

Διάσπαση σωματιδίου: το σχετικιστικό και το Νευτώνειο μοντέλο Κωνσταντίνος Παπαμιχάλης, Δρ Θεωρητικής Φυσικής

Σύνοψη

Στην εργασία αυτή αναλύονται και προσομοιώνονται δύο μαθηματικά μοντέλα, ένα Νευτώνειο και ένα σχετικιστικό, που περιγράφουν το φαινόμενο της διάσπασης ενός σωματιδίου σε δύο νέα διακριτά σωματίδια. Η διάσπαση και οι κινήσεις των σωματιδίων πραγματοποιούνται πάνω σε ένα χωρικό επίπεδο του Εργαστηριακού αδρανειακού συστήματος αναφοράς (ΕΑΣ). Στις δύο προσομοιώσεις η μάζα του διασπώμενου σωματιδίου, καθώς και οι αρχικές συνθήκες του μηχανικού συστήματος είναι ταυτόσημες. Ο χρήστης μπορεί να συγκρίνει τα αποτελέσματα των εικονικών πειραμάτων που προκύπτουν στο περιβάλλον κάθε προσομοίωσης και να αξιολογήσει τα δύο μοντέλα.

Μετάβαση στην προσομοίωση

Βασικές έννοιες και σχέσεις:

Χώρος Minkowski - Κοσμική γραμμή σωματιδίου - Τετρα-ταχύτητα και χωρική ταχύτητα σωματιδίου - Τετρα-ορμή και χωρική ορμή σωματιδίου - Μάζα σωματιδίου - Ενέργεια σωματιδίου - Ολική ορμή συστήματος σωματιδίων - Αδρανειακό Σύστημα Κέντρου Μάζας (ΑΣΚΜ) - Εξισώσεις κίνησης σωματιδίων σε χώρο Minkowski - Εντοπισμένες αλληλεπιδράσεις - Διατήρηση της τετρα-ορμής συστήματος σωματιδίων - Διατήρηση της χωρικής ορμής συστήματος σωματιδίων - Διατήρηση της ενέργειας συστήματος σωματιδίων

Περιεχόμενα

- 1) Διάσπαση σωματιδίου $\Sigma 1$ σε δύο διακριτά σωματίδια $\Sigma 2$ και $\Sigma 3$: το σχετικιστικό μοντέλο
 - a. Περιγραφή του συστήματος στο πλαίσιο της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας
 - b. Περιγραφή της κίνησης του $\Sigma 1$ ως προς το ΕΑΣ
 - c. Σύνδεση ΕΑΣ και ΑΣΚΜ
 - d. Περιγραφή της διάσπασης ως προς το ΑΣΚΜ - Οι κοσμικές γραμμές των $\Sigma 2$ και $\Sigma 3$ ως προς το ΑΣΚΜ
 - e. Περιγραφή της κίνησης των $\Sigma 2, \Sigma 3$ ως προς το ΕΑΣ

- 2) Διάσπαση σωματιδίου $\Sigma 1$ σε δύο διακριτά σωματίδια $\Sigma 2$ και $\Sigma 3$: το Νευτώνειο μοντέλο
 - a. Περιγραφή του συστήματος στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής
 - b. Περιγραφή της κίνησης του $\Sigma 1$ ως προς το ΕΑΣ
 - c. Σύνδεση ΕΑΣ και ΑΣΚΜ στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής
 - d. Περιγραφή της διάσπασης του $\Sigma 1$ ως προς το ΑΣΚΜ - Οι τροχιές των αναδυομένων σωματιδίων ως προς το ΑΣΚΜ
 - e. Περιγραφή της κίνησης των $\Sigma 2, \Sigma 3$ ως προς το ΕΑΣ

- 3) Περιγραφή της προσομοίωσης

Ένθετο 1: Δυνάμεις Minkowski κατά την εντοπισμένη στο χωρόχρονο αλληλεπίδραση δύο σωματιδίων - Η διατήρηση της τετρα-ορμής, της χωρικής ορμής και της ενέργειας του συστήματος

Δραστηριότητες

Αναφορές

1) Διάσπαση σωματιδίου σε δύο διακριτά σωματίδια: το σχετικιστικό μοντέλο

1a. Περιγραφή του συστήματος στο πλαίσιο της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας

Σωματίδιο $\Sigma 1$ μάζας m_1 κινείται στο χώρο Minkowski M , ως προς το εργαστηριακό αδρανειακό και Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς (O, x) (ΕΑΣ). Η χωρική ταχύτητα του $\Sigma 1$ σε κάθε σημείο της τροχιάς του δίδεται από τη σχέση (Σχήμα 1):

$$\vec{v}_1 = e_1(\Sigma 1)v_0, v_0 > 0$$

...όπου $e_1(\Sigma 1), e_2(\Sigma 1), e_3(\Sigma 1)$ συμβολίζουν τα μοναδιαία, αμοιβαία ορθογώνια διανύσματα βάσης του εφαπτόμενου στο M χώρου $T_{\Sigma 1}M^{(3,5)}$. Δεδομένου ότι το (O, x) είναι ένα αδρανειακό και Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, τα διανύσματα βάσης είναι ίδια σε κάθε σημείο του $M^{(3,5,6)}$, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$e_\mu(\Sigma 1) = e_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$$

...για κάθε χωροχρονική θέση του $\Sigma 1$ στο M . Συμβολίζω με t τον παγκόσμιο χρόνο (world time)^(2,3,6) του (O, x) . Τη χρονική στιγμή $t=0$ το $\Sigma 1$ έχει χωρικές συντεταγμένες $(-a, 0, 0)$, $a > 0$

Τη χρονική στιγμή $t=a/v_0$ το $\Sigma 1$ φτάνει στη χωρική αρχή O του ΕΑΣ και διασπάται σε δύο σωματίδια $\Sigma 2$ και $\Sigma 3$ μαζών m_2 και m_3 .

Στη συνέχεια, μελετώ την κίνηση του $\Sigma 1$ για $0 < t < a/v_0$, και την κίνηση των $\Sigma 2$ και $\Sigma 3$ για $t > a/v_0$, ως προς το αδρανειακό σύστημα κέντρου μάζας τους (ΑΣΚΜ). Βρίσκω τον μετασχηματισμό Lorentz που συνδέει το ΕΑΣ με το ΑΣΚΜ και υπολογίζω τις χωρικές ταχύτητες και τις παραμετρικές εξισώσεις των κοσμικών γραμμών των $\Sigma 2$ και $\Sigma 3$ ως προς το ΕΑΣ.

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

1b. Περιγραφή της κίνησης του $\Sigma 1$ ως προς το ΕΑΣ

Η αναλυτική έκφραση της κοσμικής γραμμής C_1 του $\Sigma 1$ ως προς το ΕΑΣ, για $t < a/v_0$, προσδιορίζεται από την καμπύλη c_1 του χώρου R^4 των συντεταγμένων^(3,6):

$$c_1 : c_1(t) = (ct, -a + v_0 t, 0, 0) \text{ ή:}$$

(1)

$$c_1^0(t) = ct, c_1^1(t) = -a + v_0 t, c_1^2(t) = 0, c_1^3(t) = 0$$

Η μετατόπιση Δc_1 επί της c_1 για απειροστή μεταβολή Δt του t , ορίζει ένα απειροστό εφαπτόμενο διάνυσμα της c_1 στο t :

$$\Delta c_1(t) = (c\Delta t, v_0\Delta t, 0, 0) \text{ ή:}$$

(1a)

$$\Delta c_1^0(t) = c\Delta t, \Delta c_1^1(t) = v_0\Delta t, \Delta c_1^2(t) = 0, \Delta c_1^3(t) = 0$$

Το αντίστοιχο εφαπτόμενο διάνυσμα ΔC_1 της κοσμικής γραμμής C_1 ορίζεται από τη σχέση:

$$\Delta C_1(t) = e_\mu \Delta c_1^\mu(t)$$

(1β)

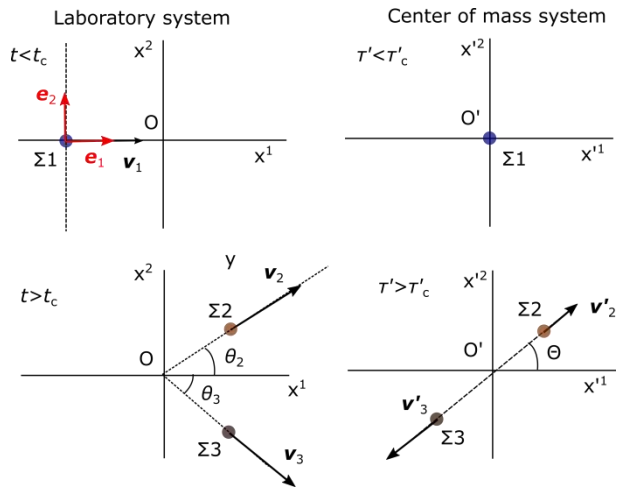
...όπου $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ είναι η βάση του εφαπτόμενου χώρου⁽³⁾ $T_X M$ στο σημείο $X=C_1(t)$ της C_1 .

Ως προς κάθε αδρανειακό και Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων του χώρου Minkowski M , τα διανύσματα βάσης e_μ είναι σταθερά -ανεξάρτητα του σημείου $X^{(3)}$. Επιπλέον, ορίζουν εσωτερικό γινόμενο σε κάθε εφαπτόμενο χώρο $T_X M$ του M σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\langle e_\mu, e_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu}, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

(2)

Ο μετρικός τανυστής $\eta_{\mu\nu}$ προσδιορίζεται από τον πίνακα:



Σχήμα 1: Διάσπαση του σωματιδίου $\Sigma 1$ ως προς το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου και ως προς το σύστημα του κέντρου μάζας του.

