Το μοντέλο του γραμμικού ταλαντωτή στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας και στη Νευτώνεια Μηχανική

Κωνσταντίνος Παπαμιχάλης Δρ. Φυσικής Παν. Αθηνών (ΕΚΠΑ)

Σύνοψη

Σε αυτή την εργασία, ορίζουμε, μελετάμε και προσομοιώνουμε τον γραμμικό ταλαντωτή στο πλαίσιο της Σχετικιστικής και της Νευτώνειας Μηχανικής. Περιγράφουμε το σχετικιστικό και το Νευτώνειο μοντέλο και παράγουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ο χρόνος *t* στο Νευτώνειο μοντέλο ταυτίζεται με τον παγκόσμιο χρόνο του αδρανειακού συστήματος αναφοράς στο σχετικιστικό μοντέλο. Οι εξισώσεις κίνησης εκφράζονται με ελεύθερη παράμετρο τον κοινό χρόνο *t* των δύο μοντέλων. Οι αρχικές συνθήκες και οι παράμετροι που προσδιορίζουν την κίνηση του ταλαντωτή σε κάθε μοντέλο επιλέγονται έτσι ώστε στο μη σχετικιστικό όριο οι εξισώσεις κίνησης και οι αρχικές συνθήκες του σχετικιστικού ταλαντωτή να ταυτίζονται με εκείνες του Νευτώνειου.

Με βάση τις εξισώσεις κίνησης, προσομοιώνουμε την κίνηση του Νευτώνειου και του σχετικιστικού ταλαντωτή. Υπολογίζουμε την περίοδο και τη συχνότητα της κίνησης κάθε ταλαντωτή, σε συνάρτηση με τη μηχανική του ενέργεια. Μελετάμε τα αντίστοιχα γραφήματα θέσης - χρόνου και ταχύτητας - θέσης σε κάθε μοντέλο και συγκρίνουμε τις προβλέψεις τους.

Βασικές έννοιες και σχέσεις

Αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων σε χώρο Minkowski[1,3,5] - Παγκόσμιος χρόνος[3,5] - Δύναμη Minkowski[1,3] - Οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίου σε χώρο Minkowski[1,3] - Σχετικιστικός ταλαντωτής[1,2,3] - Ο 2ος νόμος του Newton[2] - Νευτώνειος ταλαντωτής[2]

Προσομοίωση του σχετικιστικού και του Νευτώνειου ταλαντωτή:
[Relativistic Oscillator (sch.gr)]

1. Το σχετικιστικό μοντέλο του γραμμικού ταλαντωτή[3]

Γράφουμε τις γενικές εξισώσεις κίνησης ενός σωματιδίου Σ σε χώρο Minkowski και εξειδικεύουμε τη μορφή τους ως προς ένα αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (*O*,x). Διατυπώνουμε τη σχέση ιδιόχρονου (proper time) και παγκόσμιου χρόνου (world time) και εκφράζουμε την τετρα-ταχύτητα του Σ ως προς τον παγκόσμιο χρόνο του (*O*,x). Βρίσκουμε τους γενικούς περιορισμούς που οφείλει να ικανοποιεί μια δύναμη Minkowski και τη μορφή της στην περίπτωση που παράγεται από βαθμωτό δυναμικό. Διερευνούμε πώς συμπεριφέρεται μια δύναμη Minkowski στο μη σχετικιστικό όριο και ποια είναι η σχέση του σχετικιστικού βαθμωτού δυναμικού με το αντίστοιχο Νευτώνειο. Ορίζουμε τον σχετικιστικό γραμμικό ταλαντωτή σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς και παράγουμε τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνησή του. Συγκρίνουμε με το αντίστοιχο Νευτώνειο μοντέλο.

