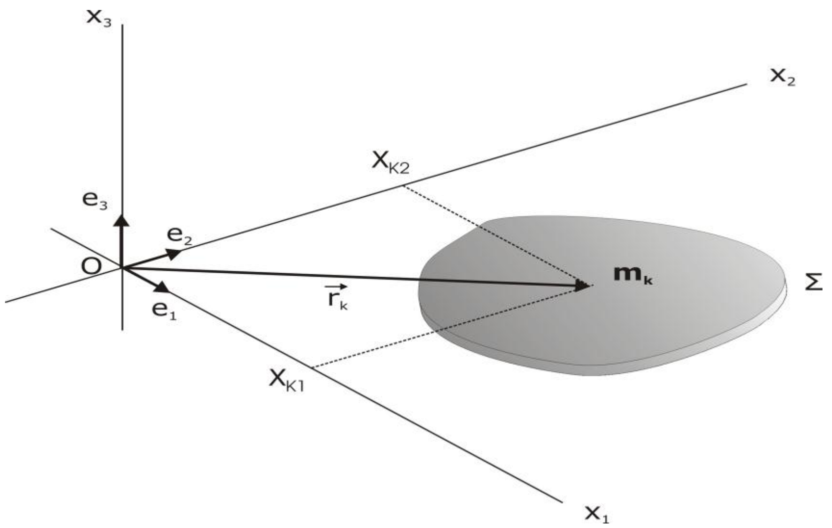
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΑΚΑΜΠΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

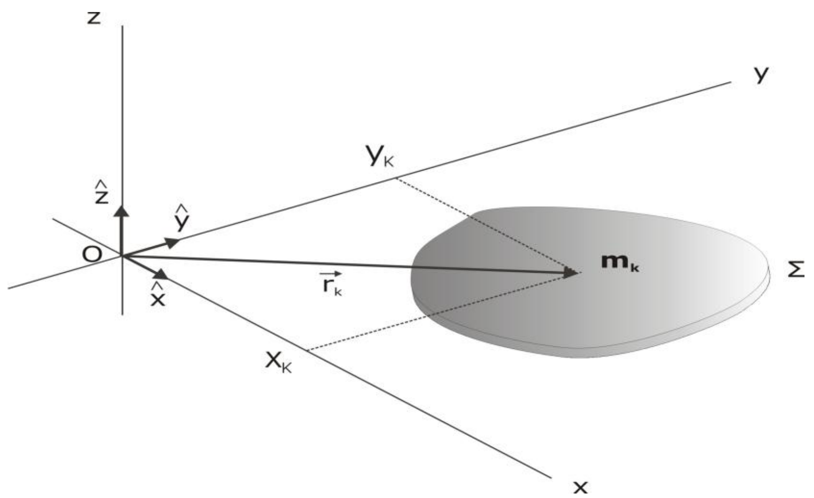
Βασικές έννοιες: Στερεά σώματα του φυσικού κόσμου - Ευκλείδειος χώρος - Σωματίδιο - Ελεύθερο σωματίδιο - Άκαμπτο σώμα - Σχετικές θέσεις σωματιδίων - Αδρανειακό σύστημα αναφοράς - Σύστημα αναφοράς, στερεωμένο στο άκαμπτο σώμα - Εσωτερικές δυνάμεις - Εξωτερικές δυνάμεις - Βαθμοί ελευθερίας - Στιγμιαίας άξονας περιστροφής - Γωνιακή ταχύτητα - Κέντρο μάζας - Στροφορμή - Ροπή - Ροπή αδράνειας - Στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς

Τα σώματα του φυσικού κόσμου μπορούμε να τα κατατάξουμε σε τρεις μεγάλες κατηγορίες: Στα στερεά, στα υγρά και στα αέρια. Το κοινό, μακροσκοπικό χαρακτηριστικό των στερεών σωμάτων, είναι ότι κατά την κίνησή τους το σχήμα και ο όγκος τους φαίνεται ότι διατηρούνται αναλλοίωτα, εκτός κι αν κάτι προκαλέσει την παραμόρφωση τους ή τη θραύση τους. Έτσι, αν θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση των στερεών σωμάτων, θεωρώντας αμελητέες τις όποιες παραμορφώσεις υφίστανται κατά την αλληλεπίδρασή τους με το περιβάλλον τους, πρέπει να συνθέσουμε ένα θεωρητικό μοντέλο που θα εξασφαλίζει το αναλλοίωτο του σχήματος, της επιφάνειας και του όγκου κάθε σώματος κατά την κίνησή του. Το μοντέλο αυτό είναι γνωστό ως «**μοντέλο του άκαμπτου (rigid) σώματος**». Το μοντέλο του άκαμπτου σώματος μελετήθηκε επισταμένα κυρίως κατά το δέκατο ένατο αιώνα και τα πορίσματά του, οι προβλέψεις και οι εφαρμογές του στην κίνηση των σωμάτων, στην αστροφυσική, αλλά και στην τεχνολογία των μηχανών υπήρξαν εντυπωσιακές.

Στο παρόν κεφάλαιο, συνθέτουμε το μοντέλο του άκαμπτου σώματος και παράγουμε τις βασικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνησή του ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Πρόθεσή μας είναι να αναδειχθεί η θεμελίωση και η σταδιακή οικοδόμηση του μοντέλου, χρησιμοποιώντας ένα μαθηματικό πλαίσιο που απευθύνεται σε ένα αρκετά ευρύ κοινό. Ωστόσο, η μελέτη της κίνησης άκαμπτων σωμάτων στον Ευκλείδειο χώρο των τριών διαστάσεων απαιτεί ένα αρκετά εκτενές και απαιτητικό μαθηματικό υπόβαθρο. Για το λόγο αυτό, θα ασχοληθούμε μόνο με **δισδιάστατα**



Σχήμα 1α: Το άκαμπτο σώμα Σ κινείται με το επίπεδό του επί του επιπέδου (O,x_1,x_2), του αδρανειακού συστήματος αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3). Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{r}_k$, που προσδιορίζει τη θέση ενός -τυχαίου- σωματιδίου του Σ, συμβολίζονται με x_{k1}, x_{k2}, αντίστοιχα.



Σχήμα 1β: Το άκαμπτο σώμα Σ κινείται με το επίπεδό του επί του επιπέδου (O,x,y), του αδρανειακού συστήματος αναφοράς (O,x,y,z). Οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{r}_k$, που προσδιορίζει τη θέση ενός -τυχαίου- σωματιδίου του Σ, συμβολίζονται με x_k, y_k, αντίστοιχα.

άκαμπτα σώματα που κινούνται πάνω στο σταθερό επίπεδο (O,x_1,x_2), αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3)[1].

Οι προϋποθέσεις του μοντέλου του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος, περιορίζουν το πλήθος των φαινομένων του φυσικού κόσμου στα οποία μπορεί να εφαρμοστεί. Εντούτοις, πολλές και σημαντικές περιπτώσεις κίνησης ή ισορροπίας σωμάτων μπορούν να αναχθούν στο μοντέλο αυτό. Οι περιπτώσεις κίνησης τρισδιάστατων σωμάτων που ανάγονται στο μοντέλο του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος, αναφέρονται στη βιβλιογραφία με τον όρο «**επίπεδη κίνηση (plane motion) άκαμπτων σωμάτων**». Για παράδειγμα, η κίνηση ενός κυλίνδρου ή μιας σφαίρας κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου, η κίνηση του φυσικού εκκρεμούς, η επίπεδη κίνηση ράβδων, οι συγκρούσεις περιστρεφόμενων κυλίνδρων στο τραπέζι του μπιλιάρδου, η ισορροπία ενός συστήματος συνδεδεμένων ράβδων, είναι εφαρμογές που εντάσσονται στο μοντέλο του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος.

[1] Τα συστήματα αναφοράς συμβολίζονται εναλλακτικά ως: (O,x_1,x_2,x_3), οπότε τα μοναδιαία διανύσματα κάθε άξονα συμβολίζονται, αντίστοιχα με e_1, e_2, e_3, είτε ως (O,x,y,z), οπότε τα μοναδιαία διανύσματα κάθε άξονα συμβολίζονται, αντίστοιχα με $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ (σχήματα 1α και 1β).

1.1 Σύνθεση του μοντέλου του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος

Το μοντέλο του άκαμπτου σώματος εδράζεται πάνω στις θεμελιώδεις αρχές της κλασικής μηχανικής. **Ως άκαμπτο σώμα θεωρείται ένα σύστημα πεπερασμένου αριθμού (Ν) σωματιδίων των οποίων οι σχετικές θέσεις, κατά την κίνηση του συστήματος, διατηρούνται σταθερές**.
Τα σωματίδια από τα οποία αποτελείται το άκαμπτο σώμα ικανοποιούν τους τρεις νόμους του Newton. Οι κινήσεις τους προκύπτουν από την εφαρμογή του 2ου νόμου του Newton, σε καθένα από αυτά. Η κίνηση του άκαμπτου σώματος δεν είναι παρά η συλλογική κίνηση των σωματιδίων του. Τα σωματίδια αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις, τέτοιες ώστε να εξασφαλίζεται το αμετάβλητο των σχετικών θέσεων τους, σε κάθε περίπτωση. Εφόσον οι σχετικές θέσεις των σωματιδίων δεν μεταβάλλονται, το σχήμα και ο όγκος του άκαμπτου σώματος διατηρούνται αναλλοίωτα, όποια κίνηση και να κάνει το άκαμπτο σώμα και κάτω από τη δράση οποιασδήποτε εξωτερικής δύναμης.
Η σύνθεση του μοντέλου ξεκινά από τις εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων του άκαμπτου σώματος και τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι δυνάμεις με τις οποίες αλληλεπιδρούν, ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις.