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2\alpha)$$

Το στοιχειώδες διάστημα Δs_1 επί της C_1 , τη χρονική στιγμή t , ισούται με τη norm^(3,5,6) του $\Delta C_1(t)$:
 $(1\alpha, 1\beta, 2) \Rightarrow \Delta s_1^2 = \langle \Delta C_1(t), \Delta C_1(t) \rangle = \langle e_\mu, e_\nu \rangle \Delta c_1^\mu \Delta c_1^\nu = \eta_{\mu\nu} \Delta c_1^\mu \Delta c_1^\nu =$
 $= c^2 \Delta t^2 - v_0^2 \Delta t^2 = c^2 \Delta t^2 (1 - \beta_0^2)$ (2β)

...όπου:

$$\Delta s_1 \equiv c \Delta \tau_1 = \frac{c}{\gamma_0} \Delta t, \beta_0 = \frac{v_0}{c}, \gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2} \quad (2\gamma)$$

Η ποσότητα τ_1 ορίζεται ως ο "ιδιόχρονος" του σωματιδίου $\Sigma 1$ κατά την κίνησή του επί της κοσμικής γραμμής του^(2,3,6) C_1 .

Η τετρα-ταχύτητα $U_{(1)}$ του $\Sigma 1$ είναι ένα διάνυσμα εφαπτόμενο της C_1 . Η $U_{(1)}$ ορίζεται από τις σχέσεις^(2,3,6):

$U_{(1)}(t) = e_\mu U_{(1)}^\mu(t)$ όπου:

$$U_{(1)}^\mu(t) = \lim_{\text{ορισμ. } \Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta c_1^\mu}{\Delta \tau_1} \Rightarrow \{U_{(1)}^0 = \gamma c, U_{(1)}^j = \gamma v_1^j, j = 1, 2, 3\} \quad (2\delta)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} ((v_1^1)^2 + (v_1^2)^2 + (v_1^3)^2)}$$

Από τις 2β, 2γ, 2δ έπεται ότι στο ΕΑΣ η τετρα-ταχύτητα του $\Sigma 1$ έχει τη μορφή:

$$U_{(1)}(t) = e_0 \gamma_0 c + e_1 \gamma_0 v_0 \quad (3)$$

Από την 3, συνεπάγεται ότι η norm της τετρα-ταχύτητας $U_{(1)}$ ικανοποιεί την ταυτότητα:

$$\|U_{(1)}(t)\| = \sqrt{\langle U_{(1)}(t), U_{(1)}(t) \rangle} = \sqrt{\gamma_0^2 (c^2 + v_0^2)} = c \gamma_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} = c \quad (3\alpha)$$

Η τετρα-ορμή του $\Sigma 1$ κατά την κίνησή του επί της C_1 , ορίζεται από τη σχέση:

$$P_{(1)} = m_1 U_{(1)}(t) = e_0 m_1 \gamma_0 c + e_1 m_1 \gamma_0 v_0 = e_0 \frac{E_1}{c} + e_1 m_1 \gamma_0 v_0 \quad (3\beta)$$

Η ποσότητα $E_1 = m_1 c^2 \gamma_0$ ορίζεται ως η ενέργεια του $\Sigma 1$ ως προς το ΕΑΣ.

Η χωρική ορμή $\vec{p}_{(1)}$ του $\Sigma 1$ ορίζεται από τις ισότητες:

$$\vec{p}_{(1)} \text{ ορισμ.} = e_j m_1 U_{(1)}^j = e_j m_1 \frac{dc_1^j}{d\tau_1} = e_j m_1 \gamma \frac{dc_1^j}{dt} = e_j m_1 \gamma v^j, j = 1, 2, 3 \quad (3\gamma)$$

Σύμφωνα με την 3, η χωρική ορμή του $\Sigma 1$ στο ΕΑΣ προσδιορίζεται από την αναλυτική έκφραση:

$$\vec{p}_{(1)} \text{ ορισμ.} = e_1 m_1 \gamma \frac{dc_1^1}{dt} = e_1 m_1 \gamma_0 v_0 = m_1 \gamma_0 \vec{v}_1 \quad (3\delta)$$

Δύναμη Minkowski

Η δύναμη Minkowski που ασκείται σε ένα σωματίδιο Σ ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της

τετρα-ορμής του σωματιδίου ως προς τον ιδιόχρονο του^(2,3): $K_{(\Sigma)}^\mu = \frac{dP_{(\Sigma)}^\mu}{d\tau_{(\Sigma)}}$

Μέχρι τη στιγμή της διάσπασης του $\Sigma 1$, οι συνιστώσες της τετρα-ταχύτητας του Σ είναι σταθερές (ανεξάρτητες του t), που συνεπάγεται ότι οι συνιστώσες της δύναμης Minkowski που ασκείται στο $\Sigma 1$ στο χρονικό διάστημα $[0, a/v_0]$ είναι ίσες με το μηδέν:

$$K_{(1)}^\mu = \frac{dP_{(1)}^\mu}{d\tau_1} = \gamma_0 \frac{dP_{(1)}^\mu}{dt} = 0 \text{ για: } t \in \left[0, \frac{a}{v_0} \right] \quad (4)$$

1c. Σύνδεση ΕΑΣ και ΑΣΚΜ

Ως σύστημα κέντρου μάζας απομονωμένου συστήματος σωματιδίων μη μηδενικής μάζας⁽²⁾, ορίζεται κάθε αδρανειακό σύστημα (O',x') του χώρου Minkowski M , ως προς το οποίο η ολική **χωρική** ορμή του συστήματος είναι ίση με το μηδέν (ΑΣΚΜ):

$$\sum_q P'_{(q)}{}^j = 0, P'_{(q)}{}^j = m_q \frac{dx'_q{}^j}{dt'_q} = m_q \gamma(v'_q) v'_q{}^j, v'_q{}^j \equiv \frac{dx'_q{}^j}{dt'_q}, j = 1, 2, 3$$

...όπου t' είναι ο παγκόσμιος χρόνος^(2,3,6) του ΑΣΚΜ. Το $q=1,2,\dots,Q$ προσδιορίζει το όνομα κάθε διακριτού σωματιδίου του συστήματος.

Το ΑΣΚΜ ενός ($Q=1$) σωματιδίου Σ' με αρχή το Σ' , είναι το αδρανειακό σύστημα (O',x') ως προς το οποίο η κοσμική γραμμή του Σ' είναι εικόνα⁽³⁾ της καμπύλης $c'(t')=(ct',0,0,0)$ του χώρου R^4 . Στην περίπτωση αυτή ο ιδιόχρονος του Σ' και ο παγκόσμιος χρόνος του ΑΣΚΜ ταυτίζονται.

Πώς σχετίζεται το ΕΑΣ με το ΑΣΚΜ του σωματιδίου Σ_1 ;

Συμβολίζω με (O',x') το ΑΣΚΜ του Σ_1 . Το τυχαίο σημείο X του M προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες (x^0, x^1, x^2, x^3) ως προς το (O,x) και από τις (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) ως προς το (O',x') .

Αφού το Σ_1 κινείται στο χωροχρονικό επίπεδο $\{x_{\Sigma_1}{}^2 = 0, x_{\Sigma_1}{}^3 = 0\}$ μπορώ να απλοποιήσω τον μετασχηματισμό συντεταγμένων μεταξύ των (O',x') και (O,x) θεωρώντας ότι $x^2=x'^2$ και $x^3=x'^3$, για κάθε X στο M .

Η χωρική αρχή O' του ΑΣΚΜ ταυτίζεται με τη χωρική θέση του Σ_1 .

Η αρχική θέση του Σ_1 ως προς το (O,x) έχει συντεταγμένες $(0,-a,0,0)$, ενώ οι αντίστοιχες συντεταγμένες του Σ_1 ως προς το (O',x') είναι $(0,0,0,0)$. Συμπεραίνω ότι τα δύο αδρανειακά συστήματα συνδέονται με έναν μη ομοιογενή μετασχηματισμό Lorentz⁽²⁾, που έχει τη μορφή:

$$(ct, x^1, x^2, x^3) = (ct', x'^1, x'^2, x'^3) \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (0, -a, 0, 0) \quad (5a)$$

ή:

$$(ct', x'^1, x'^2, x'^3) = (ct, x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a (\sinh \theta, \cosh \theta, 0, 0) \quad (5b)$$

Η κοσμική γραμμή του Σ_1 ως προς το (O,x) προσδιορίζεται από την καμπύλη του R^4 :

$$c_1(t) = (ct, -a + v_0 t, 0, 0) \quad (5\gamma)$$

...ενώ η κοσμική γραμμή του Σ_1 ως προς το (O',x') προσδιορίζεται από την:

$$c'_1(t') = (ct', 0, 0, 0) \quad (5\delta)$$

Από τον συνδυασμό των 5a, 5γ και 5δ προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$(ct, -a + v_0 t, 0, 0) = (ct', 0, 0, 0) \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (0, -a, 0, 0) \Rightarrow$$

$$(ct, -a + v_0 t, 0, 0) = (ct' \cosh \theta, -ct' \sinh \theta - a, 0, 0) \Rightarrow$$

$$t = t' \cosh \theta = t' \gamma_0 \quad (6a)$$

$$v_0 t = -ct' \sinh \theta \quad (6b)$$

$$\tanh \theta = -\frac{v_0}{c} = -\beta_0, \cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} = \gamma_0 \quad (6\gamma)$$

Πώς μεταβάλλονται τα διανύσματα βάσης του εφαπτόμενου χώρου $T_x M$ του M στο X , κάτω από τον μετασχηματισμό συντεταγμένων 5β;

Μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει την αλήθεια των ακόλουθων σχέσεων:

$$(5\beta) \Rightarrow (\Delta x'^0, \Delta x'^1, \Delta x'^2, \Delta x'^3) = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3) \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Delta x'^0 = \Delta x^0 \cosh \theta + \Delta x^1 \sinh \theta, \Delta x'^1 = \Delta x^0 \sinh \theta + \Delta x^1 \cosh \theta, \Delta x'^2 = \Delta x^2, \Delta x'^3 = \Delta x^3$$

$$\Delta X = e'_\nu \Delta x'^\nu = e_\mu \Delta x^\mu \Rightarrow e'_0 \Delta x'^0 + e'_1 \Delta x'^1 + e'_2 \Delta x'^2 + e'_3 \Delta x'^3 = e_0 \Delta x^0 + e_1 \Delta x^1 + e_2 \Delta x^2 + e_3 \Delta x^3 \Rightarrow$$

$$e'_0 (\Delta x^0 \cosh \theta + \Delta x^1 \sinh \theta) + e'_1 (\Delta x^0 \sinh \theta + \Delta x^1 \cosh \theta) + e'_2 \Delta x^2 + e'_3 \Delta x^3 =$$

$$= e_0 \Delta x^0 + e_1 \Delta x^1 + e_2 \Delta x^2 + e_3 \Delta x^3 \Rightarrow$$

$$(e'_0 \cosh \theta + e'_1 \sinh \theta - e_0) \Delta x^0 + (e'_0 \sinh \theta + e'_1 \cosh \theta - e_1) \Delta x^1 + (e'_2 - e_2) \Delta x^2 + (e'_3 - e_3) \Delta x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$e_0 = e'_0 \cosh \theta + e'_1 \sinh \theta, e_1 = e'_0 \sinh \theta + e'_1 \cosh \theta, e_2 = e'_2, e_3 = e'_3 \quad (6\delta)$$

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

1d. Περιγραφή της διάσπασης ως προς το ΑΣΚΜ - Οι κοσμικές γραμμές των αναδυόμενων σωματιδίων ως προς το ΑΣΚΜ

Η διάσπαση του σωματιδίου $\Sigma 1$ συμβαίνει ως προς το ΕΑΣ τη χρονική στιγμή $t_c = a/v_0$. Σύμφωνα με την 6α, τη στιγμή της διάσπασης τα συγχρονισμένα χρονόμετρα του ΑΣΚΜ δείχνουν:

$$\tau'_c = \frac{1}{\cosh \theta} \frac{a}{v_0}$$

Η κοσμική γραμμή του $\Sigma 1$ ως προς το ΑΣΚΜ, πριν τη διάσπαση, δηλαδή για $\tau' < \tau'_c$, προσδιορίζεται από την 5δ. Συμπεραίνω ότι η τετρα-ταχύτητα και η τετρα-ορμή του $\Sigma 1$ ως προς το ΑΣΚΜ, πριν τη διάσπαση υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\tau' < \tau'_c \Rightarrow \begin{cases} U'_{(1)} = e'_0 c \Rightarrow \{U'_{(1)}{}^0 = c, U'_{(1)}{}^1 = 0, U'_{(1)}{}^2 = 0, U'_{(1)}{}^3 = 0\} \\ P'_{(1)} = e'_0 m_1 c \Rightarrow \{P'_{(1)}{}^0 = mc, P'_{(1)}{}^1 = 0, P'_{(1)}{}^2 = 0, P'_{(1)}{}^3 = 0\} \end{cases} \quad (7)$$

Τη στιγμή τ'_c το $\Sigma 1$ διασπάται στα σωματίδια $\Sigma 2$ και $\Sigma 3$ που έχουν, αντίστοιχα, μάζες m_2, m_3 και χωρικές ταχύτητες σταθερών μέτρων v'_2, v'_3 . Οι κοσμικές γραμμές των $\Sigma 2$ και $\Sigma 3$ καθορίζονται ως προς το ΑΣΚΜ, από τις καμπύλες $x'_2(\tau')$ και $x'_3(\tau')$ του χώρου R^4 , όπου: $\tau' > \tau'_c$ (Σχήμα 1):

$$x'_2(\tau') = (c\tau', v'_2 (\tau' - \tau'_c) \cos \theta, v'_2 (\tau' - \tau'_c) \sin \theta, 0) \quad (8\alpha)$$

$$x'_3(\tau') = (c\tau', -v'_3 (\tau' - \tau'_c) \cos \theta, -v'_3 (\tau' - \tau'_c) \sin \theta, 0) \quad (8\beta)$$

ή:

$$x'_2(\tau') = c (\tau' - \tau'_c) (1, \beta'_2 \cos \theta, \beta'_2 \sin \theta, 0) + (c\tau'_c, 0, 0, 0)$$

$$x'_3(\tau') = c (\tau' - \tau'_c) (1, -\beta'_3 \cos \theta, -\beta'_3 \sin \theta, 0) + (c\tau'_c, 0, 0, 0)$$

$$\tau' > \tau'_c = \frac{1}{\cosh \theta} \frac{a}{v_0} = \frac{1}{\gamma_0} \frac{a}{v_0}$$

Εκφράζω τον παγκόσμιο χρόνο τ' του (O', x') συναρτήσεως του παγκόσμιου χρόνου t του (O, x) χρησιμοποιώντας την 6α, και αντικαθιστώ στις παραμετρικές εξισώσεις 8α, 8β:

$$x'_2(t) = \frac{1}{\gamma_0} \left(ct, \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) \beta'_2 \cos \theta, \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) \beta'_2 \sin \theta, 0 \right) \quad (8\gamma)$$

$$x'_3(t) = \frac{1}{\gamma_0} \left(ct, - \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) \beta'_3 \cos \theta, - \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) \beta'_3 \sin \theta, 0 \right) \quad (8\delta)$$

$$\text{όπου: } t > t_c = \frac{a}{v_0}$$

Στο Ένθετο 1 δείχνω ότι η συνολική τετρα-ορμή του συστήματος έχει την ίδια τιμή πριν και μετά τη διάσπαση του Σ1. Εφόσον οι χωρικές συνιστώσες της τετρα-ορμής του Σ1 ως προς το ΑΣΚΜ είναι μηδενικές πριν από τη διάσπασή του, έπεται ότι το αλγεβρικό άθροισμα των χωρικών συνιστωσών των τετρα-ορμών των Σ2 και Σ3 ως προς κάθε χωρικό άξονα του (Ο',x') είναι ίσο με το μηδέν. Δεδομένου ότι τα Σ2 και Σ3 αναδύονται από το ίδιο χωρικό σημείο, αυτό μπορεί να συμβεί εφόσον κινούνται πάνω στον ίδιο άξονα με αντίθετες κατευθύνσεις (Σχήμα 1). Η γωνία Θ που σχηματίζει ο άξονας αυτός με τον Ο'x¹, σχετίζεται με το μηχανισμό της διάσπασης. Στην προσομοίωση, η τιμή της Θ ελέγχεται από το χρήστη.

Με βάση τις αναλυτικές εκφράσεις των κοσμικών γραμμών (εξισώσεις 8α, 8β) διερευνώ τις συνθήκες που οφείλουν να ικανοποιούν τα μέτρα των χωρικών ταχυτήτων των Σ2 και Σ3, ώστε να εξασφαλίζεται η διατήρηση της τετρα-ορμής του συστήματος πριν και μετά τη διάσπαση.

Οι χωρικές ταχύτητες των δύο σωματιδίων ως προς το (Ο',x') δίδονται από τις σχέσεις:

$$\vec{v}'_2 = \lim_{\Delta T' \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}'_2}{\Delta T'} = e'_1 c \beta'_2 \cos \Theta + e'_2 \beta'_2 \sin \Theta \quad (8\epsilon)$$

$$\vec{v}'_3 = \lim_{\Delta T' \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}'_3}{\Delta T'} = -e'_1 c \beta'_3 \cos \Theta - e'_2 \beta'_3 \sin \Theta \quad (8\zeta)$$

Υπολογίζω το στοιχειώδες διάστημα και τον ιδιόχρονο επί της κοσμικής γραμμής κάθε σωματιδίου:

$$\Delta s_2'^2 = c^2 \Delta T_2'^2 = c^2 \Delta T'^2 - (v'_2)^2 \Delta T'^2 \Rightarrow \Delta T_2' = \Delta T' \sqrt{1 - \beta_2'^2} \equiv \frac{\Delta T'}{\gamma_2'} \quad (9\alpha)$$

$$\beta_2' = \frac{v_2'}{c}, v_2' = \sqrt{(v_2'^1)^2 + (v_2'^2)^2}, v_2'^1 = \frac{dx_2'^1}{dT'}, v_2'^2 = \frac{dx_2'^2}{dT'}$$

$$\Delta s_3'^2 = c^2 \Delta T_3'^2 = c^2 \Delta T'^2 - (v'_3)^2 \Delta T'^2 \Rightarrow \Delta T_3' = \Delta T' \sqrt{1 - \beta_3'^2} \equiv \frac{\Delta T'}{\gamma_3'} \quad (9\beta)$$

$$\beta_3' = \frac{v_3'}{c}, v_3' = \sqrt{(v_3'^1)^2 + (v_3'^2)^2}, v_3'^1 = \frac{dx_3'^1}{dT'}, v_3'^2 = \frac{dx_3'^2}{dT'}$$

