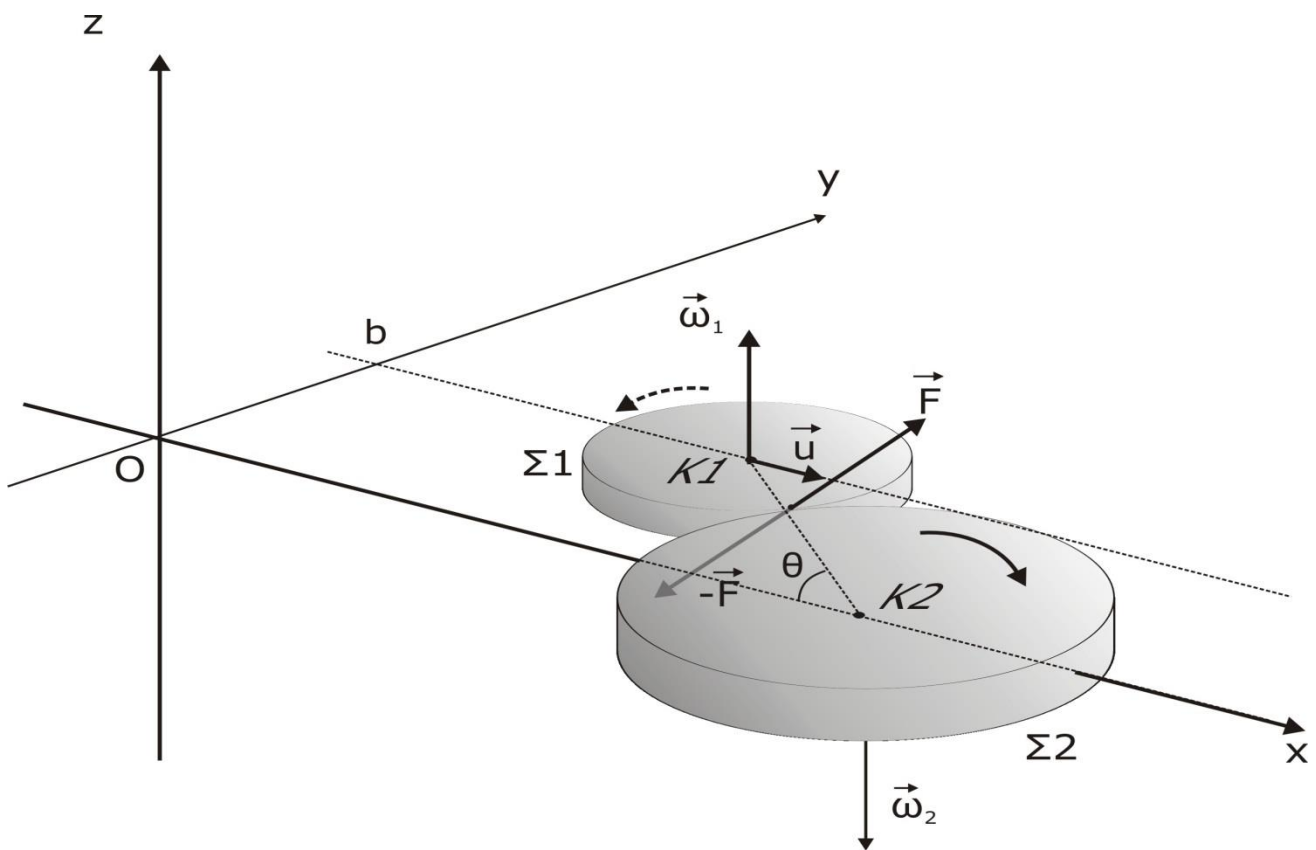


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Το δισδιάστατο άκαμπτο σώμα

Κ. Γ. Παπαμιχάλης
Δρ Φυσικής



Copyright 2012: Κ. Γ. Παπαμιχάλης

ISBN 978-960-93-4189-9

Η εκτύπωση και η βιβλιοδεσία έγινε
από τις εκδοτικές επιχειρήσεις

«Ελλήνων Πόλεις»

