepsilon - \Delta s \Rightarrow \Delta s_\varepsilon = \Delta s + \delta\Delta s_\varepsilon \\ \delta\left(\Delta {s_\varepsilon}^2\right) = \Delta {s_\varepsilon}^2 - \Delta s^2\end{array}\right\} \Rightarrow \delta\left(\Delta {s_\varepsilon}^2\right) \approx 2\Delta s\,\delta\left(\Delta s_\varepsilon\right) =$$

$$= g_{\mu\nu}\left(c(s) + \varepsilon\eta(c(s))\right)\left(\dot c^\mu(s) + \varepsilon\dot\eta^\mu(c(s))\right)\left(\dot c^\nu(s) + \varepsilon\dot\eta^\nu(c(s))\right)\Delta s^2 - \Delta s^2 \approx$$

(...κρατάμε όρους μέχρι και πρώτης τάξης ως προς το ε ή το $\delta(\Delta s_\varepsilon)$)

$$\approx \varepsilon\Delta s^2\left(\eta^\kappa\partial_\kappa g_{\mu\nu}\dot c^\mu\dot c^\nu + g_{\mu\nu}\partial_\kappa\eta^\mu\dot c^\kappa\dot c^\nu + g_{\mu\nu}\partial_\kappa\eta^\nu\dot c^\kappa\dot c^\mu\right) =$$

$$= \varepsilon\eta^\kappa\Delta s^2\dot c^\mu\dot c^\nu\left(\partial_\kappa g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\kappa\nu} - \partial_\nu g_{\mu\kappa}\right) + \varepsilon\Delta s^2\dot c^\mu\dot c^\nu\left(\partial_\mu\left(g_{\kappa\nu}\eta^\kappa\right) + \partial_\nu\left(g_{\mu\kappa}\eta^\kappa\right)\right) \Rightarrow$$

$$\delta\left(\Delta s_\varepsilon\right) = \varepsilon\Delta s\left(\eta^\kappa U^\mu U^\nu\frac{1}{2}\left(\partial_\kappa g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\kappa\nu} - \partial_\nu g_{\mu\kappa}\right) + \dot c^\mu\dot c^\nu\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\left(g_{\kappa\nu}\eta^\kappa\right) + \partial_\nu\left(g_{\mu\kappa}\eta^\kappa\right)\right)\right) =$$

$$= \varepsilon\Delta s\left(\eta^\kappa U^\mu U^\nu\frac{1}{2}\left(\partial_\kappa g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\kappa\nu} - \partial_\nu g_{\mu\kappa}\right) + \frac{1}{2}\left(U^\nu\frac{d}{ds}\left(g_{\kappa\nu}\eta^\kappa\right) + U^\nu\frac{d}{ds}\left(g_{\mu\kappa}\eta^\kappa\right)\right)\right) \Rightarrow$$

$$\int_A^B \delta\left(ds_\varepsilon\right) \approx -\varepsilon\int_A^B ds\eta^\kappa U^\mu U^\nu\Gamma_{\kappa\mu\nu} - \varepsilon\int_A^B dsg_{\kappa\nu}\eta^\kappa\frac{dU^\nu}{ds} + \varepsilon\int_A^B d\left(\frac{dc^\nu}{ds}g_{\kappa\nu}\eta^\kappa\right) \Rightarrow$$

$$\frac{dU^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0 \qquad \text{QED}$$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

Παράρτημα A3: Καμπυλότητα σε επίπεδο Riemann [4]

Ως "επίπεδο Riemann" ορίζουμε μια δύο διαστάσεων πολλαπλότητα S του affine χώρου $\left(V,V_n\right)$ [4], στην οποία έχει οριστεί μια **θετικά ορισμένη μετρική**.
Σύμφωνα με τα λεχθέντα στην Ενότητα 1, τα σημεία του S προσδιορίζονται μονοσήμαντα ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων $u = \left(u^1,u^2\right) \in D \subseteq R^2$ από μια διαφορίσιμη συνάρτηση Φ_S:

$$D \ni u = \left(u^1,u^2\right) \to P_u = \Phi_S(u) \in S \subset V \qquad \text{(A3.1)}$$