Ένα σχετικιστικό μοντέλο που περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου Σ μάζας *m* σε χώρο Minkowski *M*, καθορίζεται από την αναλυτική έκφραση του τετραδιανύσματος της δύναμης *K*, που ενεργεί στο Σ, ως προς κάποιο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς (*O*,x). Η κοσμική γραμμή *C* του Σ ως προς το (*O*,x), είναι λύση των διαφορικών εξισώσεων[1,3,5]:

$$m\frac{D_{\Delta C}U}{D\tau} = K \text{ ή: } m\frac{D_{\Delta C}{}^{\mu}U}{D\tau} = K^{\mu}\,,\ \mu = 0,1,2,3 \qquad (1.1)$$

όπου *τ* συμβολίζει τον ιδιόχρονο του Σ επί της κοσμικής γραμμής *C*, και *U* την τετρα-ταχύτητα του Σ[1,2,3]. Το $D_{\Delta C}U$, είναι το συναλλοίωτο διαφορικό[3,4] της τετρα-ταχύτητας του Σ επί της *C*.

Στη σύνθεση του μοντέλου μας, θεωρούμε ότι το (*O*,x) είναι ένα αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων[3]. Ο μετρικός τανυστής του χωροχρονικού συνεχούς *M* ως προς το (*O*,x), προσδιορίζεται από τον πίνακα:

$$[\eta^{\mu\nu}] = [\eta_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Το απειροστό διάστημα Δs μεταξύ δύο γειτονικών σημείων X και Y της C με συντεταγμένες:
$X \leftrightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3)$ και $Y \leftrightarrow (x^0 + \Delta x^0, x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$
...δίδεται από τις σχέσεις[1,3,5]:

$$\Delta s = \sqrt{\eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}} = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2} = c\Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$
$$= \frac{1}{\gamma(v)}c\Delta t\,,\ \gamma(v) \underset{def}{=} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2},\ \ v = \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2} \qquad (1.2α)$$

Στις σχέσεις 1.2α, έχουμε θέσει: $\Delta x^0 = c\Delta t$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό, και t ο παγκόσμιος χρόνος[3,5] του (O,x) που μετράμε με συγχρονισμένα χρονόμετρα τοποθετημένα στα χωρικά σημεία του (O,x)[3,5].
Ο ιδιόχρονος του Σ επί της κοσμικής γραμμής του, εκφράζεται συναρτήσει του παγκόσμιου χρόνου με τη σχέση[1,5]:

$$\Delta\tau = \frac{1}{\gamma(v)}\Delta t \qquad (1.2β)$$

Ως προς το αδρανειακό Καρτεσιανό σύστημα (O,x), το συναλλοίωτο διαφορικό $D_{\Delta C}U$ ταυτίζεται με την κατευθυνόμενη παράγωγο $d_{\Delta C}U$ της τετρα-ταχύτητας[3].
Η συνιστώσες της τετρα-ταχύτητας είναι:

$$U^{\mu} = \gamma(v)\frac{dx^{\mu}}{dt}\,,\ U^0 = \gamma(v)c\,,\ U^j = \gamma(v)v^j\,,\ j = 1,2,3 \qquad (1.3α)$$

Η norm της τετρα-ταχύτητας:

$$\|U\|^2 = \langle U, U\rangle = \eta_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = \gamma^2\left(c^2 - \vec{v}\cdot\vec{v}\right) = c^2 \qquad (1.3β)$$

Από την 1.3β και τις εξισώσεις κίνησης 1.1, έπεται ότι η δύναμη Minkowski οφείλει να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\langle K, U\rangle = m\left\langle \frac{DU}{D\tau}, U\right\rangle = m\frac{1}{2}\frac{D}{D\tau}\langle U, U\rangle = 0 \Rightarrow \left\{\langle K, U\rangle = 0\,,\ K^0c - \sum_{j=1}^{3}K^jv^j = 0\right\} \qquad (1.4)$$

Επομένως, η κίνηση του Σ ως προς το (O,x) περιγράφεται από τις εξισώσεις κίνησης 1.1, και τις συνθήκες 1.4. Επιλέγουμε ως ελεύθερη μεταβλητή τον παγκόσμιο χρόνο t, ως προς το (O,x), και γράφουμε:

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(m\gamma c\right) = K^0 \qquad (1.5α)$$
$$\gamma\frac{d}{dt}\left(m\gamma v^j\right) = K^j\,,\ j = 1,2,3 \qquad (1.5β)$$
$$\eta_{\mu\nu}K^{\mu}U^{\nu} = 0 \qquad (1.5γ)$$