Στη διαδικασία σύνθεσης του μοντέλου μας, πρώτα θέτουμε τις βασικές αρχές από τις οποίες θα προκύψουν όλες οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά του άκαμπτου σώματος. Στην πορεία, εισάγουμε νέες έννοιες και διατυπώνουμε σχέσεις και προτάσεις που απορρέουν από τις αρχές αυτές. Το μοντέλο ολοκληρώνεται με τη διατύπωση των γενικών διαφορικών εξισώσεων της κίνησης δισδιάστατου άκαμπτου σώματος στο επίπεδο.

Στην παράγραφο 1.1Α διατυπώνουμε επιγραμματικά τις θεμελιώδεις έννοιες και αρχές της κλασικής μηχανικής, πάνω στην οποία εδράζεται το μοντέλο. Στην παράγραφο 1.1Β αναπτύσσουμε το σύνολο των αξιωμάτων που συνθέτουν το μοντέλο του άκαμπτου σώματος, στις δύο διαστάσεις.

1.1Α Θεμελιώδεις έννοιες και αρχές της κλασικής μηχανικής[6,7,8,9,12,13,14]

Σύστημα αναφοράς: Πρόκειται για ένα (ορθογώνιο) σύστημα αξόνων (O,x_1,x_2,x_3)[1] του Ευκλείδειου χώρου E_3 μαζί με ένα χρονόμετρο (t), ως προς τα οποία μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση κάθε σωματιδίου.

1ος νόμος του Newton: Υπάρχει σύστημα αναφοράς, ως προς το οποίο κάθε σωματίδιο που δεν υφίσταται αλληλεπιδράσεις (ελεύθερο σωματίδιο) κινείται σε ευθεία γραμμή, με σταθερή ταχύτητα. Το σύστημα αυτό ονομάζεται αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Αδρανειακό σύστημα αναφοράς: Ορίζεται σύμφωνα με τον πρώτο νόμο του Newton: Πρόκειται για ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων (O,x_1,x_2,x_3) του Ευκλείδειου χώρου E_3, μαζί με ένα χρονόμετρο (t), ως προς το οποίο κάθε **ελεύθερο αλληλεπιδράσεων σωματίδιο** διαγράφει ευθεία τροχιά με σταθερή ταχύτητα.

Ο χρόνος στο πλαίσιο της Νευτώνειας μηχανικής έχει απόλυτο χαρακτήρα: Η μέτρηση του χρόνου γίνεται με ενιαίο τρόπο για κάθε σύστημα αναφοράς, είτε αυτό είναι αδρανειακό είτε όχι. Δύο γεγονότα που συμβαίνουν ταυτόχρονα ως προς ένα σύστημα αναφοράς, συμβαίνουν ταυτόχρονα ως προς κάθε σύστημα αναφοράς.

---

[1] Σχετικά με το συμβολισμό του συστήματος αναφοράς, βλέπε και υποσημείωση 1 της εισαγωγής του Κεφαλαίου 1.

2ος νόμος του Newton: Οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς σωματιδίου ως προς ένα σύστημα αναφοράς είναι λύσεις των εξισώσεων:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right)$$

Όπου:
m είναι η μάζα του σωματιδίου, σταθερά, ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς και των δυνάμεων που ενεργούν στο σωματίδιο.

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς, ως προς το οποίο μελετάμε την κίνησή του (με $\vec{r}$ συμβολίζουμε το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου, ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς).

$\sum \vec{F}\left(\vec{r}, \vec{v}, t\right)$ συμβολίζει τη συνολική δύναμη που ενεργεί στο σωματίδιο. Οι δυνάμεις που ενεργούν στο σωματίδιο είναι γενικά συναρτήσεις της θέσης του $\vec{r}$, της ταχύτητάς του $\vec{v}$ και του χρόνου t.

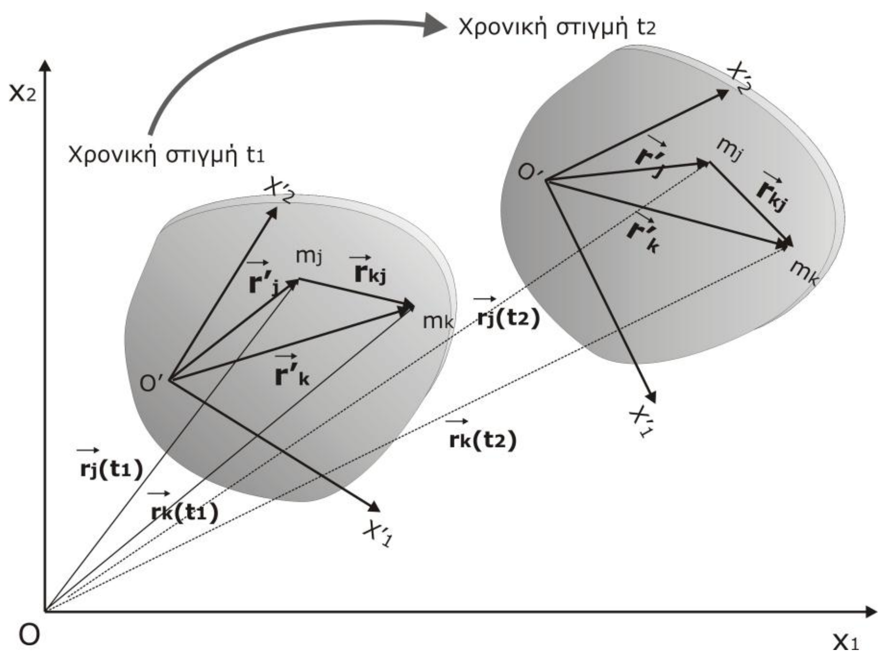
Επισημαίνεται ότι η τροχιά του σωματιδίου προσδιορίζεται μονοσήμαντα από το 2ο νόμο του Newton, εφόσον είναι γνωστές οι αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου[20]. Δηλαδή το διάνυσμα θέσης του $\vec{r}$ και η ταχύτητά του $\vec{v}$, τη χρονική στιγμή t=0.

3ος νόμος του Newton: Τα σωματίδια αλληλεπιδρούν ανά ζεύγη. Κάθε σωματίδιο ασκεί σε ένα άλλο δύναμη, που είναι ανεξάρτητη από την ύπαρξη άλλων αλληλεπιδράσεων με άλλα σωματίδια ή πεδία δυνάμεων. Οι δυνάμεις με τις οποίες αλληλεπιδρούν δύο σωματίδια έχουν τη μορφή δράσης-αντίδρασης. Η δύναμη που ασκεί το πρώτο στο δεύτερο είναι αντίθετη με τη δύναμη που ασκεί το δεύτερο στο πρώτο και έχουν κοινή διεύθυνση την ευθεία που ορίζουν τα δύο σωματίδια.

Για τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σωματίδιο ισχύει η **αρχή της επαλληλίας**: Η συνολική (συνισταμένη) δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο είναι ίση με το (διανυσματικό) άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό από άλλα σωματίδια ή από πεδία δυνάμεων.

Διανυσματικό πεδίο[4,11,15]: Ονομάζεται μια διανυσματική φυσική ποσότητα που έχει συγκεκριμένη τιμή σε κάθε σημείο του χώρου. Τα διανυσματικά πεδία που ασκούν δυνάμεις σε σωματίδια, ονομάζονται **πεδία δυνάμεων**. Ένα σωματίδιο αλληλεπιδρά με ένα πεδίο, εφόσον διαθέτει τις «κατάλληλες» ιδιότητες. Για παράδειγμα ένα σωματίδιο με μάζα m, αν τοποθετηθεί σε ένα πεδίο βαρύτητας $\vec{g}\left(\vec{r}\right)$, δέχεται δύναμη $\vec{F} = m \cdot \vec{g}\left(\vec{r}\right)$. Ένα φορτισμένο σωματίδιο με φορτίο q, αν τοποθετηθεί σε ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}\left(\vec{r}\right)$, δέχεται δύναμη $\vec{F} = q \cdot \vec{E}\left(\vec{r}\right)$, κλπ.

Σύστημα σωματιδίων: Κάθε σύνολο σωματιδίων που κινούνται σύμφωνα με τους τρεις νόμους του Newton ονομάζεται μηχανικό σύστημα, ή απλά σύστημα. Στα σωματίδια κάθε συστήματος ενεργούν δυνάμεις, τις οποίες μπορούμε να διακρίνουμε σε δύο κατηγορίες: τις εσωτερικές και τις εξωτερικές δυνάμεις. **Οι εσωτερικές δυνάμεις** είναι οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης των σωματιδίων του συστήματος. Αυτές αναπτύσσονται μεταξύ των μελών κάθε ζεύγους σωματιδίων του συστήματος, είναι κεντρικές και έχουν τη μορφή δράσης-αντίδρασης, δηλαδή ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton. Είναι φανερό ότι το (διανυσματικό) άθροισμα όλων των εσωτερικών δυνάμεων κάθε



Σχήμα 1.1α: Το σύστημα συντεταγμένων (Ο′,x′$_1$,x′$_2$), κινείται μαζί με το σώμα -είναι «**στερεωμένο**» πάνω στο σώμα. Ως προς το (Ο′,x′$_1$,x′$_2$), τα διανύσματα θέσης των σωματιδίων του σώματος δεν μεταβάλλονται κατά την κίνησή του. Οι συντεταγμένες τους ως προς το (Ο′,x′$_1$,x′$_2$), διατηρούνται σταθερές. Αντίθετα, οι συντεταγμένες των σωματιδίων του σώματος ως προς το αδρανειακό σύστημα (Ο,x$_1$,x$_2$), μεταβάλλονται καθώς το σώμα κινείται ως προς αυτό. Οι θέσεις των σωματιδίων ως προς το σύστημα (Ο′,x′$_1$,x′$_2$) ονομάζονται **σχετικές**.