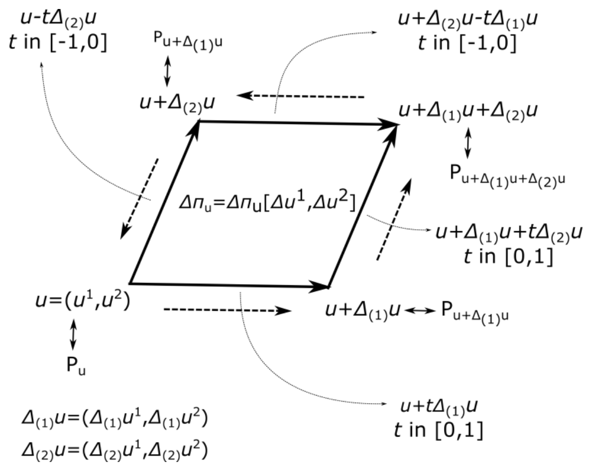
...όπου D ανοικτό, συνεκτικό υποσύνολο του R^2.
Η γεωμετρία του S προσδιορίζεται από τη μορφή του μετρικού τανυστή που έχει οριστεί στους εφαπτόμενους χώρους του (στην εφαπτόμενη δέσμη του S).
$\gamma(u) = \left[\gamma_{\mu\nu}(u)\right]$, $\mu,\nu = 1,2$, $u \in U \subseteq R^2$
...και τη συνοχή φ που είναι συμβατή με τον μετρικό τανυστή γ. Τα σύμβολα Christoffel που καθορίζουν τη φ, δίδονται από τις εξισώσεις (σχέσεις A2.6β της παραγράφου A2.(γ)):

$$\Gamma_{\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\mu\gamma_{\nu\kappa} + \partial_\kappa\gamma_{\mu\nu} + \partial_\nu\gamma_{\kappa\mu}\right) \qquad \text{(A3.2)}$$

Ας θεωρήσουμε έναν απειροστό βρόχο $\partial\Delta\pi_u$ του D (σχήμα A3.1), που προσδιορίζεται αναλυτικά από την καμπύλη u_t=$a(t)$, και την εικόνα του στο S: $\partial\Delta\Pi_u : P_{u_t} = \left(\Phi_S \circ a\right)(t) \equiv A(t)$
Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $\xi_{(0)} \in T_uS$ στο σημείο P_u του $\partial\Delta\Pi_u$ μεταφέρεται παράλληλα προς τον εαυτό του κατά μήκος της καμπύλης $A = \Phi_S \circ a$ που προσδιορίζει τον βρόγχο. Συμβολίζουμε με $\xi\left(a(t)\right)$ το διανυσματικό πεδίο που προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση του $\xi_{(0)}$:
$\xi\left(a(0)\right) = \xi_{(0)}$ όπου: $a(0) = a(t_0) = u \to P_u = \Phi_S(u)$

Είναι γνωστό από τη Στοιχειώδη Γεωμετρία, ότι αν το S είναι ένα Ευκλείδειο επίπεδο, οι συντεταγμένες του $\xi\left(a(t)\right)$ δεν μεταβάλλονται κατά μήκος της a, και όταν επανέρθουμε στο αρχικό σημείο P_u, το τελικό διάνυσμα $\xi\left(a(t_0)\right)$ ταυτίζεται με το αρχικό $\xi_{(0)}$: $\xi\left(a(t_0)\right)-\xi_0=0$
Ωστόσο αυτή δεν είναι παρά μια ειδική περίπτωση που ισχύει εφόσον η μετρική του επιπέδου είναι Ευκλείδεια. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η μεταβολή του διανυσματικού πεδίου $\xi\left(a(t)\right)$ κατά μήκος του απειροστού βρόγχου $u_t=a(t)$ είναι διαφορετική από το μηδέν και εξαρτάται από μια ποσότητα που ονομάζεται "καμπυλότητα Gauss", ή απλά "καμπυλότητα" (curvature). Η καμπυλότητα καθορίζεται από τη γεωμετρική δομή του επιπέδου S: Η τιμή της, σε κάθε σημείο του S είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων, και υπολογίζεται από τη συνοχή που έχει οριστεί στο S. Αν η καμπυλότητα είναι ίση με το μηδέν σε κάθε σημείο του S, τότε το S έχει τη δομή ενός Ευκλείδειου επιπέδου, και αντίστροφα.

Στο σχήμα Α3.1 εικονίζεται ο απειροστός βρόγχος $u_t=a(t)$ κατά μήκος του οποίου μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του το διανυσματικό πεδίο $\xi\left(a(t)\right)$



Σχήμα Α3.1: Το $\Delta\pi_u[\Delta_{(1)}u,\Delta_{(2)}u]$ είναι ένα απειροστό παραλληλόγραμμο του R^2. Οι κορυφές του, απεικονίζονται μέσω της Φ_S στα σημεία του S: P_u , $P_{u+\Delta_{(1)}u}$, $P_{u+\Delta_{(1)}u+\Delta_{(2)}u}$, $P_{u+\Delta_{(2)}u}$

Η εικόνα του $\Delta\pi_u[\Delta_{(1)}u,\Delta_{(2)}u]$ μέσω της απεικόνισης Φ_S είναι μια απειροστή περιοχή του S (συμβολίζουμε: $\Delta\Pi_u[\Delta_{(1)}U,\Delta_{(2)}U]$). Το σύνορο $\partial\Delta\pi_u$ του $\Delta\pi_u[\Delta_{(1)}u,\Delta_{(2)}u]$ είναι ένας απειροστός βρόγχος και προσδιορίζεται από μια καμπύλη $u_t=a(t)$ του R^2. Η εικόνα του $\partial\Delta\pi_u$ στο S, είναι το σύνορο $\partial\Delta\Pi_u$ της $\Delta\Pi_u[\Delta_{(1)}U,\Delta_{(2)}U]$