Γ. Παπαγεωργίου

Β. Κωνσταντίνου 225, Κορωπί 19400

Περιεχόμενα

Εισαγωγή. Περιγραφή του φυσικού κόσμου με φυσικά μοντέλα	07
Κεφάλαιο 1: Το μοντέλο του άκαμπτου σώματος.	13
Ενότητα 1.1: Σύνθεση του μοντέλου του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος	15
Παράγραφος 1.1A: Θεμελιώδεις έννοιες και αρχές της κλασικής μηχανικής	15
Παράγραφος 1.1B: Το σύνολο των αξιωμάτων που συνθέτουν το μοντέλο του άκαμπτου σώματος στις δύο διαστάσεις	18
Ενότητα 1.2: Υπολογισμός της ταχύτητας του j -σωματιδίου ($j=1,2,\dots,N$) του άκαμπτου σώματος ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς - Γωνιακή ταχύτητα του άκαμπτου σώματος	24
Παράγραφος 1.2A: Περιστροφές και Μετατοπίσεις Διανυσμάτων - Γωνιακή Ταχύτητα	24
Παράγραφος 1.2B: Ιδιότητες της γωνιακής ταχύτητας	30
Ενότητα 1.3: Εξισώσεις κίνησης του άκαμπτου σώματος	34
Παράγραφος 1.3A: Κέντρο μάζας: Οι δύο πρώτες εξισώσεις κίνησης του άκαμπτου σώματος	35
Παράγραφος 1.3B: Στροφορμή και Ροπή: Η τρίτη εξίσωση κίνησης του άκαμπτου σώματος	41
Ένθετα Κεφαλαίου 1	56
Κεφάλαιο 2: Ισορροπία δισδιάστατου άκαμπτου σώματος - Συνισταμένη ομοεπίπεδων δυνάμεων	69
Ενότητα 2.1: Ισορροπία και συνθήκες ισορροπίας δισδιάστατου άκαμπτου σώματος	69
Παράγραφος 2.1A: Ισορροπία και στατική ισορροπία άκαμπτου σώματος	70
Παράγραφος 2.1B: Συνθήκες ισορροπίας άκαμπτου σώματος	73
Ενότητα 2.2: Εφαρμογές	78
Εφαρμογή 1: Ιδιότητες της μη μηδενικής συνισταμένης πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων που ενεργούν σε διαφορετικά σημεία άκαμπτου σώματος	78
Εφαρμογή 2: Κέντρο μάζας και σημείο εφαρμογής του βάρους άκαμπτου σώματος	88
Εφαρμογή 3: Υπολογισμός της θέσης του κέντρου μάζας δισδιάστατου άκαμπτου σώματος	93
Εφαρμογή 4: Στατική ισορροπία δισδιάστατων άκαμπτων σωμάτων σε ομοιογενές πεδίο βαρύτητας	98
Ασκήσεις Κεφαλαίου 2	104
Κεφάλαιο 3: Διατήρηση φυσικών μεγεθών κατά την κίνηση δισδιάστατων άκαμπτων σωμάτων στο επίπεδο	109
Ενότητα 3.1: Το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας άκαμπτου σώματος - Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας άκαμπτου σώματος	109
Παράγραφος 3.1A: Από το 2ο νόμο του Newton, στο θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του άκαμπτου σώματος	112
Παράγραφος 3.1B: Υπολογισμός της κινητικής ενέργειας του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος	115

Παράγραφος 3.1Γ: Εκφράσεις του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας του άκαμπτου σώματος	117
Παράγραφος 3.1Δ: Το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας άκαμπτου σώματος	120
Ενότητα 3.2: Διατήρηση της ορμής συστήματος άκαμπτων σωμάτων	122
Παράγραφος 3.2Α: Κίνηση του κέντρου μάζας - Ορμή άκαμπτου σώματος	122
Παράγραφος 3.2Β: Θεώρημα ώθησης - ορμής	123
Παράγραφος 3.2Γ: Ορμή συστήματος άκαμπτων σωμάτων - Διατήρηση της ορμής του συστήματος	124
Ενότητα 3.3: Διατήρηση της στροφορμής συστήματος άκαμπτων σωμάτων	126
Παράγραφος 3.3Α: Ιδιοστροφορμή και τροχιακή στροφορμή άκαμπτου σώματος. Η διατήρηση της στροφορμής ενός άκαμπτου σώματος	126
Παράγραφος 3.3Β: Διατήρηση της στροφορμής απομονωμένου συστήματος άκαμπτων σωμάτων	128
Κεφάλαιο 4: Εφαρμογές	131
Εφαρμογή 1: Κίνηση ράβδου στο οριζόντιο επίπεδο, στρεπτής γύρω από σταθερό, κατακόρυφο άξονα	131
Εφαρμογή 2: Κίνηση ράβδου σε λείο οριζόντιο επίπεδο	137
Εφαρμογή 3: Πλαστική κρούση σημειακού σωματιδίου με ράβδο στρεπτή γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, σε κατακόρυφο επίπεδο	141
Εφαρμογή 4: Πλαστική κρούση σημειακού σωματιδίου με ράβδο, που μπορεί να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο	145
Εφαρμογή 5: Ελαστική κρούση ράβδων που κινούνται σε οριζόντιο λείο επίπεδο	151
Εφαρμογή 6: Κίνηση ράβδου εντός ομοιογενούς κατακόρυφου πεδίου βαρύτητας: Η ράβδος αφήνεται να κινηθεί σε κατακόρυφο επίπεδο με τα δύο άκρα της να εφάπτονται κατακόρυφης και οριζόντιας λείας επιπέδης επιφάνειας	156
Ασκήσεις Κεφαλαίου 4	160
Βιβλιογραφία	165
Κατάλογος όρων	166

Πρόλογος

Ο βασικός σκοπός του παρόντος εγχειριδίου είναι η ανάδειξη του τρόπου συγκρότησης ενός θεωρητικού μοντέλου (του άκαμπτου σώματος) ως λογικό-μαθηματικό παραγωγικό σύστημα. Επιχειρείται η σύνθεση του θεωρητικού μοντέλου του άκαμπτου σώματος στις δύο διαστάσεις, στο πλαίσιο της κλασικής -Νευτώνειας- μηχανικής.