συστήματος είναι ίσο με το μηδέν. Ως **εξωτερική δύναμη** σε ένα σύστημα ορίζεται κάθε δύναμη που ασκείται σε σωματίδιο του συστήματος και δεν είναι εσωτερική. Οι εξωτερικές δυνάμεις προέρχονται από το περιβάλλον του συστήματος: Μπορεί να οφείλονται στην ύπαρξη πεδίων δυνάμεων ή σε αλληλεπιδράσεις με άλλα σώματα του περιβάλλοντος του συστήματος.

Βαθμοί ελευθερίας μηχανικού συστήματος: Ονομάζονται οι ανεξάρτητες μεταβλητές, που απαιτούνται για να γνωρίζουμε κάθε χρονική στιγμή τη θέση όλων των μερών ενός μηχανικού συστήματος. Για παράδειγμα, οι βαθμοί ελευθερίας ενός σημείου που κινείται στον Ευκλείδειο χώρο E_3, είναι τρεις: οι τρείς Ευκλείδειες συντεταγμένες του ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Οι βαθμοί ελευθερίας ενός σημείου που κινείται στην επιφάνεια μιας σφαίρας είναι δύο: η πολική και η αζιμουθιακή γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα θέσης του σημείου ως προς ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, του οποίου η αρχή ταυτίζεται με το κέντρο της σφαίρας.

Σύστημα αναφοράς «στερεωμένο» σε άκαμπτο σώμα: Πρόκειται για ένα (ορθογώνιο) σύστημα αξόνων (Ο′,x′$_1$,x′$_2$,x′$_3$), ως προς το οποίο **οι συντεταγμένες των σωματιδίων του σώματος δεν μεταβάλλονται κατά την κίνησή του** (σχήμα 1.1α). Στη γενική περίπτωση κίνησης άκαμπτου σώματος, ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι αδρανειακό.
Η έννοια του στερεωμένου στο άκαμπτο σώμα Σ συστήματος αξόνων παίζει πρωταγωνιστικό ρόλο στη μελέτη της κίνησής του. Όλα τα σημεία του Σ είναι ακίνητα ως προς το στερεωμένο στο Σ σύστημα αναφοράς. Επομένως **η μελέτη της κίνησης του Σ ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ανάγεται στη μελέτη της κίνησης ενός συστήματος αξόνων που είναι στερεωμένο στο Σ**.

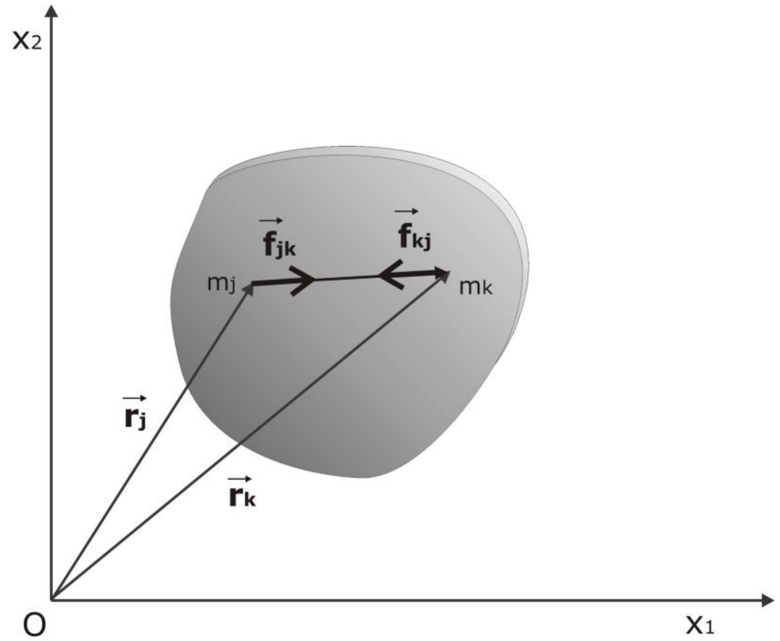
1.1Β Το πλαίσιο των αξιωμάτων που συνθέτουν το μοντέλο του άκαμπτου σώματος στις δύο διαστάσεις[6,8,9,13]

1) Θεωρούμε ότι το δισδιάστατο άκαμπτο σώμα έχει τη μορφή επίπεδου φλοιού που κινείται πάνω στο επίπεδο (O,x_1,x_2) αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3) (σχήμα 1.1β).

2) Τα σωματίδια του άκαμπτου σώματος είναι διακριτά μεταξύ τους. Μπορούμε να τα ονοματίσουμε με τους φυσικούς αριθμούς 1,2,…N. Έτσι, όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε κάποιο σωματίδιο του σώματος, χρησιμοποιούμε **δείκτες**, που τους συμβολίζουμε με τα γράμματα j, k, n, κλπ του λατινικού αλφαβήτου. Κάθε δείκτης δηλώνει το όνομα κάποιου σωματιδίου και η τιμή του μπορεί να είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός από 1 μέχρι N. Το τυχαίο σωματίδιο του σώματος, στο οποίο έχουμε αποδώσει ως όνομα τον αριθμό j, το ονομάζουμε j-σωματίδιο. Η θέση του j-σωματιδίου ως προς ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (O,x_1,x_2), συμβολίζεται με το διάνυσμα $\vec{r}_j$. Κάθε σωματίδιο έχει ορισμένη μάζα. Η μάζα του j-σωματιδίου συμβολίζεται με m_j.

3) Η κίνηση του άκαμπτου σώματος ως προς ένα **αδρανειακό** σύστημα αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3), προσδιορίζεται από τις κινήσεις των σωματιδίων που το απαρτίζουν. Η τροχιά κάθε σωματιδίου προκύπτει ως λύση του 2ου νόμου του Newton και καθορίζεται από τις δυνάμεις που ενεργούν πάνω του. Στα σωματίδια του άκαμπτου σώματος ενεργούν **εσωτερικές δυνάμεις** και ενδεχομένως και **εξωτερικές**.

4) Κατά την κίνηση του άκαμπτου σώματος, οι σχετικές θέσεις (άρα και οι σχετικές αποστάσεις) των σωματιδίων που το απαρτίζουν, διατηρούνται σταθερές. Αυτό επιτυγχάνεται από τις εσωτερικές δυνάμεις, που αναπτύσσονται μεταξύ των σωματιδίων του σώματος: **Οι εσωτερικές δυνάμεις εξασφαλίζουν την σταθερότητα των σχετικών αποστάσεων μεταξύ των σωματιδίων κατά την κίνηση του άκαμπτου σώματος, ανεξαρτήτως των αλληλεπιδράσεων του σώματος με εξωτερικά πεδία**



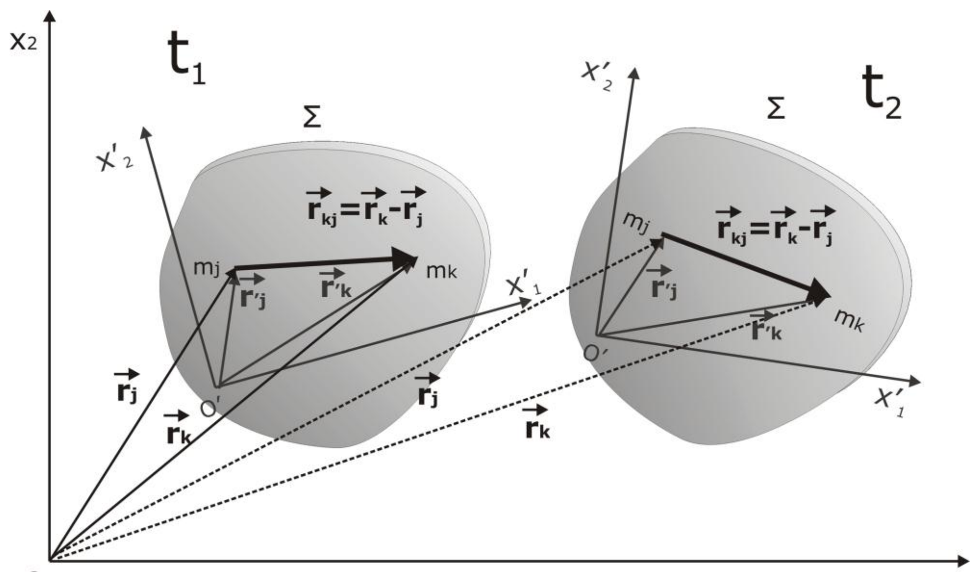
Σχήμα 1.1β: Το δισδιάστατο άκαμπτο σώμα κινείται με το επίπεδό του σε επαφή με το επίπεδο (O,x_1,x_2), του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3). Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των σωματιδίων του άκαμπτου σώματος έχουν τη μορφή δράσης-αντίδρασης. Ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton.

ή άλλα σώματα. Με άλλα λόγια, δεχόμαστε ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των σωματιδίων του άκαμπτου σώματος λαμβάνουν κατάλληλες τιμές, ώστε να εξουδετερώνουν κάθε «τάση» σχετικής μετατόπισης των σωματιδίων, από οποιαδήποτε αιτία και αν προέρχεται. **Η αναλυτική έκφραση των εσωτερικών δυνάμεων μας είναι άγνωστη**. Το βασικό τους χαρακτηριστικό είναι ότι αναπτύσσονται μεταξύ όλων των ζευγών των σωματιδίων του σώματος και ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton (σχήμα1.1β).