Υπολογίζουμε τη μεταβολή:
$\Delta\xi=\xi\left(a(t_0)\right)-\xi_0$ όπου:
$a(t_0)=a(0)=u\rightarrow P_u\in S$
Το διανυσματικό πεδίο ξ που παράγεται από την παράλληλη μετατόπιση του $\xi_{(0)}\in T_uS$ κατά μήκος του στοιχειώδους βρόγχου $u_t=a(t)$ ορίζεται από τη σχέση (παράγραφος Α2.(β)):

$$\xi(t)\underset{def}{=}\xi\left(a(t)\right)=\varphi_{a(t),u}\left(\xi_0\right) \qquad (A3.3)$$

Το συναλλοίωτο διαφορικό του $\xi(t)$ είναι ίσο με το μηδέν, σε κάθε σημείο της a:

$$D^{\mu}_{\Delta a}\xi=d\xi^{\mu}+\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa}\left(a(t)\right)\xi^{\nu}\left(a(t)\right)da^{\kappa}(t)=0$$

...επομένως, σε κάθε σημείο της καμπύλης a, ισχύει:

$$d\xi^{\mu}=-\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa}\xi^{\nu}da^{\kappa} \qquad (A3.3\alpha)$$

Ολοκληρώνουμε την Α3.3α κατά μήκος της κλειστής καμπύλης a. Ξεκινάμε από την κορυφή u, κινούμαστε κατά μήκος της περιμέτρου του απειροστού παραλληλογράμμου και ξαναγυρίζουμε στην κορυφή u (σχήμα Α3.1). Ας ονομάσουμε $\xi_{(1)}$ το τελικό διάνυσμα του πεδίου, όταν έχουμε επιστρέψει στον αρχικό εφαπτόμενο χώρο, στο σημείο P_u του S: $\xi_{(1)}\in T_uS$
Έστω $\{e_1(u),e_2(u)\}$ η βάση του T_uS στο u_σύστημα συντεταγμένων. Σύμφωνα με την Α3.3α, γράφουμε:

$$\xi_{(0)}=e_{\mu}(u)\xi_{(0)}{}^{\mu}\,,\ \xi_{(1)}=e_{\mu}(u)\xi_{(1)}{}^{\mu}\,,\ \xi_{(0)},\xi_{(1)}\in T_uS$$

$$\xi_{(1)}{}^{\mu}-\xi_{(0)}{}^{\mu}=-\oint_{\partial\Delta\pi_u}\Gamma^{\mu}_{\nu\kappa}\left(a\right)\xi^{\nu}da^{\kappa} \qquad (A3.3\beta)$$

Από το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού, και την Α3.3α, αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor και κρατώντας όρους μέχρι και 1ης τάξης ως προς τις ποσότητες $\Delta_{(1)}u^{\mu},\Delta_{(2)}u^{\mu}$ βρίσκουμε:

$$\xi_{(1)}{}^{\mu}-\xi_{(0)}{}^{\mu}=R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa}\xi_{(0)}{}^{\nu}\left(\Delta_{(1)}u^{\lambda}\Delta_{(2)}u^{\kappa}-\Delta_{(1)}u^{\kappa}\Delta_{(2)}u^{\lambda}\right) \qquad (A3.3\gamma)$$

...όπου το όρισμα κάθε συνάρτησης θεωρείται στο u. Οι ποσότητες $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa}$ ορίζονται από τις σχέσεις:

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa} \underset{def}{=} \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\rho\kappa} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\kappa} \qquad (A3.4)$$

Από την A3.3γ συνεπάγεται ότι κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων $u^{\mu} = u^{\mu}(\tilde{u})$ τα $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa}$ μετασχηματίζονται όπως οι συνιστώσες ενός τανυστή[6,9,10], που τον ονομάζουμε "**τανυστή καμπυλότητας**" της γεωμετρικής επιφάνειας, στο σημείο της P_u. Δεδομένου ότι το επίπεδο Riemann S είναι μια πολλαπλότητα δύο διαστάσεων, η A3.3γ γράφεται:

$$\xi_{(1)}{}^{\mu} - \xi_{(0)}{}^{\mu} = \left(R^{\mu}{}_{\nu 12} - R^{\mu}{}_{\nu 21}\right)\xi_{(0)}{}^{\nu}\left(\Delta_{(1)}u^{1}\Delta_{(2)}u^{2} - \Delta_{(1)}u^{2}\Delta_{(2)}u^{1}\right) \qquad (A3.5)$$

...όπου $\kappa, \lambda \in \{1,2\}$

Τα διανύσματα:

$\Delta_{(1)}U = e_{\mu}(u)\Delta_{(1)}u^{\mu}$, $\Delta_{(2)}U = e_{\mu}(u)\Delta_{(2)}u^{\mu}$

...ανήκουν στον εφαπτόμενο χώρο T_uS του S.