Το μοντέλο θεμελιώνεται με ένα σύνολο πρωταρχικών όρων και προτάσεων - αξιωμάτων- που αντλούν το νόημά τους στο γλωσσικό πλαίσιο της Νευτώνειας μηχανικής. Όλοι οι όροι πέραν των πρωταρχικών, καθώς και τα φυσικά μεγέθη που χρησιμοποιούνται κατά τη σύνθεση και εφαρμογή του μοντέλου, αναδύονται από αναγκαιότητες της μαθηματικής δομής του και ορίζονται αυστηρά.

Αναδεικνύεται η σχέση Θεωρίας - Μοντέλου - Εμπειρίας: Το μοντέλο, ως νοητική, λογικό-μαθηματική κατασκευή λειτουργεί ως διαμεσολαβητής μεταξύ θεωρίας και εμπειρίας. Η δόμησή του προκύπτει από τη θεωρία. Αλλά ένας σημαντικός αριθμός προτάσεων που προκύπτουν παραγωγικά από τα αξιώματα του μοντέλου, είναι δυνατό να ελεγχθούν εμπειρικά. Το ίδιο το μοντέλο λειτουργεί ως καθοδηγητής για το σχεδιασμό της πειραματικής διαδικασίας που απαιτείται για τον εμπειρικό του έλεγχο.

Η όποια συμφωνία πειραματικών δεδομένων και θεωρητικών προβλέψεων, λειτουργεί ενθαρρυντικά όσον αφορά στο σύνολο των συνιστωσών της όλης διαδικασίας: Η θεωρία και το μοντέλο έκαναν καλά τη δουλειά τους και το πείραμα σχεδιάστηκε και εκτελέστηκε σωστά. Στην περίπτωση ωστόσο σημαντικής διαφωνίας, αρχίζει μια διαδικασία έρευνας με στόχο να ανιχνευτεί «τι πήγε στραβά», να βρεθεί ο υπεύθυνος της αποτυχίας. Η έρευνα ακολουθεί συγκεκριμένη ιεραρχία: Ο πρώτος ύποπτος είναι το πείραμα: Διεξήχθη κάτω από τις προβλεπόμενες συνθήκες; Οι συσκευές λειτούργησαν σωστά; Υπήρξαν παράγοντες που δεν ελήφθησαν υπόψη; Αν το πείραμα ελεγχθεί και επαναληφθεί με τα ίδια αποτελέσματα, η έρευνα κατευθύνεται προς το μοντέλο: Μήπως περιέχει αντινομίες; Μήπως οι απλουστεύσεις του είναι υπερβολικές; Μήπως πρέπει να τροποποιηθούν κάποια από τα αξιώματα του μοντέλου; Ο τελευταίος που μπαίνει στο στόχαστρο της έρευνας είναι η θεωρία. Λίγες αλλά με την αξία πολιτισμικού γεγονότος είναι οι στιγμές στην ιστορία της επιστήμης όπου μια θεωρία αμφισβητήθηκε και υποκαταστάθηκε από μια άλλη. Η συγκρότηση των θεωριών και η αποδοχή τους από την επιστημονική κοινότητα, αποτέλεσε τους σημαντικότερους σταθμούς στην εξέλιξη της σύγχρονης επιστημονικής σκέψης. Τέτοιοι σταθμοί σηματοδοτούνται από τη Νευτώνεια Μηχανική, τον κλασικό Ηλεκτρομαγνητισμό, τη θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας, τη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας, τη Κβαντομηχανική, κλπ.

Το εγχειρίδιο, αν και πραγματεύεται θέματα της μαθηματικής φυσικής, δεν απαιτεί προχωρημένες μαθηματικές γνώσεις, πέραν στοιχειώδους Γραμμικής Άλγεβρας και Ανάλυσης. Οι επιπλέον μαθηματικές γνώσεις, όπου χρειάζονται αναπτύσσονται σε ένθετα. Απευθύνεται κυρίως σε καθηγητές φυσικών επιστημών, σε φοιτητές των φυσικών τμημάτων σε μαθητές των τελευταίων τάξεων του Λυκείου με ιδιαίτερη έμφαση στη μαθηματική φυσική, αλλά και σε καθένα που έχει κάποιο ενδιαφέρον για τη στοιχειώδη μαθηματική φυσική και τη φιλοσοφία της επιστήμης.

Κώστας Παπαμιχάλης

Ιστορικά προλεγόμενα και η παραγωγική μαθηματική μέθοδος

Βασίλης Λ. Δημητρόπουλος
Μαθηματικός

Έχουν περάσει 2300 χρόνια περίπου, από τότε που ο Ευκλείδης, ξεκινώντας από ένα μικρό αριθμό «αυταπόδεικτων» προτάσεων και ακολουθώντας καθορισμένους μαθηματικούς και λογικούς χειρισμούς, οικοδομεί την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Μια λογική κατασκευή που εξελίχθηκε δυναμικά στο πλαίσιο του αρχαίου Ελληνικού Πνεύματος που τη δημιούργησε. Από τότε, η Γεωμετρία υπήρξε ο κατεξοχήν χώρος άσκησης και ανάπτυξης της λογικής σκέψης.