Οι τετρα-ορμές των Σ2 και Σ3 υπολογίζονται από τις εξισώσεις:

$$P'_{(2)} = m_2 U'_{(2)} = m_2 \frac{dx'_2}{dT'_2} = e'_0 m_2 c \gamma_2' + e'_1 m_2 c \gamma_2' \beta_2' \cos \Theta + e'_2 m_2 c \gamma_2' \beta_2' \sin \Theta \quad (10\alpha)$$

$$\gamma_2' \equiv (1 - \beta_2'^2)^{-1/2}$$

$$P'_{(3)} = m_3 U'_{(3)} = m_3 \frac{dx'_3}{dT'_3} = e'_0 m_3 c \gamma_3' - e'_1 m_3 c \gamma_3' \beta_3' \cos \Theta - e'_2 m_3 c \gamma_3' \beta_3' \sin \Theta \quad (10\beta)$$

$$\gamma_3' \equiv (1 - \beta_3'^2)^{-1/2}$$

Η διατήρηση της τετρα-ορμής κατά τη διάσπαση, εκφράζεται αναλυτικά από τις εξισώσεις (Ένθετο 1):

$$P'_{(2)}{}^\mu + P'_{(3)}{}^\mu = P'_{(1)}{}^\mu \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_2 \gamma_2' + m_3 \gamma_3' = m_1 \\ m_2 \gamma_2' \beta_2' \cos \Theta - m_3 \gamma_3' \beta_3' \cos \Theta = 0 \\ m_2 \gamma_2' \beta_2' \sin \Theta - m_3 \gamma_3' \beta_3' \sin \Theta = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_2 \gamma_2' + m_3 \gamma_3' = m_1 \\ m_2 \gamma_2' \beta_2' - m_3 \gamma_3' \beta_3' = 0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

$$m_2 \gamma_2' + m_3 \gamma_3' = m_1 \quad (11\alpha)$$

$$m_2 \gamma_2' \beta_2' - m_3 \gamma_3' \beta_3' = 0 \quad (11\beta)$$

Στο σύστημα των εξισώσεων 11α και 11β, με δεδομένη τη μάζα m_1 του Σ1, μπορεί κανείς να διακρίνει τέσσερις άγνωστες ποσότητες: τις m_2 , m_3 , β_2' , β_3' . Μπορώ, επομένως, να θεωρήσω τις δύο ως γνωστές και να υπολογίσω τις τιμές των υπολοίπων σε συνάρτηση με αυτές. Στην προσομοίωση θεωρώ ότι οι τιμές των m_3 , και β_3' είναι γνωστές και ίδιες με τις αντίστοιχες ποσότητες που χαρακτηρίζουν τη μηχανική κατάσταση του σωματιδίου Σ3 στο Νευτώνειο μοντέλο. Οι υπόλοιπες ποσότητες υπολογίζονται συναρτήσει των m_3 , β_3' .

Επισημαίνεται ότι ο στόχος της προσομοίωσης είναι να συγκριθούν οι τροχιές των Σ2, Σ3 ως προς το ΕΑΣ, όπως προβλέπεται από το σχετικιστικό μοντέλο, με τις αντίστοιχες τροχιές που προβλέπει το Νευτώνειο μοντέλο. Για να είναι η σύγκριση δυνατή, η μάζα, η θέση και η ταχύτητα του αρχικού σωματιδίου Σ1, καθώς και η μάζα του Σ3 και η ταχύτητά του ως προς το ΑΣΚΜ έχουν ίδιες τιμές και στα δύο μοντέλα.

Από την επίλυση του συστήματος των 11α και 11β προκύπτει η μάζα και το μέτρο της ταχύτητας του Σ2:

$$\beta'_2 = \frac{m_3 \gamma'_3}{m_1 - m_3 \gamma'_3} \beta'_3 = \beta'_3 \frac{\lambda \gamma'_3}{1 - \lambda \gamma'_3}, \lambda = \frac{m_3}{\text{ορισμ. } m_1} \quad (12\alpha)$$

$$m_2 = m_3 \frac{\gamma'_3 \beta'_3}{\gamma'_2 \beta'_2} = m_1 \frac{1 - \lambda \gamma'_3}{\gamma'_2} \quad (12\beta)$$

Επισημάνσεις: Οι κοσμικές γραμμές των αναδυομένων σωματιδίων Σ2 και Σ3 ως προς το ΑΣΚΜ, στο σχετικιστικό μοντέλο, δίδονται από τις παραμετρικές εξισώσεις 8α, 8β. Η μάζα και η ταχύτητα του Σ3 θεωρούνται δεδομένες. Ωστόσο, οι επιτρεπτές τιμές της μάζα m_3 (οι τιμές του λ) εξαρτώνται από την τιμή του μέτρου της χωρικής ταχύτητας του Σ3. Από τις 12α και 12β συμπεραίνω ότι η διάσπαση είναι δυνατή εφόσον το λ ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\beta'_3 \frac{\lambda \gamma'_3}{1 - \lambda \gamma'_3} < 1 \Rightarrow \lambda < \sqrt{\frac{1 - \beta'_3}{1 + \beta'_3}} \quad (12\gamma)$$

$$\sqrt{1 - \beta_3'^2} > \lambda \quad (12\delta)$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι για κάθε $\beta'_3 > 0$ ισχύει: $\sqrt{1 - \beta_3'^2} > \sqrt{\frac{1 - \beta'_3}{1 + \beta'_3}}$

...οπότε αρκεί το λ να ικανοποιεί την 12γ.

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

1ε. Περιγραφή της κίνησης των Σ2, Σ3 ως προς το ΕΑΣ

Οι παραμετρικές εξισώσεις των κοσμικών γραμμών των Σ2, Σ3 ως προς το ΑΣΚΜ δίδονται από τις σχέσεις 8α, 8β. Ποιες είναι οι αντίστοιχες εξισώσεις ως προς το ΕΑΣ;

Για να βρω τις παραμετρικές εξισώσεις των κοσμικών γραμμών των Σ2 και Σ3 ως προς το ΕΑΣ, χρησιμοποιώ τον μετασχηματισμό Lorentz που συνδέει τα δύο αδρανειακά συστήματα ΕΑΣ και ΑΣΚΜ (παράγραφος 1c, σχέσεις 5α και 5β).

Υπολογισμός των συντεταγμένων του Σ2 ως προς το ΕΑΣ:

$$(ct_2, x_2^1, x_2^2, 0) =$$

$$= [c(\tau' - \tau'_c)(1, \beta'_2 \cos \Theta, \beta'_2 \sin \Theta, 0) + (c\tau'_c, 0, 0, 0)] \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (0, -a, 0, 0) =$$

$$= c(\tau' - \tau'_c)(\cosh \theta - \beta'_2 \cos \Theta \sinh \theta, -\sinh \theta + \beta'_2 \cos \Theta \cosh \theta, \beta'_2 \sin \Theta, 0) +$$

$$+ c\tau'_c(\cosh \theta, -\sinh \theta, 0, 0) + (0, -a, 0, 0) =$$

$$= \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) (1 + \beta_2 \beta_0 \cos \Theta, \beta_0 + \beta_2 \cos \Theta, \beta_2 \sin \Theta \sqrt{1 - \beta_0^2}, 0) + \left(\frac{a}{\beta_0}, 0, 0, 0 \right)$$

$$ct_2 = \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) (1 + \beta_0 \beta'_2 \cos \Theta) + \frac{a}{\beta_0} \quad (13\alpha)$$

$$x_2^1 = \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) (\beta_0 + \beta'_2 \cos \Theta) \quad (13\beta)$$

$$x_2^2 = \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) \beta_2' \sin \Theta \sqrt{1 - \beta_0^2} \quad (13\gamma)$$

$$\dots \text{όπου: } t > t_c = \frac{a}{v_0}$$

Από τις 13α-γ προκύπτουν οι αναλυτικές εκφράσεις των συνιστωσών της χωρικής ταχύτητας του Σ2:

$$v_2^1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2^1}{\Delta t_2} = c \frac{\beta_0 + \beta_2' \cos \Theta}{1 + \beta_0 \beta_2' \cos \Theta} \quad (14\alpha)$$

$$v_2^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_2^2}{\Delta t_2} = c \frac{\beta_2' \sqrt{1 - \beta_0^2} \sin \Theta}{1 + \beta_0 \beta_2' \cos \Theta} \quad (14\beta)$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{v_2^2}{v_2^1} = \frac{\beta_2' \sqrt{1 - \beta_0^2} \sin \Theta}{\beta_0 + \beta_2' \cos \Theta} \quad (14\gamma)$$

Όπου φ_2 συμβολίζει τη γωνία που σχηματίζει η χωρική ταχύτητα του Σ2 με το μοναδιαίο διάνυσμα e_1 του ΕΑΣ.

Ομοίως, βρίσκω τις παραμετρικές εξισώσεις της κοσμικής γραμμής και την χωρική ταχύτητα του Σ3 ως προς το ΕΑΣ:

$$(ct_3, x_3^1, x_3^2, 0) =$$

$$= [c(\tau' - \tau'_c)(1, -\beta_3' \cos \Theta, -\beta_3' \sin \Theta, 0) + (c\tau'_c, 0, 0, 0)] \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (0, -a, 0, 0) =$$

$$= \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) (1 - \beta_0 \beta_3' \cos \Theta, \beta_0 - \beta_3' \cos \Theta, -\beta_3' \sin \Theta \sqrt{1 - \beta_0^2}, 0) + \left(\frac{a}{\beta_0}, 0, 0, 0 \right)$$

$$ct_3 = \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) (1 - \beta_0 \beta_3' \cos \Theta) + \frac{a}{\beta_0} \quad (15\alpha)$$

$$x_3^1 = \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) (\beta_0 - \beta_3' \cos \Theta) \quad (15\beta)$$

$$x_3^2 = - \left(ct - \frac{a}{\beta_0} \right) \beta_3' \sin \Theta \sqrt{1 - \beta_0^2} \quad (15\gamma)$$

$$\dots \text{όπου: } t > t_c = \frac{a}{v_0}$$

Από τις 15α-γ, υπολογίζω τις συνιστώσες της χωρικής ταχύτητας του Σ3 ως προς το ΕΑΣ:

$$v_3^1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_3^1}{\Delta t_3} = c \frac{\beta_0 - \beta_3' \cos \Theta}{1 - \beta_0 \beta_3' \cos \Theta} \quad (16\alpha)$$

$$v_3^2 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x_3^2}{\Delta t_3} = -c \frac{\beta_3' \sqrt{1 - \beta_0^2} \sin \Theta}{1 - \beta_0 \beta_3' \cos \Theta} \quad (16\beta)$$

$$\tan \varphi_3 = \frac{v_3^2}{v_3^1} = - \frac{\beta_3' \sqrt{1 - \beta_0^2} \sin \Theta}{\beta_0 - \beta_3' \cos \Theta} \quad (16\gamma)$$

Όπου φ_3 συμβολίζει τη γωνία που σχηματίζει η χωρική ταχύτητα του Σ3 με το μοναδιαίο διάνυσμα e_1 του ΕΑΣ.