Το εμβαδόν της απειροστής περιοχής $\Delta\Pi_u \equiv \Delta\Pi_u[\Delta_{(1)}U, \Delta_{(2)}U]$ του S (σχήμα A3.1), δίδεται από την εξίσωση[4,7]:

$$\text{area}(\Delta\Pi_u) = \sqrt{\det\gamma}\left(\omega^1 \wedge \omega^2\right)\left(\Delta_{(1)}U, \Delta_{(2)}U\right) = \sqrt{\det\gamma}\left(\Delta_{(1)}u^1\Delta_{(2)}u^2 - \Delta_{(1)}u^2\Delta_{(2)}u^1\right) \qquad (A3.5\alpha)$$

...όπου οι 1-μορφές ω^{μ}, $\mu = 1,2$ ορίζονται από τις σχέσεις[4,6,12]: $\omega^{\mu}(\Delta U) = \Delta u^{\mu}$

<u>Δείξτε ότι</u>: το εμβαδόν του $\Delta\Pi_u$ είναι αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων[4].

Από την A3.5 συνεπάγονται οι σχέσεις:

$$\xi_{(1)}{}^{\mu} - \xi_{(0)}{}^{\mu} = \left(R^{\mu}{}_{\nu 12} - R^{\mu}{}_{\nu 21}\right)\xi_{(0)}{}^{\nu}\omega^1 \wedge \omega^2\left(\Delta_{(1)}U, \Delta_{(2)}U\right) \qquad (A3.6\alpha)$$

$$\xi_{(1)}{}^{\mu} - \xi_{(0)}{}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\det\gamma}}\xi_{(0)}{}^{\nu}R^{\mu}_{\nu}\ \text{area}(\Delta\Pi_u) \qquad (A3.6\beta)$$

$$\xi_{(1)}{}^{\mu} - \xi_{(0)}{}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\det\gamma}}\xi_{(0)}{}^{\nu}\gamma^{\mu\kappa}R_{\kappa\nu}\ \text{area}(\Delta\Pi_u) \qquad (A3.6\gamma)$$

...όπου: $R^{\mu}{}_{\nu} \underset{def}{=} R^{\mu}{}_{\nu 12} - R^{\mu}{}_{\nu 21}$, $R_{\kappa\nu} = \gamma_{\kappa\lambda}R^{\lambda}{}_{\nu}$

Ο πίνακας $\left[R_{\kappa\nu}(u)\right]$ ονομάζεται "πίνακας καμπυλότητας".

Μερικές ιδιότητες του πίνακα καμπυλότητας

Από τον ορισμό του $R^{\lambda}{}_{\nu}$ και την A3.4, συνεπάγονται οι ταυτότητες:

$$R^{\lambda}{}_{\nu} = R^{\lambda}{}_{\nu 12} - R^{\lambda}{}_{\nu 21} = \Gamma^{\lambda}{}_{\rho 2}\Gamma^{\rho}{}_{\nu 1} - \Gamma^{\lambda}{}_{\rho 1}\Gamma^{\rho}{}_{\nu 2} - \partial_1\Gamma^{\lambda}{}_{\nu 2} + \partial_2\Gamma^{\lambda}{}_{\nu 1}$$

$$R_{\nu\kappa} = -\partial_1\Gamma_{\nu\kappa 2} + \Gamma^{\lambda}{}_{1\nu}\Gamma_{\lambda\kappa 2} + \partial_2\Gamma_{\nu\kappa 1} - \Gamma^{\lambda}{}_{2\nu}\Gamma_{\lambda\kappa 1}$$

Από τις A2.6 (παράγραφος A2.(γ)) προκύπτουν οι ισότητες:

$\Gamma_{\kappa\lambda\mu} + \Gamma_{\lambda\kappa\mu} = \partial_{\mu}\gamma_{\kappa\lambda}$, $\Gamma_{\mu\kappa\lambda} + \Gamma_{\kappa\mu\lambda} = \partial_{\lambda}\gamma_{\mu\kappa}$, $\Gamma_{\lambda\mu\kappa} + \Gamma_{\mu\lambda\kappa} = \partial_{\kappa}\gamma_{\mu\lambda}$

...από τις οποίες έπεται η αλήθεια των σχέσεων:

$$R_{\kappa\nu} + R_{\nu\kappa} = 0 \Rightarrow \{R_{11} = R_{22} = 0,\ R_{12} + R_{21} = 0\} \qquad (A3.7\alpha)$$