Έχουν περάσει 400 χρόνια περίπου από τότε που ο Γαλιλαίος, θέλοντας να ανακαλύψει τα μυστικά της φύσης, βασίζεται στην παρατήρηση, κάνει υποθέσεις και προσπαθεί να τις ελέγξει με καλοσχεδιασμένα πειράματα.

Στην εποχή μας οι φιλόσοφοι έχουν πειστεί ότι μια υπόθεση για τη φύση μπορεί μόνο να «διαψευστεί», αλλά ποτέ δεν μπορεί να «αποδειχθεί». Οι υποθέσεις για τη φύση είναι ανάλογες με τις «αυταπόδεικτες» προτάσεις του Ευκλείδη. Η εξαγωγή συμπερασμάτων από τις υποθέσεις γίνεται, και στη φυσική, με την αυστηρή παραγωγική μαθηματική μέθοδο. Οι μαθηματικές μέθοδοι παρέχουν τα απαραίτητα εργαλεία για την περιγραφή, κατανόηση και ερμηνεία της φύσης.

Τη χρονιά που πέθανε ο Γαλιλαίος γεννήθηκε ο Νεύτωνας. Το 1687 δημοσιεύονται τα *Principia Mathematica*, το σημαντικότερο ίσως έργο στην Ιστορία της Επιστήμης. Ο Νεύτωνας χρησιμοποιεί τον τρόπο γραφής του Ευκλείδη... και από τότε ο κόσμος γίνεται προβλέψιμος και κατανοητός.

Το παρόν εγχειρίδιο είναι δομημένο στο πλαίσιο της παραγωγικής μαθηματικής μεθόδου. Στις σελίδες του, ορίζονται αυστηρά όλοι οι όροι και τα φυσικά μεγέθη που χρησιμοποιούνται. Η κατασκευή που προκύπτει δεν είναι παρά ένα **θεωρητικό μοντέλο** που επιχειρεί να περιγράψει ένα μέρος του φυσικού κόσμου: εκείνο της κίνησης και της αλληλεπίδρασης των άκαμπτων σωμάτων.

Οι νόμοι του Νεύτωνα, η έννοια του αδρανειακού συστήματος αναφοράς και του συστήματος αξόνων που είναι στερεωμένο στο άκαμπτο σώμα, οι ιδιότητες της γωνιακής ταχύτητας (η γωνιακή ταχύτητα του άκαμπτου σώματος είναι ανεξάρτητη του αδρανειακού συστήματος αναφοράς ως προς το οποίο μελετάμε την κίνηση) αναπτύσσονται διεξοδικά και με πλήρη μαθηματική αυστηρότητα. Στο μελετητή του παρόντος εγχειριδίου, μαθηματικό ή φυσικό που διδάσκει στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, δίνεται η δυνατότητα να ατενίσει το αντικείμενο της διδασκαλίας του από ένα ανώτερο επίπεδο, απαραίτητο για να αισθάνεται «πάνοπλος» στη διδασκαλία. *Γιατί δημιουργήθηκε ο Διαφορικός και ο Ολοκληρωτικός Λογισμός; Από ποιες αναζητήσεις προήλθαν οι Διαφορικές Εξισώσεις και η Διανυσματική Ανάλυση; Ο κύριος λόγος δεν ήταν η διατύπωση και επίλυση προβλημάτων φυσικής; Για να διδάξουμε φυσική με στοιχειώδη μαθηματικά, δεν πρέπει να γνωρίζουμε τα πιο τελειοποιημένα εργαλεία;*

Η πολυετής διδακτική πείρα του συγγραφέα, οι γνώσεις του στα μαθηματικά, στη φυσική και στις νέες τεχνολογίες, όσο και ο καθарός φιλοσοφικός προσανατολισμός του, θα διευκολύνουν το μελετητή του παρόντος εγχειριδίου στην κατανόηση της μεθόδου μελέτης της φύσης που χρησιμοποιεί η σύγχρονη επιστημονική κοινότητα.

Βασίλης Δημητρόπουλος
Μαθηματικός

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΦΥΣΙΚΟΥ ΚΟΣΜΟΥ ΜΕ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Βασικές έννοιες: Φυσικός κόσμος - Αντικείμενα - Μεταβολές φυσικών αντικειμένων και φυσικά φαινόμενα - Θεωρίες - Λογικομαθηματικά μοντέλα - Εμπειρία - Πείραμα - Μέτρηση - Ποιοτικές έννοιες - Ποσοτικές έννοιες και φυσικά μεγέθη

Ποιο είναι το αντικείμενο της φυσικής; Πώς οικοδομείται το «γλωσσικό παιχνίδι»^(3,16,17,18) που χρησιμοποιούν οι φυσικοί επιστήμονες;

Το παιχνίδι της φυσικής επιστήμης ξεκινά με τη χρήση κάποιων εννοιών που δεν ανήκουν στην αρμοδιότητά της, παρά μάλλον στην αρμοδιότητα της φιλοσοφίας. Οι έννοιες **φύση** (nature), **αντικείμενο**, **εμπειρία**, **ποσότητα**, **ποιότητα** κλπ, αναλύονται και ξεκαθαρίζει το όποιο νόημά τους στο πλαίσιο των φιλοσοφικών ερευνών^(3,5,10,19).