Στο μη σχετικιστικό όριο η 1.5β συγκλίνει στον 2ο νόμο του Newton:

$$\frac{v^2}{c^2} \to 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(mv^j\right) = \frac{1}{\gamma}K^j\,,\ j = 1,2,3$$

...όπου, η Νευτώνεια δύναμη που ενεργεί στο σωματίδιο Σ, ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$F^j = \lim_{\frac{v^2}{c^2}\to 0}\frac{1}{\gamma}K^j\,,\ j = 1,2,3$$

Δύναμη Minkowski που παράγεται από βαθμωτό δυναμικό
Στην παράγραφο 4.1 της αναφοράς 3, δείχνουμε ότι η τετρα-δύναμη με συνιστώσες, ως προς το (O,x):

$$K^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau}V(\mathrm{x}) + B^\mu - \frac{1}{c^2}\langle B,U\rangle U^\mu$$

όπου: $B^\mu = \eta^{\mu\kappa}\partial_\kappa V(\mathrm{x})$ και $\partial_0 V(\mathrm{x}) = 0$

...ικανοποιεί τη συνθήκη 1.4 ή 1.5γ, και μπορεί να θεωρηθεί ως αποδεκτή τετρα-δύναμη ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x), σε ένα σχετικιστικό μηχανικό μοντέλο. Δείξτε ότι αληθεύουν οι ισότητες:

$$\eta_{\mu\nu}K^\mu U^\nu = \eta_{\mu\nu}\left(\frac{dU^\mu}{d\tau}V(\mathrm{x}) + B^\mu - \frac{1}{c^2}\langle B,U\rangle U^\mu\right)U^\nu = V(\mathrm{x})\eta_{\mu\nu}\frac{dU^\mu}{d\tau}U^\nu + \eta_{\mu\nu}B^\mu U^\nu - \frac{1}{c^2}\langle B,U\rangle \eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu =$$

$$= V(\mathrm{x})\frac{d}{d\tau}\left(\eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu\right) + \eta_{\mu\nu}B^\mu U^\nu - \langle B,U\rangle = 0$$

Οι χρονική και οι χωρικές συνιστώσες της τετρα-δύναμης υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$K^0 = -\frac{1}{c}\gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma V(\vec{r})\right)$$

$$K^j = \eta^{jk}\partial_k V - \frac{1}{c^2}\gamma\frac{d}{dt}\left(\gamma V v^j\right)$$

...και οι εξισώσεις κίνησης 1.5α, 1.5β, γράφονται:

$$\gamma\left(mc^2 + V\right) = E \ \left(=\text{σταθερό}\right) \qquad (1.6α)$$

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(\left(m + \frac{1}{c^2}V\right)\gamma v^j\right) = -\partial_j V \qquad (1.6β)$$

Η 1.6α δηλώνει ότι η ποσότητα E, που ορίζεται ως "μηχανική ενέργεια", διατηρείται κατά μήκος της κοσμικής γραμμής του Σ. Η 1.6β αποτελεί γενίκευση του 2ου νόμου του Newton. Στο μη σχετικιστικό όριο, δηλαδή για $\frac{\vec{v}^2}{c^2} \to 0$ και $\frac{V(\vec{r})}{mc^2} \to 0$ η 1.6β συγκλίνει στη:

$$\frac{d}{dt}\left(mv^j\right) = -\partial_j V = F_{(N)j}$$

...από την οποία συνάγεται ότι η συνάρτηση V, προκύπτει από την αναλυτική έκφραση της δυναμικής ενέργειας του Σ στο αντίστοιχο Νευτώνειο μοντέλο. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, ορίζουμε ως "σχετικιστικό ταλαντωτή" το μηχανικό σύστημα που προσδιορίζεται από τις ακόλουθες συνθήκες:

Συνθήκες που ορίζουν έναν γραμμικό ταλαντωτή σε χώρο Minkowski
Α) Υπάρχει αδρανειακό, Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O,x) του χώρου Minkowski M, ως προς το οποίο οι εξισώσεις κίνησης σωματιδίου Σ μάζας m, δίδονται από τις 1.6α και 1.6β.