Από τις A3.7α, συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας καμπυλότητας έχει τη μορφή:

$$\left[R_{\kappa\nu}(u)\right] = R(u)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A3.7\beta)$$

...όπου, η πραγματική συνάρτηση $R(u^1,u^2)$ προσδιορίζεται από την έκφραση:

$$R = R_{21} = -\partial_1\Gamma_{212} + \Gamma^{\lambda}{}_{12}\Gamma_{\lambda 12} + \partial_2\Gamma_{211} - \Gamma^{\lambda}{}_{22}\Gamma_{\lambda 11} \qquad (A3.7\gamma)$$

Μετασχηματισμός του πίνακα καμπυλότητας κάτω από έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων

Έστω $u^\mu = u^\mu(\tilde{u})$ ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων. Ποια είναι η μορφή του πίνακα $\left[R_{\kappa\nu}(u)\right]$ στο $\tilde{u}$ _ σύστημα συντεταγμένων;

Αρχικά, βρίσκουμε πώς μετασχηματίζεται η σχέση Α3.6γ:
Το στοιχείο επιφάνειας του επιπέδου Riemann S, διατηρείται αναλλοίωτο κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό συντεταγμένων (σχέση Α3.5α)[4]:

$$\text{area}\left(\Delta\Pi_u\right) = \text{area}\left(\Delta\Pi_{\tilde{u}}\right)$$

Μετασχηματίζουμε τους υπόλοιπους όρους της Α3.6γ (Ενότητα 1), και καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\frac{\partial u^\mu}{\partial \tilde{u}^\alpha}\left(\tilde{\xi}_{(1)}{}^\alpha - \tilde{\xi}_{(0)}{}^\alpha\right) = \frac{1}{\det\tilde{J}\sqrt{\det\tilde{\gamma}}}\frac{\partial u^\nu}{\partial \tilde{u}^\beta}\tilde{\xi}_{(0)}{}^\beta \frac{\partial u^\mu}{\partial \tilde{u}^\lambda}\frac{\partial u^\kappa}{\partial \tilde{u}^\rho}\tilde{\gamma}^{\lambda\rho}R_{\kappa\nu}\,\text{area}\left(\Delta\Pi_{\tilde{u}}\right)$$

…όπου:

$$\tilde{J} = J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix},\ \det\tilde{J} = \frac{1}{\det J} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\det\gamma}{\det\tilde{\gamma}}}$$

$$\tilde{\xi}_{(1)}{}^\alpha - \tilde{\xi}_{(0)}{}^\alpha = \frac{1}{\det\tilde{J}\sqrt{\det\tilde{\gamma}}}\frac{\partial u^\nu}{\partial \tilde{u}^\beta}\tilde{\xi}_{(0)}{}^\beta\frac{\partial u^\kappa}{\partial \tilde{u}^\rho}\tilde{\gamma}^{\alpha\rho}R_{\kappa\nu}\,\text{area}\left(\Delta\Pi_{\tilde{u}}\right) \underset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{\det\tilde{\gamma}}}\tilde{\xi}_{(0)}{}^\beta\tilde{\gamma}^{\alpha\rho}\tilde{R}_{\rho\beta}\,\text{area}\left(\Delta\Pi_{\tilde{u}}\right)$$

...από την οποία συνάγουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα καμπυλότητας μετασχηματίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\tilde{R}_{\rho\beta} = \frac{1}{\det\tilde{J}}\frac{\partial u^\kappa}{\partial \tilde{u}^\rho}\frac{\partial u^\nu}{\partial \tilde{u}^\beta}R_{\kappa\nu} \qquad \text{(A3.8)}$$

Από τις Α3.8 και Α3.7β, έπονται οι σχέσεις:

$$\left[\tilde{R}_{\rho\beta}\right] = R(u)\frac{\det\tilde{\gamma}}{\det\gamma}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{def}{=} \tilde{R}(\tilde{u})\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{R(u)}{\det\gamma} = \frac{\tilde{R}(\tilde{u})}{\det\tilde{\gamma}} \underset{def}{=} K \qquad \text{(A3.9)}$$

Η Α3.9 μας λέει ότι η ποσότητα K είναι ανεξάρτητη της επιλογής του συστήματος συντεταγμένων. Εξαρτάται μόνον από το σημείο $P \leftrightarrow \left(u^1,u^2\right) \leftrightarrow \left(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2\right)$ του επιπέδου Riemann, στο οποίο αναφερόμαστε. Η πραγματική συνάρτηση $K(P)$ είναι ένα "**γεωμετρικό αναλλοίωτο**" και ονομάζεται "**καμπυλότητα του επιπέδου Riemann στο σημείο του *P***".