Οι φυσικοί επιστήμονες δανείζονται από τους φιλοσόφους και υιοθετούν τις θεμελιώδεις κατηγορίες που επιλέγουν για να συνθέσουν το γλωσσικό παιχνίδι της φυσικής. Βέβαια με την πάροδο του χρόνου, η σημασία των όρων και οι αποδεκτοί κανόνες και μέθοδοι του γλωσσικού παιχνιδιού της φυσικής επιστήμης μεταβάλλονται. Έτσι, το αντικείμενο της μελέτης της κοινότητας των φυσικών δεν μπορεί παρά να προσδιορίζεται ιστορικά⁽¹⁰⁾.

Σήμερα, η **σύγχρονη κοινότητα** των φυσικών ασχολείται με την **περιγραφή του φυσικού κόσμου -των δεδομένων της εμπειρίας-** με όρους και σχέσεις που προσδιορίζονται στο πλαίσιο **συνεπών** (consistent) **λογικομαθηματικών κατασκευών -των θεωρητικών μοντέλων**^(3,5,16).

Πώς περιγράφουν οι φυσικοί επιστήμονες το φυσικό κόσμο; Πώς προκύπτει η εγκυρότητα της περιγραφής τους;

Ο **φυσικός κόσμος** (natural world) αποτελείται από **αντικείμενα**, που είναι δυνατόν να αντιληφθούμε -άμεσα ή έμμεσα- με τις αισθήσεις μας. Τα αντικείμενα του φυσικού κόσμου συγκροτούν τα δεδομένα της εμπειρίας μας.

Τα αντικείμενα του φυσικού κόσμου υφίστανται **μεταβολές**, που, γενικά¹, ονομάζονται **φυσικά φαινόμενα**. Ο βασικός στόχος -το ζητούμενο- της φυσικής επιστήμης είναι η περιγραφή των φυσικών αντικειμένων και των μεταβολών τους στο πλαίσιο μιας νοητικής κατασκευής -ενός **γλωσσικού παιχνιδιού** κατά την ορολογία του Wittgenstein^(10,16,17) - που το ονομάσαμε **θεωρητικό μοντέλο**⁽¹⁶⁾. Κάθε θεωρητικό μοντέλο ικανοποιεί δύο θεμελιώδεις υποθέσεις⁽¹⁶⁾:

A) Οι έννοιες και οι σχέσεις που το συγκροτούν αποτελούν ένα σύστημα χωρίς εσωτερικές λογικές ή μαθηματικές αντιφάσεις⁽⁵⁾.

B) Κάποιες από τις προτάσεις που μπορούν να διατυπωθούν στο πλαίσιο του μοντέλου, είναι δυνατόν να αντιστοιχιστούν σε καταστάσεις και μεταβολές αντικειμένων του φυσικού κόσμου, έτσι ώστε η αλήθειά τους να μπορεί να ελεγχθεί με συγκεκριμένες **εμπειρικές διαδικασίες: Το μοντέλο αντλεί την εγκυρότητά του από την εμπειρία**^(3,5,18).

Οι προτάσεις που αποδεικνύονται αληθείς στο πλαίσιο του μοντέλου και επιπλέον μπορούν να ελεγχθούν εμπειρικά, ονομάζονται **θεωρητικές προβλέψεις**. Οι θεωρητικές προβλέψεις περιγράφουν κανονικότητες του φυσικού κόσμου και τρόπους οργάνωσης και μεταβολής των φυσικών αντικειμένων. Επομένως, μας υποδεικνύουν με ποιές διαδικασίες και με ποια μέσα είναι δυνατός ο εμπειρικός τους έλεγχος. Όπως θα

¹ Στον όρο «φυσικά φαινόμενα» συμπεριλαμβάνεται κάθε είδους φαινόμενο που εμπίπτει στη μελέτη των φυσικών επιστημών, όπως τα χημικά, τα γεωλογικά, τα αστρονομικά κλπ.

δούμε στη συνέχεια, ο εμπειρικός έλεγχος των θεωρητικών προβλέψεων πραγματοποιείται με τη διαδικασία της **παρατήρησης** ή του **πειράματος**.

Πώς συγκροτούνται τα θεωρητικά μοντέλα;

Οι επιστήμονες δημιουργούν θεωρητικά μοντέλα, με τα οποία επιχειρούν να αναπαραστήσουν στη νόηση τα φαινόμενα του φυσικού κόσμου. Ωστόσο, τα μοντέλα συγκροτούνται στο πλαίσιο ευρύτερων **θεωριών**⁽¹⁶⁾. Για παράδειγμα, το μοντέλο με το οποίο περιγράφουμε τις κινήσεις και τις αλληλεπιδράσεις των άκαμπτων σωμάτων, συγκροτείται στο πλαίσιο της θεωρίας της Νευτώνειας Μηχανικής. Το μοντέλο με το οποίο περιγράφουμε την εκπομπή και διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, συγκροτείται στο πλαίσιο της Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας του Maxwell. Το κοσμολογικό μοντέλο συγκροτείται στο πλαίσιο της Θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας του Einstein, κλπ. Κάθε θεωρητικό μοντέλο προκύπτει από την εφαρμογή μιας θεωρίας στην περιγραφή συγκεκριμένου φαινομένου ή συνόλου ομοειδών φαινομένων του φυσικού κόσμου.