Β) Ως προς το (O,x) η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης δυναμικής ενέργειας δίδεται από τη σχέση:

$$V(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}kx^2 \ \text{όπου: } ct \equiv x^0,\ x \equiv x^1,\ y \equiv x^2,\ z \equiv x^3$$

$$\mathrm{x} \equiv \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \equiv \left(ct, x, y, z\right) \qquad (1.7)$$

Το t συμβολίζει τον παγκόσμιο χρόνο[1,3] ως προς το (O,x).

Με δεδομένες τις συνθήκες Α και Β, οι εξισώσεις κίνησης 1.6α και 1.6β λαμβάνουν τη μορφή:

$$\gamma\left(mc^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=E\,,\ \gamma\frac{d}{dt}\left(\left(m+\frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_x\right)=-kx$$
$$\gamma\frac{d}{dt}\left(\left(m+\frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_y\right)=0\,,\ \gamma\frac{d}{dt}\left(\left(m+\frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_z\right)=0 \tag{1.8}$$

Θεωρούμε ότι η τροχιά του σωματιδίου Σ ικανοποιεί τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες:
$x(0)=x_0,\ v_x(0)=v_0,\ v_y(0)=v_z(0)=0$ (1.9)

Από τις 1.8 και 1.9, συνεπάγονται οι σχέσεις:
$\left(m+\frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_y=C_y=\text{const.},\ \left(m+\frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_z=C_z=\text{const.}$

και:
$C_y=\left(m+\frac{k}{2c^2}{x_0}^2\right)\gamma_0 v_y(0)=0,\ C_z=\left(m+\frac{k}{2c^2}{x_0}^2\right)\gamma_0 v_z(0)=0$

...από τις οποίες έπεται ότι: $v_y(t)=v_z(t)=0$ για κάθε t Το Σ κινείται πάνω στον άξονα Ox και η κοσμική γραμμή του είναι λύση των διαφορικών εξισώσεων:

$$\gamma\left(mc^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=E \tag{1.10α}$$

$$\gamma\frac{d}{dt}\left(\left(m+\frac{k}{2c^2}x^2\right)\gamma v_x\right)=-kx \tag{1.10β}$$

Διερεύνηση των εξισώσεων κίνησης του γραμμικού ταλαντωτή

Η 1.10α εκφράζει τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας του ταλαντωτή κατά μήκος της τροχιάς του:

$$\gamma\left(mc^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=E=\frac{mc^2+\frac{1}{2}k{x_0}^2}{\sqrt{1-\frac{{v_0}^2}{c^2}}},\ \gamma=\gamma(v_x)=\left(1-\frac{{v_x}^2}{c^2}\right)^{-1/2} \tag{1.11}$$

Από τον συνδυασμό των 1.10α και 1.10β προκύπτει η εξίσωση:

$$\gamma\frac{E}{mc^2}\frac{dv_x}{dt}=-\frac{k}{m}x \tag{1.12}$$

Θέτουμε:

$$E=mc^2+w\Rightarrow\frac{w}{mc^2}=\frac{1+\frac{k{x_0}^2}{2mc^2}}{\sqrt{1-\frac{{v_0}^2}{c^2}}}-1\Rightarrow 1+\frac{w}{mc^2}=\gamma\left(1+\frac{kx^2}{2mc^2}\right) \tag{1.13}$$

Επιλέγουμε αρχικές συνθήκες: $x(0)=x_0,\ v_x(0)=v_0=0$ οπότε, από τις 1.13 και 1.10α βρίσκουμε ότι:

$$w=\frac{k{x_0}^2}{2}=mc^2\left(\gamma(v_x)\left(1+\frac{kx^2}{2mc^2}\right)-1\right) \tag{1.14}$$