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

2) Διάσπαση σωματιδίου σε δύο διακριτά σωματίδια: το Νευτώνειο μοντέλο

Βασικές έννοιες και σχέσεις

Ορμή σωματιδίου στη Νευτώνεια Μηχανική - Μάζα σωματιδίου - Ενέργεια σωματιδίου - Ολική ορμή συστήματος σωματιδίων - 1ος, 2ος και 3ος νόμος του Newton - Απομονωμένο σύστημα σωματιδίων - Διατήρηση της ορμής απομονωμένου συστήματος σωματιδίων - Διατήρηση της μάζας απομονωμένου συστήματος σωματιδίων

2a. Περιγραφή του συστήματος στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής

Σωματίδιο $\Sigma 1$ μάζας m_1 κινείται πάνω στο Ευκλείδειο επίπεδο $E_2: x^3=0$, κατά μήκος του άξονα Ox^1 του Καρτεσιανού, αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων (O,x) (ΕΑΣ), με σταθερή ταχύτητα μέτρου v_0 (Σχήμα 1). Τη χρονική στιγμή $t=0$ το $\Sigma 1$ βρίσκεται στο σημείο $(-a,0,0)$, $a>0$ του (O,x) . Τη στιγμή $t_c=a/v_0$, που το $\Sigma 1$ διέρχεται από την αρχή O του (O,x) , το $\Sigma 1$ διασπάται σε δύο σωματίδια $\Sigma 2$ και $\Sigma 3$, μαζών m_2, m_3 , που κινούνται με ταχύτητες:

$$\vec{v}_2 = \hat{x}_1 v_2^1 + \hat{x}_2 v_2^2, \quad \vec{v}_3 = \hat{x}_1 v_3^1 + \hat{x}_2 v_3^2$$

$\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ συμβολίζουν τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των ορθογωνίων αξόνων Ox^1, Ox^2, Ox^3 του (O,x) .

Για $t>t_c$ μελετώ την κίνηση των $\Sigma 2$ και $\Sigma 3$ ως προς το αδρανειακό σύστημα κέντρου μάζας τους (ΑΣΚΜ). Βρίσκω το μετασχηματισμό του **Galileo** που συνδέει το ΕΑΣ με το ΑΣΚΜ και βρίσκω την παραμετρική εξίσωση της τροχιάς του $\Sigma 2$, και του $\Sigma 3$ ως προς το ΕΑΣ.

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

2b. Περιγραφή της κίνησης του $\Sigma 1$ ως προς το ΕΑΣ

Στο Νευτώνειο μοντέλο, η τροχιά του $\Sigma 1$ στο επίπεδο $E_2 = (O, \hat{x}_1, \hat{x}_2)$ του (O,x) περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x_1^1(t) = -a + v_0 t, \quad x_1^2(t) = 0, \quad \text{για } t < \frac{a}{v_0} = t_c \quad (17)$$

...και η ορμή του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 = \hat{x}_1 m_1 v_0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1^1 = m_1 v_0 \\ p_1^2 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Η ελεύθερη παράμετρος t είναι η ένδειξη ενός χρονομέτρου προσαρμοσμένου στο αδρανειακό σύστημα (O,x) . Στη Νευτώνεια Μηχανική ο χρόνος διατηρείται αναλλοίωτος κάτω από οποιονδήποτε μετασχηματισμό των χωρικών συντεταγμένων: δύο ίδια χρονόμετρα, προσαρμοσμένα σε δύο διαφορετικά συστήματα αναφοράς είναι πάντοτε δυνατό να συγχρονιστούν και οι ενδείξεις τους να είναι ταυτόσημες^(1,6).

Ο Νευτώνειος χρόνος t μπορεί να ταυτιστεί με τον παγκόσμιο χρόνο t του ΕΑΣ στο σχετικιστικό μοντέλο. Αυτό είναι δυνατό, δεδομένου ότι ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς ενός χώρου Minkowski M , μπορούμε πάντοτε να συγχρονίσουμε όλα τα (ίδια) χρονόμετρα που είναι τοποθετημένα στα χωρικά σημεία του M , με το χρονόμετρο που τοποθετούμε στην αρχή του^(3,6).

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

2c. Σύνδεση του ΕΑΣ και του ΑΣΚΜ στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής

Στη Νευτώνεια Μηχανική, ως αδρανειακό σύστημα κέντρου μάζας (ΑΣΚΜ) ενός συνόλου απομονωμένων σωματιδίων⁽¹⁾ ορίζεται κάθε σύστημα συντεταγμένων (O',x') ως προς το οποίο η ολική ορμή των σωματιδίων είναι ίση με το μηδέν. Στην περίπτωση που η αρχή O' του ΑΣΚΜ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sum_q \vec{O'X}'_{(q)} = 0$$

(η άθροιση γίνεται ως προς το δείκτη q που προσδιορίζει κάθε διακριτό σωματίδιο)

...τότε, το O' ορίζεται ως το κέντρο μάζας των σωματιδίων.

Για την περίπτωση του σωματιδίου Σ1, το ΑΣΚΜ ταυτίζεται με το αδρανειακό σύστημα (Ο',x') ως προς το οποίο το Σ1 παραμένει ακίνητο στην αρχή Ο' του συστήματος. Οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς του Σ1 ως προς το ΑΣΚΜ γράφονται:

$$x_1^j(t) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (19)$$

Πώς σχετίζεται το ΕΑΣ με το ΑΣΚΜ του σωματιδίου Σ1;

Το ΕΑΣ και το ΑΣΚΜ συνδέονται με ένα μετασχηματισμό του Galileo⁽¹⁾. Δεδομένου ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ το Σ1 βρίσκεται στο σημείο του επιπέδου E_2 με Καρτεσιανές συντεταγμένες $(-a, 0)$ και κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_1 = \hat{x}_1 v_0$ όπου $v_0 > 0$, ο μετασχηματισμός που συσχετίζει τις συντεταγμένες τυχαίου σημείου X του E_2 ως προς τα συστήματα (Ο,x) και (Ο',x') προσδιορίζεται από τις εξισώσεις:

$$x'^1 = x^1 + a - v_0 t \quad (20\alpha)$$

$$x'^2 = x^2 \quad (20\beta)$$

Έστω σωματίδιο Σ του οποίου η τροχιά ως προς το σύστημα συντεταγμένων (Ο,x) καθορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x^j = x_\Sigma^j(t), \quad j = 1, 2$$

Ποιες είναι οι παραμετρικές εξισώσεις $x'^j = x_\Sigma^j(t)$ που προσδιορίζουν την τροχιά του Σ ως προς το (Ο',x');

Σύμφωνα με τις 20α, 20β, κάθε χρονική στιγμή οι συντεταγμένες του Σ ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$x_\Sigma^1(t) = x'^1(t) + a - v_0 t \quad (21\alpha)$$

$$x_\Sigma^2(t) = x'^2(t) \quad (21\beta)$$

...από τις οποίες συνεπάγεται ότι οι συνιστώσες της ταχύτητας του Σ ως προς τα δύο αδρανειακά συστήματα ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$v_\Sigma^1(t) = v'^1(t) - v_0 \quad (21\gamma)$$

$$v_\Sigma^2(t) = v'^2(t) \quad (21\delta)$$

Η εφαρμογή των σχέσεων 21α-δ για την περίπτωση του σωματιδίου Σ1, πριν αυτό διασπαστεί, δίδει τα (αναμενόμενα) αποτελέσματα:

$$x_1^1(t) = 0, \quad x_2^2(t) = 0, \quad v_2^1 = 0, \quad v_2^2 = 0$$

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

2d. Περιγραφή της διάσπασης του Σ1 ως προς το ΑΣΚΜ - Οι τροχιές των αναδυομένων σωματιδίων ως προς το ΑΣΚΜ

Η διάσπαση του σωματιδίου Σ1 συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t_c = a/v_0$. Τη στιγμή αυτή αναδύονται δύο σωματίδια Σ2 και Σ3 μαζών m_2, m_3 , αντίστοιχα. Συμβολίζω με \vec{v}'_2, \vec{v}'_3 τις ταχύτητες των Σ2, Σ3 ως προς το ΑΣΚΜ. Στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής, κατά τη διάσπαση ισχύουν δύο αρχές διατήρησης⁽¹⁾: α) της μάζας και β) της ορμής του συστήματος:

$$m_2 + m_3 = m_1 \quad (22)$$

$$m_2 \vec{v}'_2 + m_3 \vec{v}'_3 = 0 \quad (23)$$

Από τη σχέση 23 και το σχήμα 1 έπεται ότι για $t > t_c$, οι ταχύτητες των Σ2 και Σ3 ως προς το ΑΣΚΜ, προσδιορίζονται από τις αναλυτικές εκφράσεις:

$$\vec{v}'_2 = \hat{x}_1 v'_2 \cos \theta + \hat{x}_2 v'_2 \sin \theta, \quad \vec{v}'_3 = -\hat{x}_1 v'_3 \cos \theta - \hat{x}_2 v'_3 \sin \theta$$

Τα μέτρα v'_2, v'_3 των \vec{v}'_2, \vec{v}'_3 ικανοποιούν τη συνθήκη:

$$m_1 v'_1 = m_2 v'_2 \quad (24)$$

Η παράμετρος θ , όπως και στο σχετικιστικό μοντέλο, συναρτάται με το μηχανισμό της διάσπασης. Θεωρώ ότι και στα δύο μοντέλα έχει την ίδια τιμή. Στην προσομοίωση, η τιμή της θ επιλέγεται από το χρήστη.