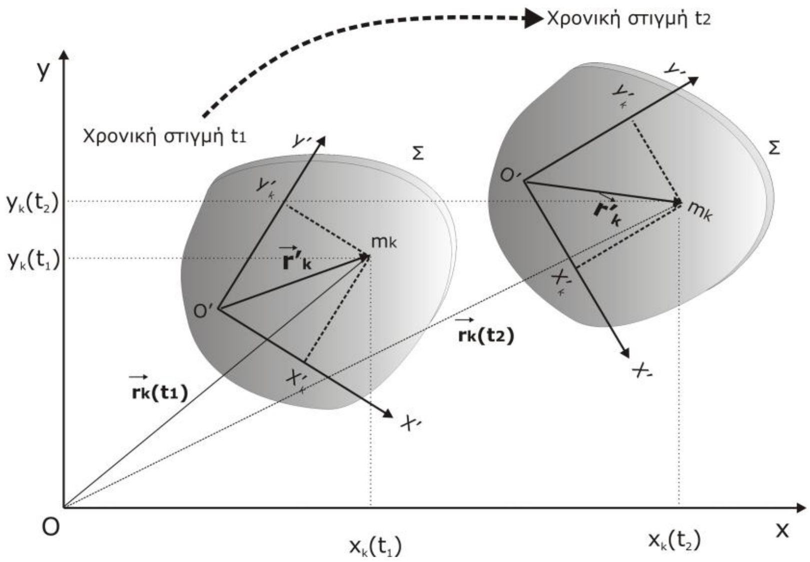
5) Οι σχετικές θέσεις των σωματιδίων του άκαμπτου σώματος διατηρούνται σταθερές κατά την κίνησή του. *Πώς εκφράζεται η απαίτηση αυτή αναλυτικά;*
Έστω ότι το δισδιάστατο άκαμπτο σώμα Σ κινείται πάνω στο επίπεδο (O,x,y) αδρανειακού συστήματος αναφοράς (O,x,y,z). Οι συντεταγμένες (x_k,y_k) (k=1,2…N) κάθε σωματιδίου του Σ ως προς το (O,x,y) μεταβάλλονται (σχήμα 1.1δ). Θεωρούμε ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένα) σύστημα αξόνων (O′,x′,y′) που είναι **στερεωμένο στο Σ**: Οι συντεταγμένες (x'_k,y'_k) (k=1,2…N) κάθε σωματιδίου του Σ ως προς το (O′,x′,y′) διατηρούνται αμετάβλητες κατά την κίνηση του Σ. Η μαθηματική διατύπωση της διατήρησης των συντεταγμένων κάθε σωματιδίου του Σ ως προς το σύστημα αξόνων (O′,x′,y′), εκφράζεται με τις εξισώσεις:

$$\frac{dx'_k}{dt} = 0 \qquad \frac{dy'_k}{dt} = 0 \qquad (1)$$

για κάθε k=1,2…N.
Ας σημειωθεί ότι η ύπαρξη συστήματος αξόνων (O′,x′,y′) στερεωμένου στο Σ, ορίζει ένα σύστημα αναφοράς -γενικά μη αδρανειακό- ως προς το οποίο όλα τα σωματίδια του άκαμπτου σώματος Σ παραμένουν ακίνητα: Οι θέσεις των σωματιδίων του Σ είναι σταθερές ως προς το σύστημα (O′,x′,y′). Με δεδομένα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά



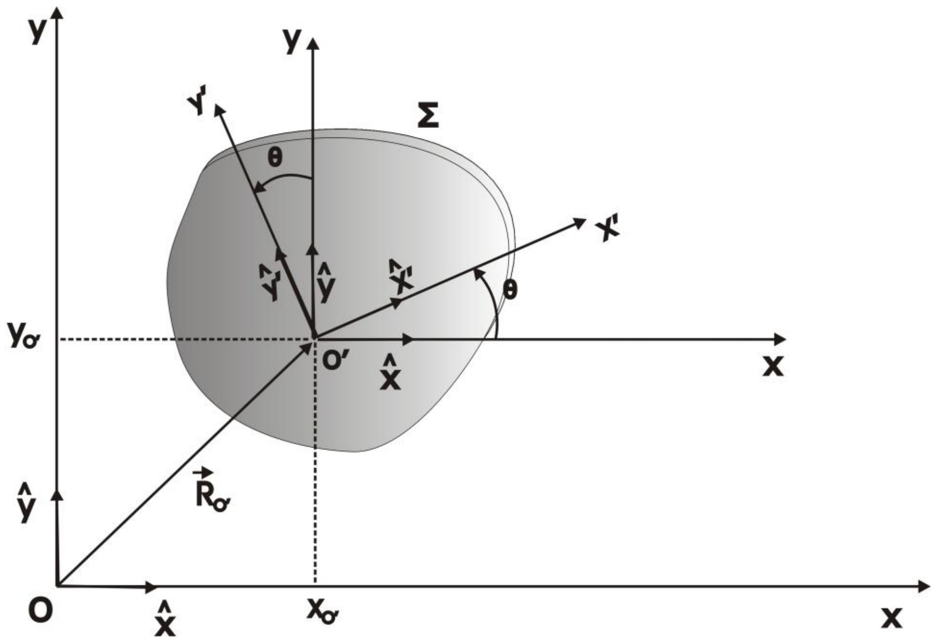
Σχήμα 1.1γ: Κατά την κίνηση του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2), το διάνυσμα $\vec{r}_{kj} = \vec{r}_k - \vec{r}_j$, που προσδιορίζει τη σχετική θέση των σημείων k και j του άκαμπτου σώματος Σ, μεταβάλλεται. Ωστόσο, το ίδιο διάνυσμα διατηρείται αμετάβλητο ως προς το σύστημα (O′,x'_1,x'_2), που κινείται μαζί με το σώμα.



Σχήμα 1.1δ: Ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y), το διάνυσμα θέσης $\vec{r}_k$ του k-σωματιδίου του κινούμενου σώματος Σ, μεταβάλλεται και οι συντεταγμένες του τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 είναι διαφορετικές.
Ως προς το σύστημα αξόνων (O′,x′,y′) που είναι στερεωμένο στο Σ και κινείται μαζί με αυτό, οι συντεταγμένες (x′,y′) του διανύσματος θέσης του ίδιου σωματιδίου διατηρούνται αμετάβλητες.

του Σ, είναι δυνατόν να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες οποιουδήποτε σωματιδίου του Σ ως προς το σύστημα (O′,x′,y′). Ώστε αν κάθε χρονική στιγμή t γνωρίζουμε τη θέση του στερεωμένου στο Σ συστήματος (O′,x′,y′) ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y), τότε γνωρίζουμε και τη θέση κάθε σωματιδίου του Σ ως προς το (O,x,y). Δηλαδή, η μελέτη της κίνησης του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y) ανάγεται στη μελέτη της κίνησης του στερεωμένου στο Σ συστήματος αξόνων (O′,x′,y′) ως προς το (O,x,y).

Πόσες ανεξάρτητες εξισώσεις χρειαζόμαστε για να προσδιορίζουμε κάθε χρονική στιγμή τη θέση του σταθερού ως προς το Σ συστήματος (O′,x′,y′), ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y);
Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.1ε, η θέση του συστήματος (O′,x′,y′) ως προς το (O,x,y), είναι γνωστή εφόσον γνωρίζουμε:
A) τις συντεταγμένες της αρχής του O΄ $(x_{O'},y_{O'})$ ως προς το (O,x,y), και
B) τη γωνία στροφής θ των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{x}',\hat{y}'$, των ορθογωνίων αξόνων O′x′, O′y′, ως προς τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x},\hat{y}$ των ορθογωνίων αξόνων Ox, Oy.
Συμπεραίνουμε ότι η θέση του άκαμπτου σώματος Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y), προσδιορίζεται με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές: **Το Σ έχει τρεις βαθμούς ελευθερίας**.



Σχήμα 1.1ε: Έστω ότι τη χρονική στιγμή t, το σταθερό ως προς το Σ σύστημα αξόνων (O′,x′,y′) έχει τη θέση που φαίνεται στο σχήμα. Η θέση του (O′,x′,y′) ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y), προσδιορίζεται από τη θέση της αρχής του O΄ και τον προσανατολισμό των αξόνων του O′x′, O′y′. Η θέση του O′ προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του ($x_{O'}$, $y_{O'}$), ως προς το (O,x,y). Τα μοναδιαία, ορθογώνια διανύσματα $\hat{x}', \hat{y}'$ που καθορίζουν τις κατευθύνσεις των αξόνων O′x′, O′y′, υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\hat{x}' = \cos(\theta)\cdot\hat{x} + \sin(\theta)\cdot\hat{y}$$

$$\hat{y}' = -\sin(\theta)\cdot\hat{x} + \cos(\theta)\cdot\hat{y}$$

Ώστε για να βρούμε τις κατευθύνσεις των αξόνων O′x'_1, O′x'_2 χρειαζόμαστε μόνο τη γωνία στροφής θ.

Ένθετο 1.1.1

Ιδιότητες των εσωτερικών δυνάμεων αλληλεπίδρασης των σωματιδίων ενός άκαμπτου σώματος

Θεωρούμε δύο τυχαία σωματίδια του σώματος, το σωματίδιο k και το σωματίδιο j (k, j=1,2,…N). Μεταξύ του k και του j σωματιδίου, αναπτύσσονται δυνάμεις της μορφής δράσης-αντίδρασης. Οι δυνάμεις αυτές είναι εσωτερικές του συστήματος των σωματιδίων που ορίζουν το άκαμπτο σώμα.