Σύμφωνα με τις Α3.9 and Α3.7γ, η καμπυλότητα σε ένα, οποιοδήποτε, σημείο $P \in S$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$K\left(P\right) = \frac{R}{\det\gamma} = \frac{1}{\det\gamma}\left(-\partial_1\Gamma_{212} + \Gamma_{\lambda 12}\Gamma^\lambda{}_{12} + \partial_2\Gamma_{211} - \Gamma_{\lambda 22}\Gamma^\lambda{}_{11}\right) \qquad \text{(A3.10)}$$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

Παράρτημα Α4: Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης 4.2σ της παραγράφου 4.2 με τη μέθοδο των συναρτήσεων Green[12]

Επίλυση της εξίσωσης:

$$\ddot{f} + \omega_0{}^2 f = \frac{1}{4}\omega_0{}^2 h(t) \qquad \text{(A4.1)}$$

$$h(t) = 5\cos\omega_0 t - \cos 3\omega_0 t$$

Ορίζουμε ως συνάρτηση Green $G(t-t')$ που αντιστοιχεί στη διαφορική εξίσωση Α4.1 κάθε λύση της εξίσωσης[12]:

$$\ddot{G}(\tau)+\omega_0^2 G(\tau)=\frac{1}{4}\omega_0^2\delta(\tau) \text{ όπου: } \tau\equiv t-t' \qquad (Α4.1α)$$

...όπου $\delta(\tau)$ η συνάρτηση Dirac[12]. Δεδομένου ότι για $\tau>0$ ή $\tau<0$, το δεξί μέρος της Α4.1α μηδενίζεται, μπορούμε να επιλέξουμε διάστημα $I=(-\eta,t-t_0)$ όπου: $\eta\to 0^+$, $t>t_0\geq 0$ ώστε η ζητούμενη συνάρτηση Green $G(\tau)$ να είναι ίση με την τετριμμένη λύση $G(\tau)=0$ της ομοιογενούς εξίσωσης: $\ddot{G}(\tau)+\omega_0^2 G(\tau)=0$ για τ εκτός του I, και διαφορετική από αυτήν εντός του I:

$$G(\tau)=\begin{cases}0 & \text{για κάθε } \tau\notin I\\ \neq 0 & \text{αν } \tau\in I\end{cases} \text{ ή: } G(t-t')=\begin{cases}0 & \text{για κάθε } t'<t_0 \text{ είτε } t'>t+\eta\\ \neq 0 & \text{αν } t+\eta>t'>t_0\end{cases} \qquad (Α4.1β)$$

Πρόταση Α4.1
Η συνάρτηση:

$$f_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\,G(t-t')h(t')=\int_{t_0}^{t+\eta}dt'\,G(t-t')h(t') \qquad (Α4.1γ)$$

...είναι μια μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης Α4.1.
Απόδειξη:

$$\ddot{f}_1(t)+\omega_0^2 f_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\,h(t')\left(\ddot{G}(t-t')+\omega_0^2G(t-t')\right)=\frac{1}{4}\omega_0^2\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\,h(t')\delta(t-t')=\frac{1}{4}\omega_0^2h(t) \qquad \text{QED}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier[12] της $G(\tau)$ και ο αντίστροφός του
Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της G και τον αντίστροφό του:

$$\tilde{G}(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\tau e^{ik\tau}G(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\,e^{ik(t-t')}G(t-t') \qquad (Α4.2α)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dk\tilde{G}(k)e^{-ikt}=\int_{-\infty}^{+\infty}dt'G(t-t')\int_{-\infty}^{+\infty}dk\,e^{-ikt'}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dt'G(t-t')\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon}^{+\infty}dk\,e^{-ik(t'-i\varepsilon)}+\int_{-\infty}^{-\varepsilon}dk\,e^{-ik(t'+i\varepsilon)}\right)= \qquad (Α4.2β)$$

$$=i\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}dt'G(t-t')\left(-\frac{1}{t'-i\varepsilon}+\frac{1}{t'+i\varepsilon}\right)$$

Σύμφωνα με το σχήμα Α1[7,12], αληθεύουν οι ισότητες (τα επικαμπύλια ολοκληρώματα υπολογίζονται στις καμπύλες C_R, C_r, και στον άξονα t', για $R\to+\infty$, $r\to 0$, $\varepsilon\to 0$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dt'G(t-t')\left(-\frac{1}{t'-i\varepsilon}+\frac{1}{t'+i\varepsilon}\right)+$$