Η εξίσωση κίνησης 1.12 γράφεται:

$$\left(1+\frac{w}{mc^2}\right)\gamma\frac{dv_x}{dt}=-\frac{k}{m}x\Rightarrow\frac{dv_x}{dt}=-\frac{1+\frac{kx^2}{2mc^2}}{\left(1+\frac{w}{mc^2}\right)^2}\frac{k}{m}x\Rightarrow\frac{dv_x}{dt}=-\frac{1+\frac{kx^2}{2mc^2}}{\left(1+\frac{k{x_0}^2}{2mc^2}\right)^2}\frac{k}{m}x \tag{1.15}$$

<u>Παρατήρηση 1</u>: Επιλύουμε την 1.14 ως προς v_x:

$$\frac{v_x^{\,2}}{c^2} = 1 - \frac{\left(1 + \dfrac{kx^2}{2mc^2}\right)^2}{\left(1 + \dfrac{kx_0^{\,2}}{2mc^2}\right)^2}$$

Η μέγιστη τιμή του v_x^2 επιτυγχάνεται για x=0: $\dfrac{v_{\max}^{\,2}}{c^2} = 1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{kx_0^{\,2}}{2mc^2}\right)^2}$

...από την οποία συνεπάγεται ότι η συνθήκη $|v_{\max}|<c$ ικανοποιείται για κάθε τιμή της αρχικής μηχανικής ενέργειας $w = \dfrac{kx_0^{\,2}}{2}$

<u>Παρατήρηση 2</u>: Πάλι από την 1.14, έπεται η σχέση: $\left(1 + \dfrac{kx^2}{2mc^2}\right)^2 = \left(1 - \dfrac{v_x^{\,2}}{c^2}\right)\left(1 + \dfrac{kx_0^{\,2}}{2mc^2}\right)^2$, από την οποία συνεπάγεται ότι η μέγιστη τιμή του x επιτυγχάνεται για v_x^2=0:

$x_{\max} = |x_0| \Rightarrow -|x_0| \le x \le |x_0|$

<u>Παρατήρηση 3</u>: Για $\dfrac{w}{mc^2} = \dfrac{kx_0^{\,2}}{2mc^2} << 1$ η 1.15 προσεγγίζεται από την:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

...που είναι η εξίσωση κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής, με συχνότητα: $\omega_N = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Η τροχιά του Νευτώνειου ταλαντωτή δίδεται από την έκφραση: $x_N = x_0 \cos \omega_N t$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη σχετικιστική διόρθωση Νευτώνειας τροχιάς και της περιόδου της κίνησης, με όρους μέχρι και 1ης τάξης ως προς το $\dfrac{w}{mc^2}$ (κοντά στο μη σχετικιστικό όριο). Έστω ότι:

$$h \equiv \frac{w}{mc^2} = \frac{kx_0^{\,2}}{2mc^2} << 1$$

Θεωρούμε ότι η αναλυτική έκφραση της τροχιάς σε προσέγγιση 1ης τάξης ως προς το h, που είναι λύση της 1.15, με αρχικές συνθήκες τις $x(0) = x_0$, $v_x(0) = v_0 = 0$ έχει τη μορφή:

$x = x_0\left(\cos \omega_N t + h f(t)\right)$ όπου: $f(0) = 0$ και $\dot{f}(0) = 0$ (1.16α)

$(1.16\text{a}) \Rightarrow v_x = \dot{x} = x_0\left(-\omega_N \sin \omega_N t + h\dot{f}(t)\right)$, $\dot{v}_x = \ddot{x} = x_0\left(-\omega_N^{\,2} \cos \omega_N t + h\ddot{f}(t)\right)$ (1.16β)

Από την 1.14 προκύπτει η ακόλουθη προσεγγιστική έκφραση που σχετίζει την ταχύτητα του Σ με την αντίστοιχη θέση του:

$$v_x^{\,2} \approx \frac{k}{m}\left(x_0^{\,2} - x^2\right) - \frac{k}{m}h\left(\frac{3}{2}x_0^{\,2} - 2x^2 + \frac{x^4}{2x_0^{\,2}}\right) \qquad (1.17)$$

(Ο πρώτος όρος στο δεξί μέρος της 1.17 αντιστοιχεί στην πρόβλεψη του Νευτώνειου μοντέλου)