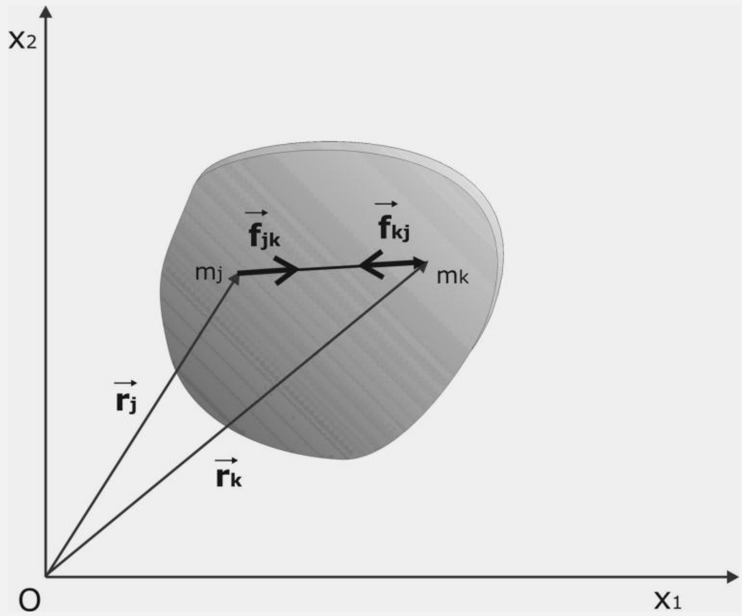
Συμβολίζουμε με $\vec{f}_{kj}$ τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο k από το j και με $\vec{f}_{jk}$ τη δύναμη που ασκείται στο j από το k. Αφού οι δυνάμεις $\vec{f}_{kj}$ και $\vec{f}_{jk}$ υπακούουν στον τρίτο νόμο του Newton, για κάθε τιμή των j και k ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\vec{f}_{kj} = -\vec{f}_{jk} \quad (2)$$

Επιπλέον, οι δυνάμεις $\vec{f}_{kj}$ και $\vec{f}_{jk}$ βρίσκονται πάνω στον ίδιο άξονα, εκείνον που ορίζεται από τη σχετική θέση $\vec{r}_{jk} = \vec{r}_j - \vec{r}_k$ των δύο σωματιδίων (σχήμα 1.1ζ).

Θεωρούμε ότι ένα σωματίδιο δεν μπορεί να αλληλεπιδρά με τον εαυτό του. Η παραδοχή αυτή εκφράζεται αναλυτικά με τη σχέση:

$$\vec{f}_{kk} = 0 \text{, για κάθε k=1,2…N}$$



Σχήμα 1.1ζ: Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των σωματιδίων του άκαμπτου σώματος έχουν τη μορφή δράσης-αντίδρασης. Ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton.

Η συνολική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο k (k=1,2…N), από όλα τα άλλα σωματίδια του σώματος, συμβολίζεται με $\vec{f}_k$. Σύμφωνα με τους συμβολισμούς και τις συμβάσεις μας, ισχύει:

$$\vec{f}_k = \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{kj} \qquad (3)$$

Πρόταση 1.1.1
Αν οι εσωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωματιδίων ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton, τότε αληθεύουν οι σχέσεις:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{f}_k = 0 \qquad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{f}_k = 0 \qquad (5)$$

Όπου $\vec{r}_k$ k=1,2…N, συμβολίζουν τα διανύσματα θέσης των σωματιδίων του σώματος. Με $\vec{r}_k \times \vec{f}_k$ συμβολίζουμε το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{r}_k$ και $\vec{f}_k$ (Ένθετο 1 στο τέλος του κεφαλαίου 1: «Εξωτερικό γινόμενο»).

<u>Απόδειξη</u>
α) Από τις σχέσεις 2 και 3, προκύπτει ότι:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{f}_k = \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{kj} = -\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{jk} = -\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \vec{f}_{jk} = -\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_j = -\sum_{k=1}^{N} \vec{f}_k$$

από την οποία συνεπάγεται ότι:

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{N} \vec{f}_k = 0$$

ή:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{f}_k = 0$$

β) Οι δυνάμεις $\vec{f}_{kj}$ και $\vec{f}_{jk}$ που ασκούνται μεταξύ των k και j σωματιδίων, είναι συγγραμμικές με το διάνυσμα $\vec{r}_{jk} = \vec{r}_j - \vec{r}_k$ (σχήμα 1.1β). Τότε, σύμφωνα με τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου (Ένθετο 1: «Εξωτερικό γινόμενο»), ισχύει:

$$\vec{f}_{jk} \times \vec{r}_{jk} = 0 \Rightarrow \vec{f}_{jk} \times (\vec{r}_j - \vec{r}_k) = 0 \Rightarrow \vec{f}_{jk} \times \vec{r}_j = \vec{f}_{jk} \times \vec{r}_k$$

Αθροίζουμε ως προς τους δείκτες k και j:

$$\sum_{k,j=1}^{N} \vec{f}_{jk} \times \vec{r}_j = \sum_{k,j=1}^{N} \vec{f}_{jk} \times \vec{r}_k$$

Από τον 3ο νόμο του Newton, έχουμε $\vec{f}_{kj} = -\vec{f}_{jk}$, οπότε η τελευταία ισότητα γράφεται:

$$\sum_{k,j=1}^{N} \vec{f}_{jk} \times \vec{r}_j = -\sum_{k,j=1}^{N} \vec{f}_{kj} \times \vec{r}_k \tag{6}$$

Από την 6 και την 3 έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{N}\left[\left(\sum_{k=1}^{N} \vec{f}_{jk}\right) \times \vec{r}_j\right] = -\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_{kj}\right) \times \vec{r}_k\right]$$

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{f}_j \times \vec{r}_j = -\sum_{k=1}^{N} \vec{f}_k \times \vec{r}_k$$

$$2 \cdot \sum_{j=1}^{N} \vec{f}_j \times \vec{r}_j = 0$$

από την οποία έπεται η 5.

■

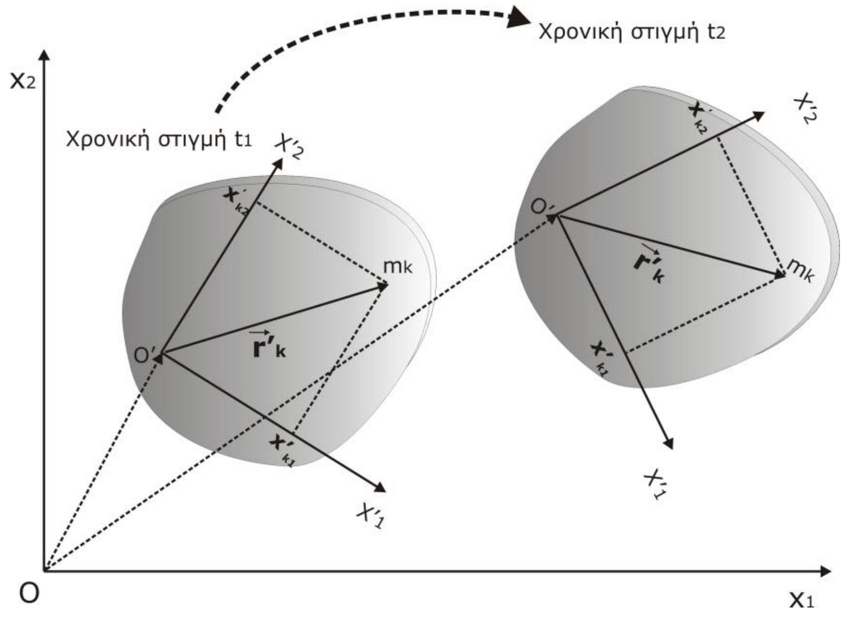
[Αξίζει να σημειωθεί ότι από την αποδεικτική διαδικασία προκύπτει ότι οι σχέσεις 4 και 5 ισχύουν για **οποιοδήποτε σύστημα σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με κεντρικές δυνάμεις, οι οποίες ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton**]

1.2 Υπολογισμός της ταχύτητας του j-σωματιδίου (j=1,2…N) του άκαμπτου σώματος ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς - Γωνιακή ταχύτητα του άκαμπτου σώματος[6,8,9,13]

Στην παρούσα ενότητα αποδεικνύουμε ότι η **ταχύτητα** κάθε σωματιδίου **δισδιάστατου**, άκαμπτου σώματος Σ που κινείται στο επίπεδο (O,x_1,x_2) αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3), προσδιορίζεται από **τρεις ανεξάρτητες μεταξύ τους παραμέτρους**: Τις συντεταγμένες της αρχής Ο′ ενός **σταθερού ως προς το Σ συστήματος αξόνων** (O',x'_1,x'_2,x'_3) και τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του (O',x'_1,x'_2,x'_3) ως προς το (O,x_1,x_2,x_3), την οποία και ορίζουμε αυστηρά. Από την ανάλυση αυτή, προκύπτει ότι η θέση κάθε σωματιδίου του Σ, αλλά και η θέση του σταθερού ως προς το Σ συστήματος αξόνων (O',x'_1,x'_2,x'_3), ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), περιγράφονται από τρεις συναρτήσεις του χρόνου: Τις συντεταγμένες της αρχής Ο′ ως προς το σύστημα αξόνων (O,x_1,x_2) και τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι λύσεις ενός συστήματος τριών ανεξάρτητων μεταξύ τους διαφορικών εξισώσεων, που θα αποτελέσουν το αντικείμενο της επόμενης ενότητας, 1.3.