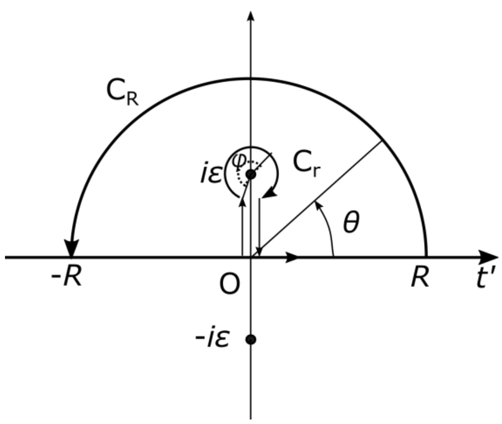
$$+\int_{C_R}Rid\theta\,e^{i\theta}\,G(t-R\,e^{i\theta})\left(-\frac{1}{R\,e^{i\theta}-i\varepsilon}+\frac{1}{R\,e^{i\theta}+i\varepsilon}\right)+$$

$$+\int_{C_r}rid\varphi\,e^{i\varphi}\,G(t-i\varepsilon-r\,e^{i\varphi})\left(-\frac{1}{r\,e^{i\varphi}}+\frac{1}{r\,e^{i\varphi}+2i\varepsilon}\right)=0$$

Υπολογίζουμε το 2ο και το 3ο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέρος της προηγούμενης εξίσωσης:

$$\left|\int_{C_R}Rid\theta\,e^{i\theta}\,G(t-R\,e^{i\theta})\left(-\frac{1}{R\,e^{i\theta}-i\varepsilon}+\frac{1}{R\,e^{i\theta}+i\varepsilon}\right)\right|\leq$$

$$\leq\int_{C_R}Rd\theta\left|G(t-R\,e^{i\theta})\right|\left(\frac{2\varepsilon}{R^2\,e^{2i\theta}+\varepsilon^2}\right)\to 0$$



Σχήμα Α4.1: Στο σχήμα εικονίζεται το μιγαδικό επίπεδο. Ο οριζόντιος άξονας απεικονίζει τους πραγματικούς αριθμούς και ο κάθετος τους φανταστικούς.

$$\int_{-C_r} rid\varphi\, e^{i\varphi}\, G(t - i\varepsilon - r\, e^{i\varphi})\left(-\frac{1}{r\, e^{i\varphi}} + \frac{1}{r\, e^{i\varphi} + 2i\varepsilon}\right) =$$

$$= i\int_{-C_r} rd\varphi\, e^{i\varphi}\, G(t - r\, e^{i\varphi})\, \frac{-2i\varepsilon}{r\, e^{i\varphi}\left(r\, e^{i\varphi} + 2i\varepsilon\right)} = i\int_{-C_r} d\varphi G(t - r\, e^{i\varphi})\, \frac{-2i\varepsilon}{r\, e^{i\varphi} + 2i\varepsilon} \xrightarrow[\substack{r\to 0\\ \varepsilon\to 0}]{} 2\pi i G(t)$$

Από την τελευταία και τις Α4.2α, Α4.2β, συνεπάγεται η σχέση:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk\tilde{G}(k) e^{-ikt} = 2\pi G(t) \qquad \text{(Α4.2γ)}$$

Επίλυση της Α4.1α

Από την Α4.2α και τον ορισμό της συνάρτησης Green, προκύπτουν οι ακόλουθες ταυτότητες:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{ik\tau}\ddot{G}(\tau) = \left[e^{ik\tau}\dot{G}(\tau)\right]_{-\infty}^{+\infty} - ik\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{ik\tau}\dot{G}(\tau) = -ik\left[e^{ik\tau}G(\tau)\right]_{-\infty}^{+\infty} - k^2\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{ik\tau}G(\tau) = -k^2\tilde{G}(k)$$

Η Α4.1α λαμβάνει τη μορφή:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{ik\tau}\ddot{G}(\tau) + \omega_0^2\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{ik\tau}G(\tau) = \frac{1}{4}\omega_0^2\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{ik\tau}\delta(\tau) \Rightarrow \left(-k^2 + \omega_0^2\right)\tilde{G}(k) = \frac{1}{4}\omega_0^2$$

$$\tilde{G}(k) = -\frac{1}{4}\omega_0^2\frac{1}{k^2 - \omega_0^2} \qquad \text{(Α4.3α)}$$

Η συνάρτηση Green της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier δίδεται από την Α4.3α, υπολογίζεται από τη σχέση (Α4.2β):

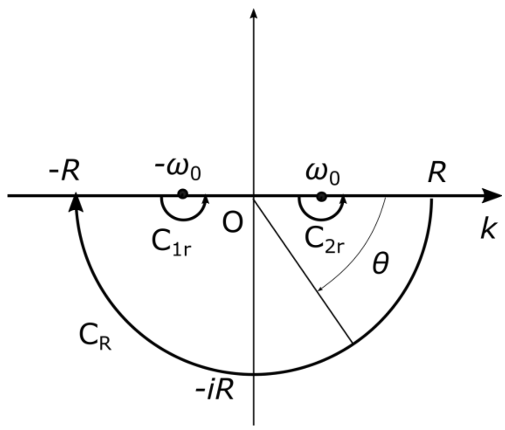
$$G(t) = -\frac{\omega_0^2}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dke^{-ikt}\frac{1}{k^2 - \omega_0^2} \qquad \text{(Α4.3β)}$$