Από τη 1.17 επιβεβαιώνουμε ότι για $|x|=x_0$ η v_x είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς, η κίνηση περιορίζεται στο διάστημα $[-x_0,x_0]$ και είναι περιοδική με περίοδο T, που μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$T = 2\int_{-x_0}^{x_0} \frac{dx}{v_x} \qquad (1.18)$$

Προσεγγίζουμε την τιμή του ολοκληρώματος στην 1.18, με τη βοήθεια της 1.17:

$$v_x^{-1} \approx \left(\frac{m}{2w}\right)^{1/2}\left(1-y^2\right)^{-1/2}\left(1+\frac{h}{4}\left(3-y^2\right)\right) \text{ where: } y = \frac{x}{x_0} \tag{1.18α}$$

Αντικαθιστούμε στην 1.18 και λαμβάνουμε:

$$T \approx 4\sqrt{\frac{m}{k}}\left[\int_0^1 dy\left(1-y^2\right)^{-1/2} - \frac{1}{4}\frac{w}{mc^2}\int_0^1 dy\left(1-y^2\right)^{-1/2}\left(y^2-3\right)\right] \tag{1.18β}$$

Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στο δεξί μέρος της 1.18β και βρίσκουμε ότι η περίοδος και η συχνότητα του ταλαντωτή προσεγγίζονται, αντίστοιχα, από τις εκφράσεις:

$$T \approx T_N\left(1+\frac{5w}{8mc^2}\right) \text{ where: } T_N = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m{x_0}^2}{2w}} \tag{1.18γ}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \approx \omega_N\left(1+\frac{5w}{8mc^2}\right)^{-1} \approx \omega_N\left(1-\frac{5w}{8mc^2}\right) \text{ where: } \omega_N = \frac{2\pi}{T_N} \tag{1.18δ}$$

Εξάρτηση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης του σχετικιστικού ταλαντωτή από τη μηχανική ενέργεια *w*

Η κοσμική γραμμή του Σ με αρχικές συνθήκες $x(0)=x_0$, $v_x(0)=0$ και με αρχική μηχανική ενέργεια $w>0$, είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1+\dfrac{w}{mc^2{x_0}^2}x^2}{\left(1+\dfrac{w}{mc^2}\right)^2}\frac{2w}{m{x_0}^2}x \tag{1.19}$$

ή, ισοδύναμα:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{w}{\dfrac{m{x_0}^2}{2}\left(1+\dfrac{w}{mc^2}\right)}\frac{1}{\gamma(v_x)}x \tag{1.20α}$$

...όπου το $\gamma(v_x)$ προκύπτει από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας (σχέση 1.10α):

$$\frac{1}{\gamma(v_x)} = \left(1-\frac{{v_x}^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{1+\dfrac{w}{mc^2}\dfrac{x^2}{{x_0}^2}}{1+\dfrac{w}{mc^2}} \tag{1.20β}$$

Έχουμε θέσει: $h \equiv \dfrac{w}{mc^2}$ ...οπότε, από τις 1.20α και β προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{2w}{m{x_0}^2}\frac{1+h\dfrac{x^2}{{x_0}^2}}{(1+h)^2}x \tag{1.20γ}$$

$$v_x = c\left(1-\left(\frac{1+h\,x^2/{x_0}^2}{1+h}\right)^2\right)^{1/2} \tag{1.20δ}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης υπολογίζεται από την 1.18:

$$T = 2\int_{-x_0}^{x_0}\frac{dx}{v_x} = \frac{2x_0}{c}\int_{-1}^{+1}dy\left(1-\left(\frac{1+h\,y^2}{1+h}\right)^2\right)^{-1/2} \tag{1.20ε}$$

Στο μη σχετικιστικό όριο $\left(h \equiv \dfrac{w}{mc^2} \to 0\right)$ η 1.20γ συγκλίνει στην εξίσωση:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{2w}{m{x_0}^2}x$$

...και σε συνδυασμό με την 1.14, προκύπτει η: $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x$ που περιγράφει την κίνηση του ταλαντωτή στο Νευτώνειο μοντέλο.