Οι εξισώσεις 22 και 24 εμπλέκουν τέσσερις άγνωστες μεταβλητές: τις μάζες m_2 , m_3 , και τα μέτρα v'_2 , v'_3 των ταχυτήτων των Σ2 και Σ3 μετά τη διάσπαση του Σ1. Εφόσον ο στόχος μας είναι η σύγκριση του σχετικιστικού με το Νευτώνειο μοντέλο, θα θεωρήσω και εδώ δεδομένα τη μάζα m_3 και το μέτρο v'_3 της ταχύτητας του Σ3, με τις τιμές τους ταυτόσημες με τις αντίστοιχες τιμές στο σχετικιστικό μοντέλο (παράγραφος 1d). Από τις 22 και 24 προκύπτουν οι τιμές των m_2 και v'_2 :

$$m_2 = m_1 - m_3 \quad (25\alpha)$$

$$v'_2 = \frac{m_3}{m_1 - m_3} v'_3 \quad (25\beta)$$

Οι τροχιές των Σ2, Σ3 ως προς το ΑΣΚΜ προσδιορίζονται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} x_2'^1(t) &= \left(t - \frac{a}{v_0}\right) v_2'^1 = \frac{m_3}{m_1 - m_3} v_3' \left(t - \frac{a}{v_0}\right) \cos \Theta \\ x_2'^2(t) &= \left(t - \frac{a}{v_0}\right) v_2'^2 = \frac{m_3}{m_1 - m_3} v_3' \left(t - \frac{a}{v_0}\right) \sin \Theta \end{aligned} \right\} \quad (26\alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} x_3'^1(t) &= \left(t - \frac{a}{v_0}\right) v_3'^1 = -v_3' \left(t - \frac{a}{v_0}\right) \cos \Theta \\ x_3'^2(t) &= \left(t - \frac{a}{v_0}\right) v_3'^2 = -v_3' \left(t - \frac{a}{v_0}\right) \sin \Theta \end{aligned} \right\} \quad (26\beta)$$

$$\dots \text{όπου: } t > t_c = \frac{a}{v_0}$$

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

2ε. Περιγραφή της κίνησης των Σ1, Σ2 ως προς το ΕΑΣ

Οι εξισώσεις 26α και 26β καθορίζουν τις τροχιές των σωματιδίων που προκύπτουν από τη διάσπαση του Σ1, ως προς το ΑΣΚΜ. Ποιες είναι οι αντίστοιχες εξισώσεις ως προς το ΕΑΣ;

Για να βρω τις παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς του Σ2 και του Σ3 ως προς το ΕΑΣ, εφαρμόζω τον μετασχηματισμό Galileo που συνδέει τα δύο αδρανειακά συστήματα ΑΣΚΜ και ΕΑΣ (παράγραφος 2c). Από τις 21 και 26α, 26β, προκύπτουν οι ακόλουθες παραμετρικές εξισώσεις:

Για την τροχιά του Σ2:

$$x_2^1(t) = \frac{\lambda}{1 - \lambda} v_3' \left(t - \frac{a}{v_0}\right) \cos \Theta + v_0 t - a \quad (27\alpha)$$

$$x_2^2(t) = \frac{\lambda}{1 - \lambda} v_3' \left(t - \frac{a}{v_0}\right) \sin \Theta \quad (27\beta)$$

$$\text{Όπου: } \lambda = \frac{m_3}{m_1} \text{ και } t \geq t_c = \frac{a}{v_0}$$

$$v_2^1 = v_3' \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cos \Theta + v_0 \quad (28\alpha)$$

$$v_2^2 = v_3' \frac{\lambda}{1 - \lambda} \sin \Theta \quad (28\beta)$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{v_2^2}{v_2^1} = \frac{\frac{\lambda}{1 - \lambda} v_3' \sin \Theta}{\frac{\lambda}{1 - \lambda} v_3' \cos \Theta + v_0} \quad (28\gamma)$$

Όπου φ_2 είναι η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του Σ2 με το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{x}_1

...και για την τροχιά του Σ3:

$$x_3^1(t) = -v_3' \left(t - \frac{a}{v_0}\right) \cos \Theta + v_0 t - a \quad (29\alpha)$$

$$x_3^2(t) = -v_3' \left(t - \frac{a}{v_0} \right) \sin \Theta \quad (29\beta)$$

$$v_3^1 = -v_3' \cos \Theta + v_0 \quad (30\alpha)$$

$$v_3^2 = -v_3' \sin \Theta \quad (30\beta)$$

$$\tan \varphi_3 = \frac{v_3^2}{v_3^1} = -\frac{v_3' \sin \Theta}{-v_3' \cos \Theta + v_0} \quad (30\gamma)$$

Όπου φ_3 είναι η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του Σ3 με το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{x}_1

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

3) Περιγραφή της προσομοίωσης

- 1) Προσομοιώνεται το φαινόμενο της διάσπασης σωματιδίου Σ1 σε δύο διακριτά σωματίδια Σ2 και Σ3, σύμφωνα με δύο μοντέλα: α) ένα σχετικιστικό και β) ένα Νευτώνειο.
- 2) Η προσομοίωση εξελίσσεται σε τέσσερα παράθυρα Π1, Π2, Π3 και Π4. Στα Π1, Π2 προσομοιώνεται το φαινόμενο σύμφωνα με το σχετικιστικό μοντέλο, και στα Π3, Π4 σύμφωνα με το Νευτώνειο μοντέλο. Στα Π1 και Π4, η περιγραφή γίνεται ως προς το Εργαστηριακό Αδρανειακό Σύστημα συντεταγμένων (ΕΑΣ), ενώ στα Π2 και Π3 ως προς το Αδρανειακό Σύστημα Κέντρου Μάζας (ΑΣΚΜ) των σωματιδίων. Στο εικονικό περιβάλλον ο χρήστης θα βρει τα ακόλουθα εργαλεία ελέγχου: α) εργαλείο επιλογής της αρχικής ταχύτητας του Σ1, β) εργαλείο επιλογής του λόγου $\lambda = m_3/m_1$, γ) εργαλείο επιλογής της ταχύτητας του Σ3 ως προς το ΑΣΚΜ αμέσως μετά τη διάσπαση δ) εργαλείο επιλογής της γωνίας Θ που σχηματίζει ο άξονας επί του οποίου κινούνται τα Σ2 και Σ3 με τον άξονα Ox^1 του ΑΣΚΜ, αμέσως μετά τη διάσπαση, ε) κουμπιά ελέγχου της προσομοίωσης. Η αρχική θέση και ταχύτητα του σωματιδίου Σ1, η παράμετρος Θ , η μάζα και η ταχύτητα του Σ3 έχουν τις ίδιες τιμές και στα δύο μοντέλα.
- 3) Στα παράθυρα της προσομοίωσης έχουν προσαρτηθεί κάποια εργαλεία μέτρησης (χρονόμετρα, γωνιόμετρα, εργαλεία μέτρησης μαζών και ταχυτήτων των σωματιδίων κ.λπ.). Αυτά τα εργαλεία μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον χρήστη στη διεκπεραίωση δραστηριοτήτων και ασκήσεων.

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

Ένθετο 1: Δυνάμεις Minkowski κατά την εντοπισμένη στο χωρόχρονο αλληλεπίδραση δύο σωματιδίων - Η διατήρηση της τετρα-ορμής, της χωρικής ορμής και της ενέργειας του συστήματος

Θεωρώ δύο σωματίδια Σ_1 και Σ_2 που αλληλεπιδρούν σε μια απειροστή χωροχρονική περιοχή του χώρου Minkowski M : η αλληλεπίδραση των Σ_1, Σ_2 είναι "εντοπισμένη" σε μια απειροστή περιοχή του χωροχρονικού συνεχούς.

Τα Σ_1 και Σ_2 αλληλεπιδρούν με δυνάμεις Minkowski^(2,3). Οι δυνάμεις Minkowski είναι τετρα-διανύσματα του M . Συμβολίζω με K_{12} τη δύναμη Minkowski που ασκείται στο Σ_1 από το Σ_2 , και με K_{21} τη δύναμη Minkowski που ασκείται στο Σ_2 από το Σ_1 .

Έστω (O, x) το εργαστηριακό αδρανειακό και Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (ΕΑΣ). Οι κοσμικές γραμμές των Σ_1, Σ_2 ως προς το (O, x) , προσδιορίζονται από τις παραμετρικές εξισώσεις:

$$x_1(t) = (ct, x_1^1(t), x_1^2(t), x_1^3(t)), x_2(t) = (ct, x_2^1(t), x_2^2(t), x_2^3(t)) \quad (E1.1)$$

...όπου t είναι ο παγκόσμιος χρόνος ως προς το (O, x) .