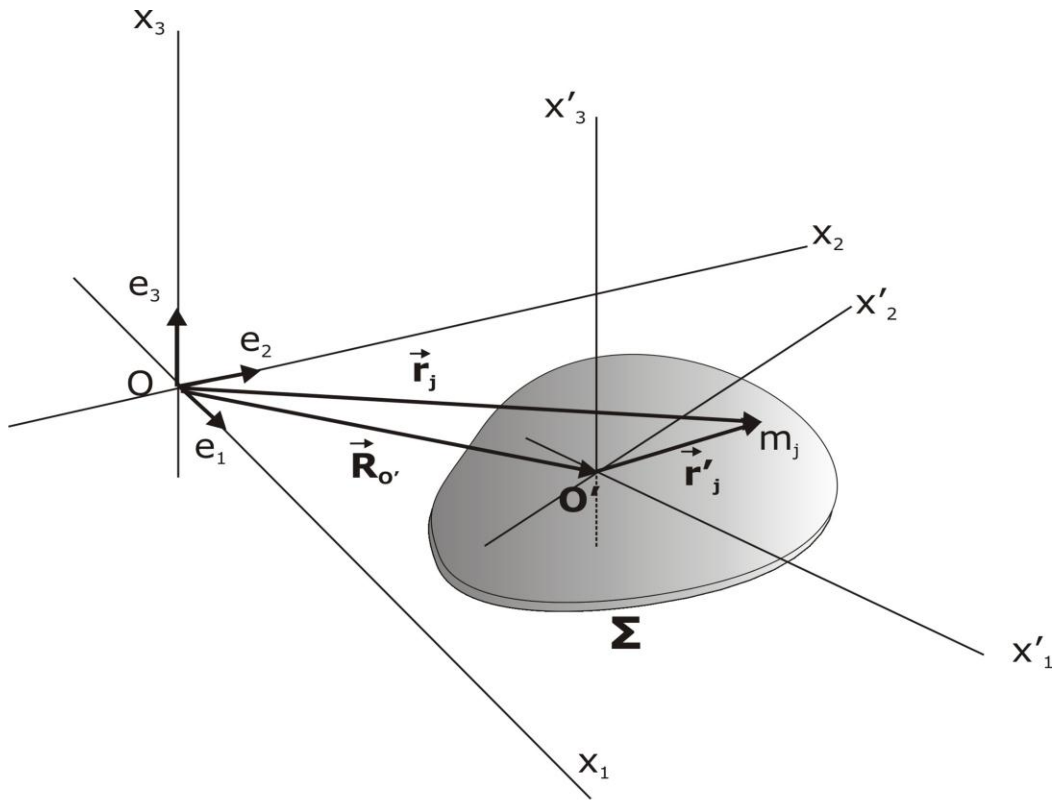
1.2Α Περιστροφές και Μετατοπίσεις Διανυσμάτων - Γωνιακή Ταχύτητα

Θεωρούμε το άκαμπτο, δισδιάστατο σώμα Σ, που κινείται πάνω στο επίπεδο (O,x_1,x_2) του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3). Έστω (O',x'_1,x'_2,x'_3) σύστημα αξόνων στερεωμένο στο Σ (σχήμα 1.2α). Στην παράγραφο 1.1Β είδαμε ότι η θέση του (O',x'_1,x'_2,x'_3), ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), προσδιορίζεται από τρεις ανεξάρτητες παραμέτρους. Βρήκαμε ότι ένα κατάλληλο σύνολο παραμέτρων είναι οι συντεταγμένες $x_{O'1}$, $x_{O'2}$ της αρχής Ο′ του (O',x'_1,x'_2,x'_3)[1] και η γωνία θ που σχηματίζουν τα μοναδιαία διανύσματα e'_1, e'_2 των ορθογώνιων αξόνων $O'x'_1$ και $O'x'_2$ ως προς τα e_1, e_2 (σχήματα 1.2α-δ). Οι παράμετροι $x_{O'1}$, $x_{O'2}$ και θ είναι συναρτήσεις του χρόνου και αρκούν για να προσδιορίσουν κάθε χρονική στιγμή τη θέση του συστήματος



Σχήμα 1.2α: Το σύστημα αναφοράς (O,x_1,x_2) είναι αδρανειακό. Το (O',x'_1,x'_2) είναι στερεωμένο στο σώμα Σ. Κατά την κίνηση του σώματος, οι συντεταγμένες του τυχαίου σημείου k του Σ, ως προς το (O,x_1,x_2), γενικά μεταβάλλονται, ενώ ως προς το (O',x'_1,x'_2), διατηρούνται πάντοτε σταθερές.

[1] Η τρίτη συντεταγμένη, $x_{O'3}$ του Ο′, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3) είναι ίση με μηδέν ($x_{O'3}=0$), γιατί τα επίπεδα (O,x_1,x_2), (O',x'_1,x'_2) των (O,x_1,x_2,x_3) και (O',x'_1,x'_2,x'_3) αντίστοιχα, καθώς και το επίπεδο του Σ ταυτίζονται κάθε χρονική στιγμή (σχήμα 1.2β).



Σχήμα 1.2β: Το σύστημα (O',x'_1,x'_2,x'_3) είναι στερεωμένο στο Σ. Το σύστημα (O,x_1,x_2,x_3) είναι αδρανειακό. Η θέση του j-σωματιδίου ως προς τα δύο συστήματα σχετίζονται με την εξίσωση: $\vec{r}_j = \vec{R}_{O'} + \vec{r}'_j$

(O',x'_1,x'_2,x'_3), επομένως και τη θέση $\vec{r}_j$ κάθε j-σωματιδίου του Σ.

Σύμφωνα με τα σχήματα 1.2β-δ, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{r}_j = \vec{R}_{O'} + \vec{r}'_j \tag{1}$$

όπου:

$$\vec{R}_{O'} = \overrightarrow{OO'} = (x_{O'1}, x_{O'2}) = x_{O'1} \cdot e_1 + x_{O'2} \cdot e_2 \tag{2}$$

και

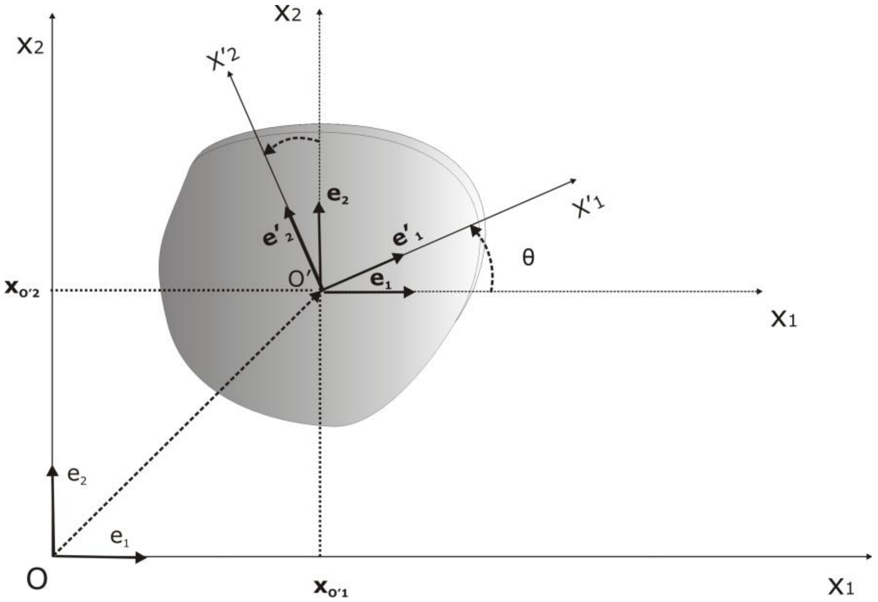
$$\vec{r}'_j = x'_{j1} \cdot e'_1 + x'_{j2} \cdot e'_2 \tag{3}$$

Πώς θα υπολογίσουμε την ταχύτητα $\vec{v}_j$ του j-σωματιδίου του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3);

Ξεκινάμε από τον ορισμό της ταχύτητας: Παραγωγίζουμε τη σχέση 1 ως προς το χρόνο και έχουμε:

$$\vec{v}_j = \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{d\vec{R}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'_j}{dt} \tag{4}$$

Η παράγωγος $\frac{d\vec{R}_{O'}}{dt}$ είναι η ταχύτητα $\vec{V}_{O'}$ του O′ ως προς το (O,x_1,x_2). Δεδομένου ότι τα διανύσματα e_1, e_2, e_3 του αδρανειακού συστήματος αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3), ως προς το οποίο μελετάμε την κίνηση, δεν μεταβάλλονται με το χρόνο, ισχύει:



Σχήμα 1.2γ: Οι άξονες $O'x_1$, $O'x_2$ σχηματίζουν γωνία θ με τους Ox_1, Ox_2, αντίστοιχα.

$$\frac{de_\alpha}{dt} = 0 \qquad \alpha=1,2,3 \tag{5}$$

Οπότε, παραγωγίζοντας τη σχέση 2 βρίσκουμε:

$$\vec{V}_{O'} = \frac{d\vec{R}_{O'}}{dt} = \frac{dx_{O'1}}{dt} \cdot e_1 + \frac{dx_{O'2}}{dt} \cdot e_2 \tag{6}$$

Η παράγωγος του $\vec{r}_j'$, υπολογίζεται από τη σχέση 3:

$$\frac{d\vec{r}_j'}{dt} = \frac{dx_{j1}'}{dt} \cdot e_1' + x_{j1}' \cdot \frac{de_1'}{dt} + \frac{dx_{j2}'}{dt} \cdot e_2' + x_{j2}' \cdot \frac{de_2'}{dt} \tag{7}$$

Οι συντεταγμένες x'_{j1}, x'_{j2} του j-σωματιδίου του Σ (j=1,2…N), ως προς το στερεωμένο στο Σ σύστημα συντεταγμένων (O',x'_1,x'_2), διατηρούνται σταθερές κατά την κίνηση του Σ (σχέσεις 1.1.1):

$$\begin{aligned} \frac{dx_j'}{dt} &= 0 \\ \frac{dy_j'}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