Υπολογισμός της περιόδου της κίνησης για μεγάλες τιμές της μηχανικής ενέργειας του ταλαντωτή

Για μεγάλες τιμές της μηχανικής ενέργειας *w* του ταλαντωτή, ισχύει: $\frac{w}{mc^2} \to +\infty$ Θέτουμε:

$$\bar{h} \underset{\text{ορισμ.}}{=} \left(\frac{w}{mc^2}\right)^{-1}$$

οπότε: $\frac{w}{mc^2} \to +\infty \Rightarrow \bar{h} \to 0$

Βρίσκουμε την οριακή έκφραση της v_x, ως συνάρτηση του x, από την 1.20β και υπολογίζουμε την περίοδο της κίνησης από την 1.18:

$$(1.20\beta) \Rightarrow \left(1 - \frac{{v_x}^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{1 + \frac{w}{mc^2}\frac{x^2}{{x_0}^2}}{1 + \frac{w}{mc^2}} \Rightarrow 1 - \frac{{v_x}^2}{c^2} = \frac{\left(\bar{h} + \frac{x^2}{{x_0}^2}\right)^2}{\left(\bar{h}+1\right)^2} \Rightarrow \lim_{\bar{h}\to 0} v_x = c\left(1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^4\right)^{1/2}$$

$$(1.18) \Rightarrow T = 2\int_{-x_0}^{x_0}\frac{dx}{v_x} = 4\int_0^{x_{\max}}\frac{dx}{v_x} \to \frac{4x_0}{c}\int_0^1 \frac{dq}{\left(1-q^4\right)^{1/2}}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξί μέρος της προηγούμενης σχέσης με το λογισμικό Geogebra ή στο πλαίσιο της εφαρμογής, με προγραμματισμό JavaScript, και βρίσκουμε:

$$T \to 5.24\frac{x_0}{c} \qquad (1.21)$$

Αντίθετα, στο Νευτώνειο μοντέλο η περίοδος της κίνησης για μεγάλες τιμές της μηχανικής ενέργειας, δίδεται από τη σχέση:

$$T_N = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi x_0\sqrt{\frac{m}{2w}} = \sqrt{2}\pi\frac{x_0}{c}\sqrt{\frac{1}{w / mc^2}} = \sqrt{2}\pi\frac{x_0}{c}\sqrt{\bar{h}}$$

...από την οποία συνεπάγεται ότι:

$$\lim_{\bar{h}\to 0} T_N = \lim_{\bar{h}\to 0}\left(\sqrt{2}\pi\frac{x_0}{c}\sqrt{\bar{h}}\right) = 0 \qquad (1.22)$$

2. Σύνθεση της προσομοίωσης

Από την 1.2β συνεπάγεται η ισότητα:

$$\frac{{v_x}^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{1 + \frac{w}{mc^2}\frac{x^2}{{x_0}^2}}{1 + \frac{w}{mc^2}}\right)^2 \qquad (2.1)$$

...από την οποία συμπεραίνουμε ότι οι ακρότατες τιμές της ταχύτητας προκύπτουν για x=0. Το v_x λαμβάνει τιμές στο διάστημα $\left[-V_0, V_0\right]$, όπου:

$$V_0 = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + w / mc^2\right)^2}} = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1+h\right)^2}} \qquad (2.2)$$

Η θέση ισορροπίας του Σ προσδιορίζεται από τη συνθήκη: dv_x/dt=0 Από την 1.19 έπεται ότι η θέση ισορροπίας είναι στο x=0.