Το στοιχειώδες διάστημα επί της κοσμικής γραμμής κάθε σωματιδίου και ο αντίστοιχος ιδιόχρονος υπολογίζονται, από τις σχέσεις:

$$\Delta s_1 = c\Delta\tau_1 = \frac{c}{\gamma(v_1)}\Delta t, \Delta s_2 = c\Delta\tau_2 = \frac{c}{\gamma(v_2)}\Delta t$$

$$v_1 = \sqrt{\left(\frac{dx_1^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_1^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_1^3}{dt}\right)^2}, v_2 = \sqrt{\left(\frac{dx_2^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2^3}{dt}\right)^2}, \gamma(v) \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Οι κοσμικές γραμμές των Σ_1, Σ_2 ως προς το ΕΑΣ προκύπτουν από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης^(2,3,6):

$$\frac{dP_{(1)}^\mu}{d\tau_1} = K_{12}^\mu, \frac{dP_{(2)}^\mu}{d\tau_2} = K_{21}^\mu \quad (E1.2)$$

...όπου:

$$P_{(1)} = m_1 U_{(1)} = e_\mu m_1 \frac{dx_1^\mu}{d\tau_1} = e_\mu m_1 \gamma(v_1) \frac{dx_1^\mu}{dt} \Rightarrow$$

$$\{P_{(1)}^0 = m_1 c \gamma(v_1), P_{(1)}^1 = m_1 \gamma(v_1) v_1^1, P_{(1)}^2 = m_1 \gamma(v_1) v_1^2, P_{(1)}^3 = m_1 \gamma(v_1) v_1^3\}$$

$$P_{(2)} = m_2 U_{(2)} = e_\mu m_2 \frac{dx_2^\mu}{d\tau_2} = e_\mu m_2 \gamma(v_2) \frac{dx_2^\mu}{dt} \Rightarrow$$

$$\{P_{(2)}^0 = m_2 c \gamma(v_2), P_{(2)}^1 = m_2 \gamma(v_2) v_2^1, P_{(2)}^2 = m_2 \gamma(v_2) v_2^2, P_{(2)}^3 = m_2 \gamma(v_2) v_2^3\}$$

Οι E1.2 γράφονται:

$$\frac{d}{dt}(m_1 c \gamma(v_1)) = \frac{1}{\gamma(v_1)} K_{12}^0, \frac{d}{dt}(m_1 \gamma(v_1) v_1^j) = \frac{1}{\gamma(v_1)} K_{12}^j, j = 1, 2, 3 \quad (E1.2a)$$

$$\frac{d}{dt}(m_2 c \gamma(v_2)) = \frac{1}{\gamma(v_2)} K_{21}^0, \frac{d}{dt}(m_2 \gamma(v_2) v_2^j) = \frac{1}{\gamma(v_2)} K_{21}^j, j = 1, 2, 3 \quad (E1.2\beta)$$

Δεδομένου ότι το ΕΑΣ είναι αδρανειακό και Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων⁽³⁾, μπορεί κανείς να δείξει ότι αληθεύουν οι σχέσεις^(2,3,6):

$$\{\langle P_{(1)}, P_{(1)} \rangle = c^2 m_1^2, \langle P_{(2)}, P_{(2)} \rangle = c^2 m_2^2\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \left\langle P_{(1)}, \frac{dP_{(1)}}{dt} \right\rangle = 0, \left\langle P_{(2)}, \frac{dP_{(2)}}{dt} \right\rangle = 0 \Rightarrow \{\langle P_{(1)}, K_{12} \rangle = 0, \langle P_{(2)}, K_{21} \rangle = 0\} \Rightarrow$$

$$cK_{12}^0 - v_1^1 K_{12}^1 - v_1^2 K_{12}^2 - v_1^3 K_{12}^3 = 0, cK_{21}^0 - v_2^1 K_{21}^1 - v_2^2 K_{21}^2 - v_2^3 K_{21}^3 = 0 \quad (E1.3)$$

Οι συνιστώσες της ολικής χωρικής ορμής του συστήματος¹ των δύο σωματιδίων ικανοποιούν τις σχέσεις ($j=1,2,3$):

$$\frac{d}{dt}(P_{(1)}^j + P_{(2)}^j) = \frac{1}{Y_1} K_{12}^j(t) + \frac{1}{Y_2} K_{21}^j(t), \quad Y_1 \equiv \gamma(v_1), \quad Y_2 \equiv \gamma(v_2) \quad (E1.4)$$

Η αλληλεπίδραση των $\Sigma 1, \Sigma 2$ συμβαίνει σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ γύρω από τη χρονική στιγμή t_0 . Στο μη σχετικιστικό όριο, οι ποσότητες $\frac{1}{Y_1} K_{12}^j(t), \frac{1}{Y_2} K_{21}^j(t)$ συγκλίνουν στις Νευτωνικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των $\Sigma 1, \Sigma 2$ που ικανοποιούν τον 3ο νόμο του Newton. Επομένως, τουλάχιστον για μικρές τιμές των ταχυτήτων σε σχέση με το c , ισχύει:

$$K_{12}^j(t) = -K_{21}^j(t) \quad (E1.5)$$

Στο παρόν σχετικιστικό μοντέλο της αλληλεπίδρασης σωματιδίων, υποθέτω ότι οι χωρικές συνιστώσες των δυνάμεων αλληλεπίδρασης έχουν τη μορφή κατανομής δέλτα:

$$K_{12}^j(t) = \bar{K}_{12}^j \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2\varepsilon} (\theta(t - t_0 + \varepsilon) - \theta(t - t_0 - \varepsilon)) \right] \quad (E1.5a)$$

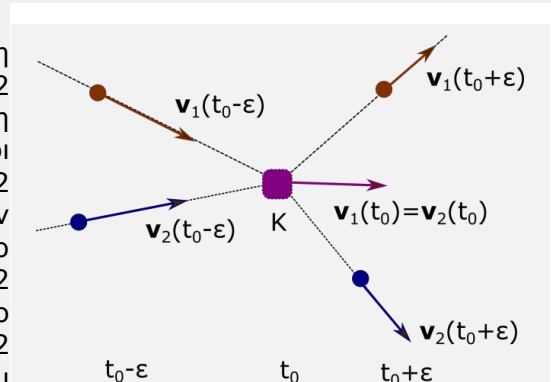
$$K_{21}^j(t) = \bar{K}_{21}^j \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2\varepsilon} (\theta(t - t_0 + \varepsilon) - \theta(t - t_0 - \varepsilon)) \right] \quad (E1.5\beta)$$

...όπου $\theta(t-t')$ η συνάρτηση βαθμίδας (step-function) και $\bar{K}_{12}^j, \bar{K}_{21}^j$ σταθερές.

Από τις E1.5, E1.5a και E1.5β συνεπάγεται ότι $\bar{K}_{12}^j + \bar{K}_{21}^j = 0$ και, επομένως, η E1.5 ισχύει για κάθε τιμή του μέτρου των ταχυτήτων στο διάστημα $[0, c)$:

$$K_{12}^j + K_{21}^j = 0 \quad (E1.6)$$

Στην περίπτωση της διάσπασης ενός σωματιδίου τη χρονική στιγμή t_0 , οι ταχύτητες των σωματιδίων $\Sigma 1, \Sigma 2$ που δημιουργούνται μεταβάλλονται ασυνεχώς: τη στιγμή $t_0 - \varepsilon$, ως μέρη του αρχικού σωματιδίου, οι ταχύτητές τους είναι ίσες. Τη στιγμή $t_0 + \varepsilon$ τα $\Sigma 1, \Sigma 2$ έχουν αλληλεπιδράσει, έχουν αποσπαστεί και έχουν αποκτήσει διαφορετικές τιμές ταχύτητας. Ομοίως, στο φαινόμενο της κρούσης (Σχήμα E1.a), τα $\Sigma 1, \Sigma 2$ κινούνται προς το κέντρο μάζας τους K . Σύμφωνα με το σχετικιστικό μοντέλο της κρούσης, τα $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$ συσσωματώνονται σε μια απειροστή περιοχή του K , και στη συνέχεια αναδύονται με διαφορετικές ταχύτητες. Τη στιγμή t_0 της συσσωμάτωσης θεωρείται ότι έχει δημιουργηθεί ένα νέο σωματίδιο Σ που περιλαμβάνει τα $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$. Επομένως, τη στιγμή αυτή τα $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$ έχουν κοινή τιμή ταχύτητας, ίση με την ταχύτητα του συσσωματώματος Σ .



Σχήμα E1.a: Το σχετικιστικό μοντέλο της κρούσης

Ώστε, σύμφωνα με το σχετικιστικό μοντέλο της κρούσης ή της διάσπασης σωματιδίων, υπάρχει χρονική στιγμή t_0 κατά τη διάρκεια της αλληλεπίδρασης, κατά την οποία τα $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$ έχουν ίσες χωρικές ταχύτητες.

Κάτω από αυτήν την υπόθεση, αληθεύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$v_1^j|_{t=t_0} = v_2^j|_{t=t_0} \Rightarrow \gamma(v_1)|_{t=t_0} = \gamma(v_2)|_{t=t_0} \Rightarrow$$

¹ Η άθροιση δύο διανυσμάτων που βρίσκονται σε διαφορετικούς επαπτόμενους χώρους του χωροχρονικού συνεχούς M είναι δυνατή εφόσον το ένα εξ αυτών μεταφερθεί παράλληλα προς εαυτώ, μέσω κατάλληλης συνοχής που έχουμε ορίσει στο $M^{(3,5,6)}$. Ωστόσο, στην περίπτωση του χώρου Minkowski, και για αδρανειακό και Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, η παράλληλη μετατόπιση διανύσματος διατηρεί τις συνιστώσες του αναλλοίωτες, όπως συμβαίνει στην Ευκλείδεια γεωμετρία⁽³⁾.

$$\Delta(m_1\gamma(v_1)v_1^j + m_2\gamma(v_2)v_2^j) = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} dt \left(\frac{1}{\gamma(v_1)}K_{12}^j + \frac{1}{\gamma(v_2)}K_{21}^j \right) = \bar{K}_{12}^j \left(\frac{1}{\gamma(v_1)} - \frac{1}{\gamma(v_2)} \right) \Big|_{t=t_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta(m_1\gamma(v_1)v_1^j + m_2\gamma(v_2)v_2^j) = 0 \quad (\text{E1.7})$$

Από την Ε1.7 συμπεραίνω ότι οι τιμές της ολικής χωρικής ορμής του συστήματος πριν και μετά την αλληλεπίδραση είναι ίσες. Το ίδιο συμβαίνει και για την ολική ενέργεια του συστήματος:

$$\{\text{E1.2α, E1.2β, E1.3}\} \Rightarrow \frac{d}{dt}(m_1c\gamma(v_1) + m_2c\gamma(v_2)) = \frac{1}{\gamma(v_1)}K_{12}^0 + \frac{1}{\gamma(v_2)}K_{21}^0 =$$

$$= \frac{1}{c\gamma(v_1)}(v_1^1K_{12}^1 + v_1^2K_{12}^2 + v_1^3K_{12}^3) + \frac{1}{c\gamma(v_2)}(v_2^1K_{21}^1 + v_2^2K_{21}^2 + v_2^3K_{21}^3) \Rightarrow$$

$$\Delta(m_1c\gamma(v_1) + m_2c\gamma(v_2)) =$$

$$= \frac{1}{c\gamma(v_1)}(v_1^1\bar{K}_{12}^1 + v_1^2\bar{K}_{12}^2 + v_1^3\bar{K}_{12}^3) \Big|_{t=t_0} + \frac{1}{c\gamma(v_2)}(v_2^1\bar{K}_{21}^1 + v_2^2\bar{K}_{21}^2 + v_2^3\bar{K}_{21}^3) \Big|_{t=t_0} = 0 \quad (\text{E1.8})$$