Οι σύγχρονες θεωρίες θεμελιώνονται πάνω σε έναν ελάχιστο αριθμό πρωταρχικών εννοιών και αξιωμάτων, που δεν προκύπτουν ως λογικές αναγκαιότητες άλλων όρων ή προκείμενων προτάσεων. Όλες οι προτάσεις της θεωρίας και κατ' επέκταση του μοντέλου, προκύπτουν παραγωγικά από τις πρωταρχικές, με εφαρμογή των γενικών κανόνων της Λογικής και των Μαθηματικών. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι θεμελιώδεις όροι και τα αξιώματα μιας σύγχρονης θεωρίας δεν αποτελούν κατ' ανάγκη γενικεύσεις εμπειρικών δεδομένων^(3,5,10). Ωστόσο, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι στους θεμελιώδεις όρους και της ποιο σύγχρονης θεωρίας εμπεριέχονται, σε λανθάνουσα έστω κατάσταση, όλοι οι πρόγονοί της. Δηλαδή όλες οι διαδοχικές προσπάθειες επιτυχημένης, ή όχι, περιγραφής του φυσικού κόσμου δια μέσου της Ιστορίας.

Το **μοντέλο** απεικονίζει μέρος του φυσικού κόσμου στη νόηση, στο πλαίσιο του γλωσσικού παιχνιδιού που επιβάλλει η θεωρία. Με την έννοια αυτή, **το μοντέλο αποτελεί το διαμεσολαβητή μεταξύ του φυσικού κόσμου και της θεωρίας**⁽¹⁶⁾. Για παράδειγμα, για να περιγράψουμε την κίνηση μιας ράβδου που εκτοξεύουμε στον αέρα, κοντά στην επιφάνεια της γης, συνθέτουμε ένα μοντέλο με βάση τους όρους και τις γενικές προτάσεις της κλασικής μηχανικής. Με παραγωγική - μαθηματική επεξεργασία των πρωταρχικών προτάσεων διατυπώνουμε θεωρητικές προβλέψεις, που μπορεί να αφορούν στην τροχιά του κέντρου της ράβδου ή των άκρων της. Οι προτάσεις αυτές είναι ελέγξιμες πειραματικά: Θα μπορούσαμε να εκτοξεύσουμε τη ράβδο κάτω από ελεγχόμενες συνθήκες και να αποτυπώσουμε φωτογραφικά ένα σημαντικό αριθμό διαδοχικών θέσεων της. Στη συνέχεια, σε κάθε στιγμιότυπο θα μπορούσαμε να μετρήσουμε τις συντεταγμένες του μέσου ή των άκρων της ράβδου και να ελέγξουμε αν τα σημεία αυτά βρίσκονται πάνω στην αντίστοιχη τροχιά που προβλέπει το θεωρητικό μοντέλο.

Ποια είναι τα εργαλεία με τα οποία πραγματοποιείται η σύνδεση του μοντέλου με την εμπειρική διαδικασία ελέγχου του; Ποιοτικές και ποσοτικές έννοιες - Μέτρηση.

Στο πλαίσιο ενός θεωρητικού μοντέλου χρησιμοποιούνται έννοιες δύο κατηγοριών⁽¹⁶⁾:

α) **Ποιοτικές**, μέσω των οποίων προσομοιώνονται και αντιστοιχίζονται τα αντικείμενα του φυσικού κόσμου με τα **νοητικά αντικείμενα** του μοντέλου, όπως: «σωματίδιο», «στερεό σώμα», «κύμα», «υγρό σώμα», «μόριο», «ηλεκτρόνιο», «εκκρεμές», «αστέρας», κλπ. Τα αντικείμενα του μοντέλου έχουν **ιδιότητες**, οι οποίες δεχόμαστε ότι απεικονίζουν τις ιδιότητες των αντικειμένων του φυσικού κόσμου.

β) **Ποσοτικές**, μέσω των οποίων **προσδιορίζονται αριθμητικά ορισμένες ιδιότητες των αντικειμένων του μοντέλου**. Παραδείγματα ποσοτικών εννοιών αποτελούν οι

έννοιες «θέση», «ταχύτητα», «δύναμη», «δυναμικό», «δράση», «φάση», «ταχύτητα φάσης», «θερμοκρασία» κλπ.

Οι ποσοτικές έννοιες μπορούν, με τη σειρά τους να διακριθούν περαιτέρω σε:

(β1) **μετρήσιμες ποσότητες** ή **φυσικά μεγέθη**, όπως «θέση», «ταχύτητα», «δύναμη», «μάζα» κλπ και

(β2) **μη μετρήσιμες ποσότητες**, όπως «διανυσματικό δυναμικό», «δράση», «συνάρτηση κβαντικής κατάστασης» κλπ.