Με τη βοήθεια του σχήματος Α4.2, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στην Α4.3β:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dke^{-ikt}\frac{1}{k^2 - \omega_0^2} + \int_{0}^{-\pi} d\theta Rie^{i\theta}e^{-itR(\cos\theta + i\sin\theta)}\frac{1}{R^2e^{2i\theta} - \omega_0^2} +$$

$$+\int_{-\pi}^{0} d\theta rie^{i\theta}e^{-it\left(-\omega_0 + re^{i\theta}\right)}\frac{1}{\left(-2\omega_0 + re^{i\theta}\right)re^{i\theta}} +$$

$$+\int_{-\pi}^{0} d\theta rie^{i\theta}e^{-it\left(\omega_0 + re^{i\theta}\right)}\frac{1}{re^{i\theta}\left(2\omega_0 + re^{i\theta}\right)} = 0$$



Σχήμα Α4.2: Υπολογισμός του ολοκληρώματος στη σχέση Α4.3β.

Για $R \to +\infty$, $r \to 0$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left|\int_{0}^{-\pi} d\theta Rie^{i\theta}e^{-itR(\cos\theta + i\sin\theta)}\frac{1}{R^2e^{2i\theta} - \omega_0^2}\right| \le \int_{0}^{\pi} d\theta Re^{-tR\sin\theta}\frac{1}{\left|R^2e^{-2i\theta} - \omega_0^2\right|} \to 0 \qquad \text{(Α4.3γ)}$$

$$\int_{-\pi}^{0} d\theta rie^{i\theta}e^{-it\left(-\omega_0 + re^{i\theta}\right)}\frac{1}{\left(-2\omega_0 + re^{i\theta}\right)re^{i\theta}} = i\int_{-\pi}^{0} d\theta e^{-it\left(-\omega_0 + re^{i\theta}\right)}\frac{1}{-2\omega_0 + re^{i\theta}} \to -\pi i\frac{e^{i\omega_0 t}}{2\omega_0} \qquad \text{(Α4.3δ)}$$

$$\int_{-\pi}^{0} d\theta rie^{i\theta}e^{-it\left(\omega_0 + re^{i\theta}\right)}\frac{1}{re^{i\theta}\left(2\omega_0 + re^{i\theta}\right)} \to \pi i\frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0} \qquad \text{(Α4.3ε)}$$

Ώστε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dke^{-ikt}\frac{1}{k^2 - \omega_0^2} = -\pi i\frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0} + \pi i\frac{e^{i\omega_0 t}}{2\omega_0} = -\frac{\pi}{\omega_0}\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} = -\frac{\pi}{\omega_0}\sin\omega_0 t \qquad \text{(Α4.3ζ)}$$

...και:

$$G(t) = -\frac{\omega_0^2}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dke^{-ikt}\frac{1}{k^2 - \omega_0^2} = \frac{\omega_0}{8}\sin\omega_0 t \qquad \text{(Α4.3η)}$$

Σύμφωνα με την πρόταση Α4.1, μια μερική λύση της διαφορική εξίσωσης Α4.1α υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, G(t-t')h(t') = \int_{t_0}^{t} dt' \, G(t-t')h(t') \qquad \text{(A4.4)}$$

...όπου η συνάρτηση Green δίδεται από την A4.3η και η $h(t')$, από την A4.1:

$h(t') = 5\cos\omega_0 t' - \cos 3\omega_0 t'$

Επιστροφή στα Περιεχόμενα

k_pm

References

1. Classical Mechanics: Goldstein, Poole & Safko, Addison Wesley, 3d edition.
2. Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles: A.O.Barut, Dover edition 1980.
3. Introduction to Classical Mechanics with Problems and Solutions: David Morin Harvard University, Cambridge University Press 2008.
4. An Elementary Introduction to the Riemannian Geometry of Surfaces: K. G. Papamichalis, Differential Geometry (sch.gr)
5. http://users.sch.gr/kostaspapamichalis
6. Einstein's General Theory of Relativity: Oyvind Gron - Sigbjorn Hervik, Springer ed. ISBN-13: 978-1441924063.
7. Advanced Calculus: R.C. Buck McGraw-Hill Inc. 3d edition 1978.
8. Advanced Calculus: Lynn H. Loomis - Shlomo Sternberg, Jones and Bartlett Publishers, Inc 1990
9. The Classical Theory of Fields: L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Pergamon Press third revised English edition
10. General Relativity - An Introduction for Physicists: M.P. Hobson G.P. Efstathiou A.N. Lasenby. Cambridge University Press 2006
11. Affine space - Ορισμός: Affine space - Wikipedia
12. Physical Mathematics: Kevin Cahill, Cambridge University Press 2013

ISBN: 978-618-84204-1-0