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

Δραστηριότητες

Επισημάνσεις

(Στο περιβάλλον της προσομοίωσης, οι ονομασίες των σωματιδίων είναι διαφορετικές: το Σ1 ονομάζεται P, το Σ2 ονομάζεται P1 και το Σ3 P2)

1. Δίδεται ότι η αρχική θέση του σωματιδίου Σ1 ως προς το εργαστηριακό σύστημα αναφοράς (ΕΑΣ) είναι $(a,0,0)$, όπου $a=1\text{lu}$ (length unit). Η μάζα του Σ1 είναι $m=1m_u$ (mass unit).
2. Η ταχύτητα του φωτός είναι $c=1\text{velu}$ (velocity unit).
3. Η ακτίνα της κυκλικής οθόνης, όπου προσκρούουν τα σωματίδια μετά τη διάσπαση είναι ίση με $1.05*a$.
4. Τα χρονόμετρα έχουν κοινή αρχή και είναι αγκιστρωμένα στην αρχή του αντίστοιχου αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Οι ενδείξεις των χρονομέτρων του ΕΑΣ και ΑΣΚΜ στα παράθυρα 1 και 2, όπου το σύστημα προσομοιώνεται σύμφωνα με το σχετικιστικό μοντέλο, είναι σύμφωνες με τις προβλέψεις της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Τα χρονόμετρα του ΕΑΣ στο σχετικιστικό και στο Νευτώνειο μοντέλο είναι συγχρονισμένα (βλέπε παράγραφο 2b)⁽³⁾. Στα παράθυρα 3 και 4 τα χρονόμετρα λειτουργούν σύμφωνα με τους νόμους της Νευτώνειας Μηχανικής.
5. Οι δώδεκα μετρητές στο κάτω μέρος του εικονικού περιβάλλοντος δείχνουν σε πραγματικό χρόνο και σύμφωνα με τις προβλέψεις των δύο μοντέλων: τις μάζες, και τα μέτρα των ταχυτήτων ως προς το ΑΣΚΜ και ως προς το ΕΑΣ, των αναδυομένων σωματιδίων.

Α. Μέτρησε το μέτρο της ταχύτητας του Σ2 ως προς το ΕΑΣ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x, για καθένα από τους ακόλουθους συνδυασμούς παραμέτρων, σύμφωνα με τις προβλέψεις του σχετικιστικού και του Νευτώνειου μοντέλου. Σε κάθε περίπτωση έλεγξε τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν από το εικονικό περιβάλλον, κάνοντας τους σχετικούς υπολογισμούς:

- a. $v_0 = 0.99, v'_3 = 0.5, \text{lamda} = 0.5, \text{theta} = 60\text{Deg}$
- b. $v_0 = 0.50, v'_3 = 0.5, \text{lamda} = 0.5, \text{theta} = 60\text{Deg}$
- c. $v_0 = 0.80, v'_3 = 0.7, \text{lamda} = 0.5, \text{theta} = 60\text{Deg}$
- d. $v_0 = 0.50, v'_3 = 0.99, \text{lamda} = 0.07, \text{theta} = 60\text{Deg}$
- e. $v_0 = 0.50, v'_3 = 0.99, \text{lamda} = 0.09, \text{theta} = 60\text{Deg}$
- f. $v_0 = 0.50, v'_3 = 0.99, \text{lamda} = 0.07, \text{theta} = -60\text{Deg}$
- g. $v_0 = 0.50, v'_3 = 0.5, \text{lamda} = 0.07, \text{theta} = 120\text{Deg}$
- h. $v_0 = 0.99, v'_3 = 0.5, \text{lamda} = 0.5, \text{theta} = 120\text{Deg}$
- i. $v_0 = 0.99, v'_3 = 0.99, \text{lamda} = 0.07, \text{theta} = 120\text{Deg}$

Σε ποιες περιπτώσεις τα αποτελέσματα των εικονικών πειραμάτων δείχνουν ότι οι προβλέψεις των δύο μοντέλων προσεγγίζουν περισσότερο μεταξύ τους και σε ποιες οι αποκλίσεις τους είναι μεγαλύτερες; Εξήγησε.

Β. Δείξε ότι σύμφωνα με το σχετικιστικό μοντέλο, η διάσπαση του Σ1 σε δύο σωματίδια εκ των οποίων το ένα έχει μάζα ίση με $0.8m_1$ και ταχύτητα μέτρου $0.4c$ ως προς το ΑΣΚΜ, είναι αδύνατη. Υπάρχει κάποιος ανάλογος περιορισμός στο πλαίσιο του Νευτώνειου μοντέλου; Εξήγησε.

Γ. Για τις περιπτώσεις a και d της δραστηριότητας Α έλεγξε κατά πόσον διατηρείται η ολική χωρική ορμή του συστήματος, τόσο στο πλαίσιο του σχετικιστικού μοντέλου όσο και στο πλαίσιο του Νευτώνειου: α) ως προς το ΕΑΣ, β) ως προς το ΑΣΚΜ.

Δ. Για το συνδυασμό παραμέτρων:

$$v_0 = 0.8, v'_3 = 0.7, \text{lamda} = 0.4, \text{theta} = 60\text{Deg}$$

υπολόγισε:

- α) τη χρονική στιγμή που συμβαίνει η διάσπαση ως προς το ΕΑΣ και ως προς το ΑΣΚΜ, σύμφωνα με το σχετικιστικό μοντέλο.
- β) τη χρονική στιγμή που συμβαίνει η διάσπαση ως προς το ΕΑΣ και ως προς το ΑΣΚΜ, σύμφωνα με το Νευτώνειο μοντέλο.
- γ) τη χρονική στιγμή που το Σ2 φτάνει στην κυκλική οθόνη και τη χρονική στιγμή που το Σ3 φτάνει στην κυκλική οθόνη, σύμφωνα με το σχετικιστικό μοντέλο: γ1) ως προς το ΕΑΣ (χρονικές στιγμές t_2, t_3 αντίστοιχα), γ2) ως προς το ΑΣΚΜ (χρονικές στιγμές t'_2 και t'_3 , αντίστοιχα).
- δ) τη χρονική στιγμή που το Σ2 φτάνει στην κυκλική οθόνη και τη χρονική στιγμή που το Σ3 φτάνει στην κυκλική οθόνη, σύμφωνα με το Νευτώνειο μοντέλο: δ1) ως προς το ΕΑΣ (χρονικές στιγμές t_{N2} και t_{N3} , αντίστοιχα), δ2) ως προς το ΑΣΚΜ (χρονικές στιγμές t'_{N2} και t'_{N3} , αντίστοιχα).
Αιτιολόγησε τα αποτελέσματα των εικονικών μετρήσεων, στο πλαίσιο κάθε θεωρητικού μοντέλου.

Ε. Έλεγξε αν για μικρές ταχύτητες των σωματιδίων σε σύγκριση με το c οι προβλέψεις του σχετικιστικού και του Νευτώνειου μοντέλου συγκλίνουν. Τρέξε την προσομοίωση για τουλάχιστον τρία παραδείγματα που επιβεβαιώνουν τη σύγκλιση αυτή.

Ζ. Για $v_0=0.9$, $\theta=60$ Degrees και $v'_3=0.9$, υπολόγισε τις τιμές που μπορεί να πάρει το λ , ώστε η διάσπαση του Σ1, σύμφωνα με το σχετικιστικό μοντέλο να είναι δυνατή. Θέσε στο λ την μέγιστη επιτρεπτή δεκαδική τιμή με δύο δεκαδικά ψηφία, και τρέξε την προσομοίωση. Στο εικονικό περιβάλλον, κατάγραψε τις πειραματικές τιμές της μάζας και της ταχύτητας του Σ2 ως προς το ΑΣΚΜ και το ΕΑΣ, σύμφωνα με το σχετικιστικό και το Νευτώνειο μοντέλο. Επιβεβαίωσε τις εικονικές μετρήσεις διεξάγοντας κατάλληλους υπολογισμούς στο πλαίσιο κάθε μοντέλου.

Επιστροφή στα "Περιεχόμενα"

Αναφορές

1. Classical Mechanics: Goldstein, Poole & Safko, Addison Wesley, 3d edition.
2. Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles: A.O.Barut, Dover edition 1980.
3. Σημειώσεις πάνω στις Μαθηματικές Αρχές της Σχετικιστικής Μηχανικής: Κ. Παπαμιχάλης 2023 ISBN: 978-618-84204-1-0
[http://users.sch.gr/kostaspapamichalis/PhysicsProblems/RelativisticMechanics/SRelativit yMechanicsKPM_gr\(1\).pdf](http://users.sch.gr/kostaspapamichalis/PhysicsProblems/RelativisticMechanics/SRelativit yMechanicsKPM_gr(1).pdf)
4. An Elementary Introduction to the Riemannian Geometry of Surfaces: K. G. Papamichalis, ISBN 978-960-93-9555-7
[https://www.amazon.co.uk/dp/1973170264/ref=pe_3187911_185740111_TE_item image](https://www.amazon.co.uk/dp/1973170264/ref=pe_3187911_185740111_TE_item_image)
[Differential Geometry \(sch.gr\)](http://users.sch.gr/kostaspapamichalis/DifferentialGeometry(sch.gr))
5. Physical Mathematics: Kevin Cahill, Cambridge University Press 2013
6. The Classical Theory of Fields: L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Pergamon Press third revised English edition

©06/2023 konstantinos papamichalis