Οι τιμές των μετρήσιμων ποσοτήτων, είναι δυνατό να προσδιοριστούν με μια **πειραματική διαδικασία**, ο σχεδιασμός της οποίας γίνεται στο πλαίσιο του δεδομένου μοντέλου⁽⁵⁾. Αντίθετα, οι μη μετρήσιμες ποσότητες, μολονότι προσδιορίζονται από αριθμητικές τιμές, στο πλαίσιο του θεωρητικού μοντέλου, δεν υπάρχει πειραματική διαδικασία με την οποία είναι δυνατή η μέτρησή τους.

Εμπειρικός έλεγχος των μοντέλων: Πείραμα και Παρατήρηση.

Είδαμε ότι η εγκυρότητα ενός θεωρητικού μοντέλου αντλείται από εμπειρικές διαδικασίες, που αποσκοπούν στον έλεγχο εκείνων των προτάσεων του που απεικονίζουν συγκεκριμένες καταστάσεις και μεταβολές των αντικειμένων του φυσικού κόσμου. Αφού λοιπόν οι εμπειρικές διαδικασίες που θα χρησιμοποιηθούν αφορούν σε προτάσεις του θεωρητικού μοντέλου, συνεπάγεται ότι ο σχεδιασμός τους οφείλει να γίνει στο πλαίσιο του ίδιου του μοντέλου. Οι εμπειρικές διαδικασίες που σχεδιάζονται και διεξάγονται με στόχο τον έλεγχο ενός μοντέλου, ονομάζονται **πειράματα** ή **παρατηρήσεις**.

Χαρακτηριστικά του πειράματος.

Το **πείραμα** είναι μια **σχεδιασμένη εμπειρική δραστηριότητα**, μέσω της οποίας επιδιώκεται ο **εμπειρικός έλεγχος του μοντέλου** και έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά^(3,5,16):

A) Διεξάγεται κάτω από προσδιορισμένες και ελεγχόμενες συνθήκες.

B) Είναι δυνατόν να επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες ή διαφορετικές συνθήκες.

Γ) Η μέτρηση των φυσικών μεγεθών γίνεται με όργανα των οποίων οι συνθήκες λειτουργίας, καθώς και το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίχτηκε η κατασκευή τους είναι γνωστά εκ των προτέρων.

Δ) Η σύνθεση της απαιτούμενης πειραματικής διάταξης και η διεξαγωγή του σχεδιασμένου πειράματος, ή η παρατήρηση του φυσικού φαινομένου που αναπαρίσταται στο πλαίσιο του μοντέλου, είναι **πραγματοποιήσιμη**. Οι τιμές των φυσικών μεγεθών, που προβλέπει το μοντέλο κάτω από τις συνθήκες του πειράματος (ή κατά την εξέλιξη του παρατηρούμενου φαινομένου), είναι δυνατό να συγκριθούν με τις πειραματικές τιμές των ίδιων μεγεθών, που προκύπτουν από την πειραματική διαδικασία⁽⁵⁾.

Μέσω της πειραματικής διαδικασίας γίνεται δυνατή η αξιολόγηση του μοντέλου μας. Έτσι, αν οι πειραματικές τιμές συμφωνούν (στο πλαίσιο των προβλέψιμων πειραματικών σφαλμάτων) με τις θεωρητικές τιμές, τότε το μοντέλο **επικυρώνεται** από το συγκεκριμένο πείραμα. Λέμε ότι το μοντέλο μας, καθώς και η θεωρία επί της οποίας εδράζεται, είναι συμβατά με το πείραμα και περιγράφουν ικανοποιητικά το αντίστοιχο φυσικό φαινόμενο. Η θεωρία αυξάνει την αξιοπιστία της (ή «το βαθμό της επίρρωσής της»), όσο μεγαλύτερο πλήθος διαφορετικών φυσικών φαινομένων μπορούν να αναπαρασταθούν με επιτυχία, με μοντέλα που στηρίζονται σε αυτήν^(3,5,10,16,18).

Αν οι πειραματικές τιμές δεν συμφωνούν με τις θεωρητικές τιμές, τα πράγματα γίνονται πιο περίπλοκα, αλλά και πολύ πιο ενδιαφέροντα. Πού μπορεί να οφείλεται η **διάψευση** των προβλέψεων του μοντέλου, σε σχέση με τη συγκεκριμένη πειραματική διαδικασία^(3,10); Ο ερευνητής έχει να διερευνήσει πολλαπλές εναλλακτικές αιτίες, με κυριότερες τις ακόλουθες⁽³⁾:

1. Μπορεί να φταίει η λειτουργία κάποιου οργάνου μέτρησης.
2. Μπορεί να μην έχουν προσδιοριστεί σωστά οι συνθήκες λειτουργίας της πειραματικής διάταξης, που χρησιμοποιήθηκε.
3. Ένας απρόβλεπτος εξωτερικός παράγοντας μπορεί να επηρέασε το αποτέλεσμα της μέτρησης.
4. Ίσως κάποιες από τις υποθέσεις του μοντέλου να μην είναι συμβατές με τις συνθήκες του πειράματος.
5. Μήπως το μοντέλο έχει εσωτερικές αντινομίες ή ασυνέπειες;
6. Είναι δυνατή η τροποποίηση του μοντέλου, στο πλαίσιο της δεδομένης θεωρίας, ώστε οι προβλέψεις του να συμφωνήσουν με τα πειραματικά δεδομένα;
7. Ίσως η γενικότερη θεωρία, πάνω στην οποία εδράζεται το συγκεκριμένο μοντέλο^(3,10,16,18) χρειάζεται τροποποίηση.