Πόση είναι η μέγιστη απομάκρυνση του Σ από τη θέση ισορροπίας του;

Από την 1.20β συνάγουμε ότι το x λαμβάνει ακρότατη τιμή για v_x=0:

$$1+\frac{w}{mc^2}\frac{x^2}{x_0{}^2}=\left(1-\frac{v_x{}^2}{c^2}\right)^{1/2}\left(1+\frac{w}{mc^2}\right)\Rightarrow\left\{|x|=x_{\max}\Leftrightarrow v_x=0\right\}\Rightarrow x_{\max}=x_0\Rightarrow x\in\left[-x_0,x_0\right]$$

Στην προσομοίωση, οι αρχικές συνθήκες του ταλαντωτή τόσο στο σχετικιστικό, όσο και στο Νευτώνειο μοντέλο, διατηρούνται σταθερές: Θεωρούμε ότι για t=0, το Σ βρίσκεται στη θέση $x=x_0$ του άξονα Ox του αδρανειακού συστήματος (O,x) και η ταχύτητά του είναι ίση με το μηδέν. Προσομοιώνουμε την κίνηση του Σ και μελετάμε πώς μεταβάλλεται η συχνότητα και η περίοδος της ταλάντωσης σε συνάρτηση με την μηχανική ενέργεια w του ταλαντωτή.

Στο εικονικό περιβάλλον σχεδιάζονται σε πραγματικό χρόνο για τα δύο μοντέλα, αντίστοιχα, τα γραφήματα θέσης - χρόνου και ταχύτητας - θέσης (phase-graph). Περιλαμβάνεται επίσης και το γράφημα περιόδου - μηχανικής ενέργειας, που δείχνει τις σχετικές αποκλίσεις των προβλέψεων των δύο μοντέλων.

Το γράφημα ταχύτητας - θέσης για το σχετικιστικό μοντέλο, προκύπτει από τη διατήρηση της ενέργειας (σχέση 2.1):

$$v_x=c\left[1-\left(\frac{1+\frac{w}{mc^2}\frac{x^2}{x_0^2}}{1+\frac{w}{mc^2}}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (2.3)$$

Στο μη σχετικιστικό όριο $\frac{w}{mc^2}\to 0$ η 2.3 συγκλίνει στην αντίστοιχη σχέση που προβλέπεται από το Νευτώνειο μοντέλο:

$$v_N=\lim_{\frac{w}{mc^2}\to 0}v_x=\lim_{\frac{w}{mc^2}\to 0}c\left(1-\left(\frac{1+\frac{w}{mc^2}\frac{x^2}{x_0{}^2}}{1+\frac{w}{mc^2}}\right)^2\right)^{1/2}=\lim_{\frac{w}{mc^2}\to 0}\left(c^2-\frac{c^2+2\frac{w}{m}\frac{x^2}{x_0{}^2}+\frac{w^2}{m^2c^2}\left(\frac{x^2}{x_0{}^2}\right)^2}{1+\frac{2w}{mc^2}+\frac{w^2}{m^2c^4}}\right)^{1/2}=$$

$$=\lim_{\frac{w}{mc^2}\to 0}\left(\frac{\frac{2w}{m}+\frac{w^2}{m^2c^2}-2\frac{w}{m}\frac{x^2}{x_0{}^2}-\frac{w^2}{m^2c^2}\left(\frac{x^2}{x_0{}^2}\right)^2}{1+\frac{2w}{mc^2}+\frac{w^2}{m^2c^4}}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{2w}{m}\left(1-\frac{x^2}{x_0{}^2}\right)}=\sqrt{\frac{k}{m}\left(x_0{}^2-x^2\right)}$$

Η τελευταία σχέση ταυτίζεται με την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας στον αντίστοιχο Νευτώνειο ταλαντωτή:

$$\frac{m}{2}v_N{}^2+\frac{k}{2}x^2=\frac{k}{2}x_0{}^2$$

Αριθμητικές τιμές

Σε ατομικές μονάδες, επιλέγω: c=1, m=2000 (περίπου η μάζα του πρωτονίου) και x_0=10au (ατομικές μονάδες μήκους).

Βιβλιογραφία

1) Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles: A.O. Barut, Dover ed. 1980.
2) Classical Mechanics: H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, Addison-Wesley 3d edition.
3) Σημειώσεις πάνω στις Μαθηματικές Αρχές της Σχετικιστικής Μηχανικής: Κ. Παπαμιχάλης ISBN: 978-618-84204-1-0, 16/03/2023.
4) Physical Mathematics: Kevin Cahill, Cambridge University Press 2013.
5) The Classical Theory of Fields: L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Pergamon Press third revised English edition.