Συνοψίζουμε: Οι σύγχρονοι φυσικοί επιστήμονες επιδιώκουν να συνθέσουν νοητικές αναπαραστάσεις του φυσικού κόσμου με νοητικές λογικό-μαθηματικές κατασκευές, τα θεωρητικά μοντέλα. Τα θεωρητικά μοντέλα αξιολογούνται και μεταβάλλονται με βάση τον εμπειρικό τους έλεγχο. Η διαδικασία αυτή με τις δύο όψεις -τη θεωρητική (νοητική) και την πειραματική (εμπειρική)- που αλληλεπιδρούν έντονα και συνυφαίνονται, προσδιορίζει σε γενικές γραμμές, τους κανόνες της «**επιστημονικής μεθόδου**», που ακολουθεί η σύγχρονη επιστημονική κοινότητα⁽³⁾.

Το μηχανικό μοντέλο του άκαμπτου σώματος.

Στο παρόν εγχειρίδιο ασχολούμαστε με το θεωρητικό **μοντέλο του άκαμπτου σώματος**, που εδράζεται στην Κλασική -Νευτώνεια- Μηχανική. Γενικά, κάθε θεωρητικό μοντέλο, που εδράζεται στην Κλασική Μηχανική, θα το ονομάζουμε «**μηχανικό μοντέλο**».

Στο πρώτο κεφάλαιο περιγράφουμε τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά του μηχανικού μοντέλου του άκαμπτου σώματος, δίνοντας έμφαση στη λογικό-μαθηματική δομή του. Η οικοδόμηση του μοντέλου γίνεται με παραγωγική διαδικασία, ξεκινώντας από τις πρωταρχικές έννοιες και τα βασικά αξιώματα. Η μελέτη περιορίζεται στην επίπεδη κίνηση των άκαμπτων σωμάτων (plane motion).

Κατά τη σταδιακή αναλυτική συγκρότηση του μοντέλου, αναδύονται και ορίζονται αυστηρά τα μεγέθη που είναι κομβικής σημασίας στην παραγωγή των εξισώσεων κίνησης του άκαμπτου σώματος. Το κέντρο μάζας, η γωνιακή ταχύτητα, η ροπή αδράνειας, η στροφορμή, η κινητική ενέργεια κλπ, ορίζονται ως μαθηματικές ποσότητες κατά τη διαδικασία σύνθεσης του μοντέλου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε τη στατική ισορροπία του άκαμπτου σώματος, πάντοτε στο πλαίσιο του μοντέλου που συνετέθη στο πρώτο κεφάλαιο. Διατυπώνονται και επιλύονται συγκεκριμένα προβλήματα-εφαρμογές ισορροπίας σωμάτων στο επίπεδο.

Στο τρίτο κεφάλαιο διατυπώνονται και αποδεικνύονται τα θεωρήματα διατήρησης της ορμής, μηχανικής ενέργειας και στροφορμής, συστήματος άκαμπτων σωμάτων. Η μελέτη, και στο κεφάλαιο αυτό όπως και σε όλο το εγχειρίδιο, περιορίζεται στην επίπεδη κίνηση άκαμπτων σωμάτων.

Στο κεφάλαιο 4 παρατίθεται η αναλυτική επεξεργασία επιλεγμένων προβλημάτων κίνησης και αλληλεπίδρασης άκαμπτων σωμάτων. Σκοπός μας είναι η ανάδειξη των δυνατοτήτων του μοντέλου και η εφαρμογή του στη μελέτη φαινομένων που μπορούμε να παρατηρήσουμε στην καθημερινή ζωή ή στο εργαστήριο.

Οι προβλέψεις που προκύπτουν από την επίλυση των προβλημάτων είναι ελέγξιμες με πραγματοποιήσιμες πειραματικές διαδικασίες. Δεδομένου ότι δεν είναι πάντοτε εφικτή η οργάνωση και διεξαγωγή των αντιστοιχών πειραμάτων σε συμβατικό εργαστήριο, ο «πειραματικός» έλεγχος μπορεί να γίνει στο εικονικό περιβάλλον ενός εκπαιδευτικού λογισμικού, όπως είναι το Interactive Physics.

Με τις ασκήσεις που παρατίθενται στο 2ο και 4ο κεφάλαιο, επιδιώκεται η εξοικείωση του αναγνώστη στην περιγραφή και επίλυση προβλημάτων που αναδύονται από την παρατήρηση του φυσικού κόσμου, στο πλαίσιο του συγκεκριμένου μοντέλου.

Παράλληλα με το κυρίως κείμενο, αλλά και στο τέλος του 1ου κεφαλαίου, παρατίθενται **ένθετα** που αφορούν σε επεξηγήσεις, πρόσθετες πληροφορίες, προαπαιτούμενες μαθηματικές έννοιες, σχέσεις και προτάσεις.