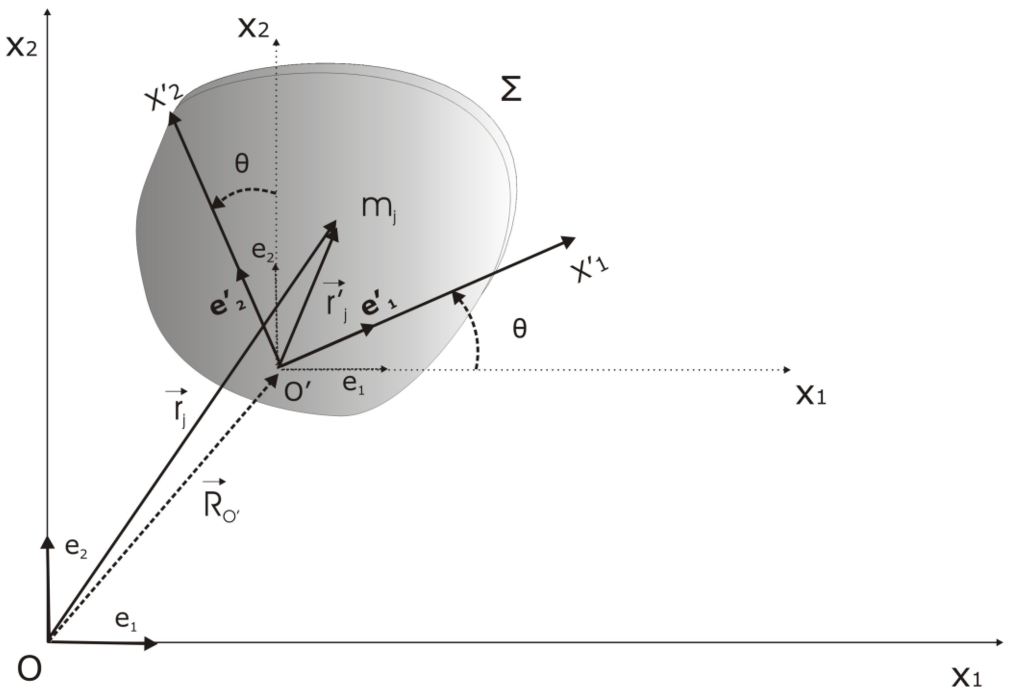
Ωστόσο, τα μοναδιαία διανύσματα e'_1, e'_2 των αξόνων $O'x'_1$, $O'x'_2$ μεταβάλλονται με το χρόνο, καθώς μεταβάλλεται η γωνία θ που σχηματίζουν με τα e_1, e_2. Οπότε η 7 λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{d\vec{r}_j'}{dt} = x_{j1}' \cdot \frac{de_1'}{dt} + x_{j2}' \cdot \frac{de_2'}{dt} \tag{9}$$

Πώς μεταβάλλονται τα διανύσματα e'_1, e'_2 των αξόνων του στερεωμένου στο Σ συστήματος αξόνων (O',x'_1,x'_2), σε συνάρτηση με το χρόνο;

Με τη βοήθεια του σχήματος 1.2ε βρίσκουμε ότι τα e'_1, e'_2 εκφράζονται συναρτήσει των e_1, e_2, και της γωνίας θ με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} e_1' &= \cos(\theta) \cdot e_1 + \sin(\theta) \cdot e_2 \\ e_2' &= -\sin(\theta) \cdot e_1 + \cos(\theta) \cdot e_2 \end{aligned} \tag{10}$$



Σχήμα 1.2δ: Η θέση κάθε j-σωματιδίου του Σ, ως προς το σύστημα (O,x_1,x_2) προσδιορίζεται από τη θέση της αρχής O′ του (O',x'_1,x'_2) και τη γωνία στροφής θ, των διανυσμάτων e'_1, e'_2, ως προς τα e_1, e_2.

Όπου η γωνία θ είναι συνάρτηση του χρόνου. Τα e_1, e_2 είναι τα μοναδιαία, ανεξάρτητα του χρόνου διανύσματα των αξόνων Ox_1, Ox_2 του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3). Παραγωγίζουμε τις σχέσεις 10 ως προς το χρόνο και λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{de'_1}{dt} &= \frac{d}{dt}(\cos(\theta)\cdot e_1 + \sin(\theta)\cdot e_2) = \\ &= \frac{d\theta}{dt}\cdot(-\sin(\theta)\cdot e_1 + \cos(\theta)\cdot e_2) = \\ &= \frac{d\theta}{dt}\cdot e'_2 = \omega\cdot e'_2\end{aligned} \tag{11}$$

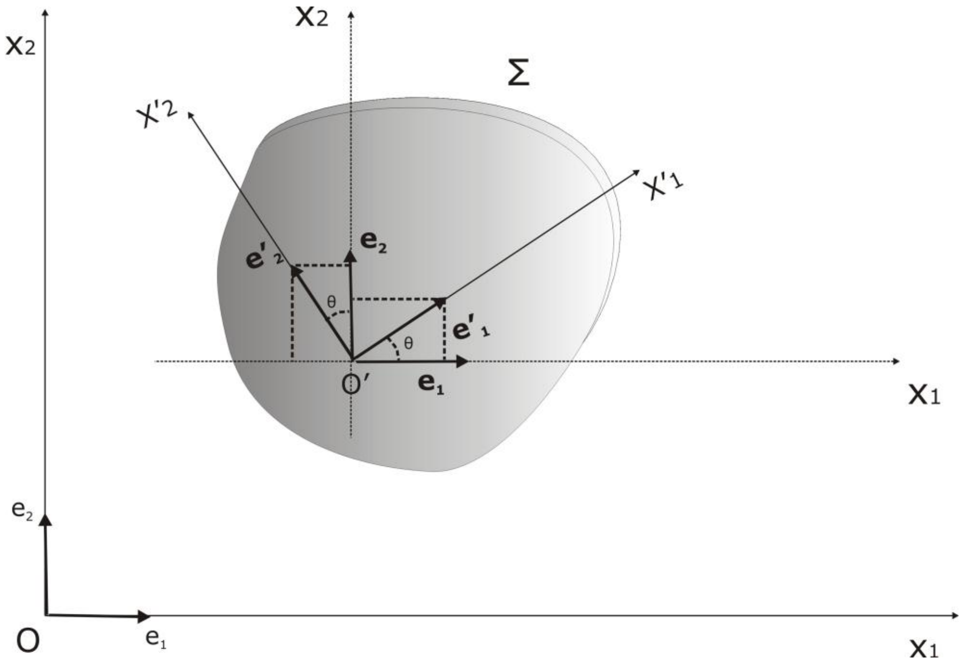
και:

$$\begin{aligned}\frac{de'_2}{dt} &= \frac{d}{dt}(-\sin(\theta)\cdot e_1 + \cos(\theta)\cdot e_2) = \\ &= -\frac{d\theta}{dt}\cdot(\cos(\theta)\cdot e_1 + \sin(\theta)\cdot e_2) = \\ &= -\frac{d\theta}{dt}\cdot e'_1 = -\omega\cdot e'_1\end{aligned} \tag{12}$$

όπου το μέγεθος:

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$$

εκφράζει το ρυθμό περιστροφής των διανυσμάτων e'_1, e'_2 ως προς τα σταθερά διανύσματα e_1, e_2 του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3), γύρω από τον άξονα περιστροφής $O'x'_3$ του στερεωμένου στο Σ συστήματος (O',x'_1,x'_2,x'_3) (σχήμα 1.2ζ). Κατά την κίνηση του Σ, ο άξονας $O'x'_3$ μετατοπίζεται διαρκώς και γι′ αυτό ονομάζεται **στιγμιαίας άξονας περιστροφής του Σ**. Ωστόσο, ο άξονας $O'x'_3$ είναι διαρκώς παράλληλος με τον Ox_3 του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3). Το μοναδιαίο



Σχήμα 1.2ε: Τα μοναδιαία και ορθογώνια διανύσματα e'_1, e'_2, αναλύονται στους άξονες $O'x_1$, $O'x_2$ και εκφράζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των e_1, e_2, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$e'_1 = \cos(\theta)\cdot e_1 + \sin(\theta)\cdot e_2$$

$$e'_2 = -\sin(\theta)\cdot e_1 + \cos(\theta)\cdot e_2$$

διάνυσμά του e'_3 δεν μεταβάλλεται κατά την περιστροφή και διατηρείται ίσο με το e_3 (σχήμα 1.2ζ) [Ένθετο 2, στο τέλος του κεφαλαίου 1]:

$$e'_3 = e_3 \tag{13}$$

Ορίζουμε ως **γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του Σ ως προς το στερεωμένο στο Σ σύστημα (O',x'_1,x'_2,x'_3)** και σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), το διάνυσμα:

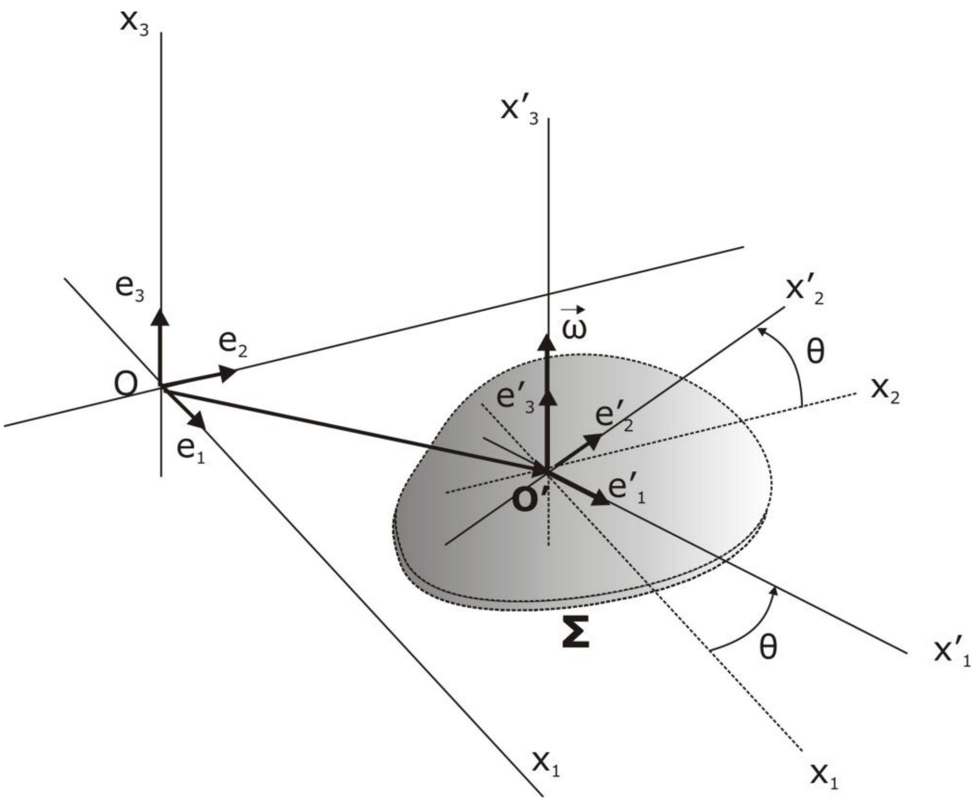
$$\vec{\omega} \equiv \omega\cdot e'_3 = \frac{d\theta}{dt}\cdot e'_3 \tag{14}$$

Η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας ταυτίζεται με το στιγμιαία άξονα περιστροφής $O'x'_3$, του Σ.

Σχόλιο: Από τον παραπάνω ορισμό, εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι η γωνιακή ταχύτητα εξαρτάται τόσο από την επιλογή του αδρανειακού συστήματος ως προς το οποίο μελετάμε την κίνηση του Σ, όσο και από την επιλογή του στερεωμένου στο Σ συστήματος αξόνων. Όπως θα αποδείξουμε στην παράγραφο 1.2Β, η γωνιακή ταχύτητα είναι ανεξάρτητη και από τα δύο! Κάθε χρονική στιγμή η γωνιακή ταχύτητα του Σ έχει την ίδια τιμή ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς και ως προς οποιοδήποτε στερεωμένο στο Σ σύστημα αξόνων την υπολογίσουμε.

Στη συνέχεια, εκφράζουμε με τη βοήθεια της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ τη μεταβολή των διανυσμάτων e'_1, e'_2 των αξόνων του (O',x'_1,x'_2,x'_3), καθώς και την ταχύτητα του j-σωματιδίου του Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3):
Σύμφωνα με τη 13, η 14 γράφεται:

$$\vec{\omega} \equiv \omega\cdot e_3 = \frac{d\theta}{dt}\cdot e_3 \tag{15}$$



Σχήμα 1.2ζ: Κατά την κίνησή του, το άκαμπτο σώμα περιστρέφεται γύρω από τον άξονα $O'x'_3$, του στερεωμένου στο σώμα συστήματος αξόνων (O', x'_1, x'_2, x'_3). Ο άξονας $O'x'_3$ μετατοπίζεται ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x_1, x_2, x_3), παράλληλα με τον άξονα Ox_3. Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ έχει την διεύθυνση του άξονα περιστροφής $O'x'_3$.

Δεδομένου ότι τα διανύσματα e'_1, e'_2, e'_3 είναι μοναδιαία και ορθογώνια μεταξύ τους, ικανοποιούν τις σχέσεις [Ένθετο 1, στο τέλος του κεφαλαίου 1]:

$$\begin{aligned} e'_1 &= e'_2 \times e'_3 = -e'_3 \times e'_2 \\ e'_2 &= e'_3 \times e'_1 \end{aligned} \tag{16}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ και τις σχέσεις 11, 12 και 16, ο ρυθμός μεταβολής των διανυσμάτων e'_1, e'_2 υπολογίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{de'_1}{dt} &= \vec{\omega} \times e'_1 \\ \frac{de'_2}{dt} &= \vec{\omega} \times e'_2 \end{aligned} \tag{17}$$

οπότε, η εξίσωση 9 λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}'_j}{dt} &= x'_{j1} \cdot \frac{de'_1}{dt} + x'_{j2} \cdot \frac{de'_2}{dt} = \\ &= x'_{j1} \cdot \vec{\omega} \times e'_1 + x'_{j2} \cdot \vec{\omega} \times e'_2 = \\ &= \vec{\omega} \times \left(x'_{j1} \cdot e'_1 + x'_{j2} \cdot e'_2 \right) = \\ &= \vec{\omega} \times \vec{r}'_j \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{r}'_j}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}'_j \tag{18}$$

Τελικά, η ταχύτητα $\vec{v}_j$ (j=1,2,…N) του j-σωματιδίου του άκαμπτου σώματος Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), προκύπτει εύκολα από το συνδυασμό των σχέσεων 4 και 18:

$$\vec{v}_j = \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{d\vec{R}_{O'}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_j \tag{19}$$

για κάθε j=1,2,…N.

1.2Β Ιδιότητες της γωνιακής ταχύτητας

Σχόλιο 1: Οι σχέσεις 19 μας δίνουν τη δυνατότητα να υπολογίσουμε, οποιαδήποτε χρονική στιγμή, την ταχύτητα $\vec{v}_j$ κάθε σωματιδίου του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3),: Απαιτείται η ταχύτητα $\vec{V}_{O'} = \frac{d\vec{R}_{O'}}{dt}$ της αρχής O′ του στερεωμένου στο Σ συστήματος (O′,x'_1,x'_2,x'_3) ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), και ο υπολογισμός του εξωτερικού γινομένου $\vec{\omega} \times \vec{r}'_j$. Για τον υπολογισμό του $\vec{\omega} \times \vec{r}'_j$, χρειαζόμαστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\vec{\omega}$, του Σ ως προς το στιγμιαία άξονα O′x'_3 και τα διανύσματα $\vec{r}'_j = x'_{j1} \cdot e'_1 + x'_{j2} \cdot e'_2$. Οι συντεταγμένες x'_{j1}, x'_{j2} των διανυσμάτων $\vec{r}'_j$, ως προς το σύστημα (O′,x'_1,x'_2,x'_3) δεν μεταβάλλονται κατά την κίνηση του Σ. Ωστόσο, ο υπολογισμός απαιτεί και τη γνώση των διανυσμάτων e'_1, e'_2 δηλαδή της γωνίας θ που σχηματίζουν τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, με τα διανύσματα e_1, e_2 του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3) (σχήματα 1.2δ,ε).

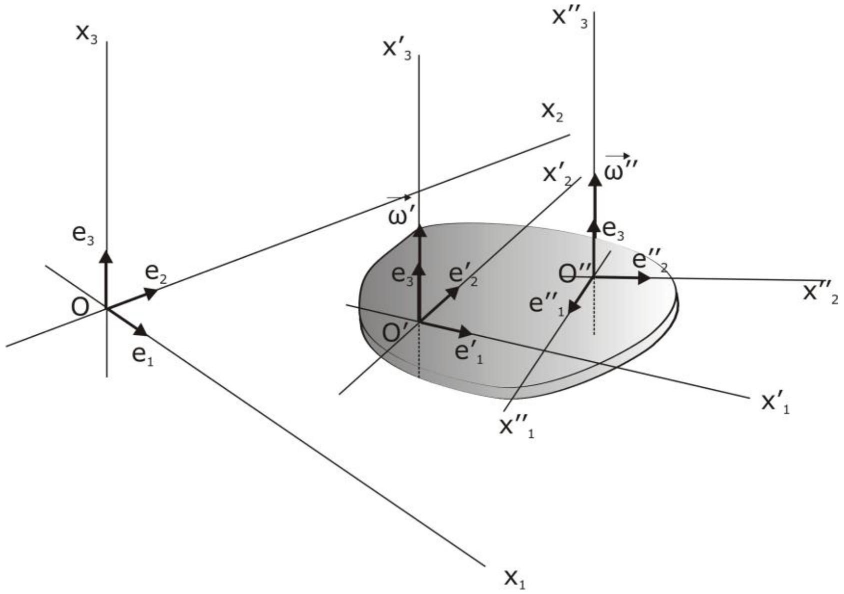
Σχόλιο 2: Οι θέσεις και οι ταχύτητες των σωματιδίων του άκαμπτου σώματος Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), υπολογίζονται από τις σχέσεις 1 και 19, αντίστοιχα. Για το μονοσήμαντο προσδιορισμό τους κάθε χρονική στιγμή, απαιτούνται οι ακόλουθες συναρτήσεις του χρόνου:

1. Η θέση και η ταχύτητα της αρχής O′ του στερεωμένου στο Σ συστήματος (O′,x'_1,x'_2,x'_3)
2. Η γωνία θ που σχηματίζουν οι άξονες O′x'_1, O′x'_2 με τους Ox_1, Ox_2, αντίστοιχα και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του (O′,x'_1,x'_2,x'_3) $\vec{\omega} \equiv \omega \cdot e'_3 = \frac{d\theta}{dt} \cdot e'_3$, ως προς το στιγμιαία άξονα O′x'_3.

Σχόλιο 3: Πρέπει να επισημανθεί ότι η σχέση 19 ισχύει γενικά, για κάθε σημείο που διατηρείται αμετάβλητο ως προς το σύστημα (O′,x'_1,x'_2,x'_3). Έτσι, για ένα σημείο M, **είτε το M είναι σημείο του Σ είτε όχι**, του οποίου οι συντεταγμένες διατηρούνται αναλλοίωτες ως προς το (O′,x'_1,x'_2,x'_3) κατά την κίνηση του Σ, ισχύει η σχέση:

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'M} \tag{20}$$

Σχόλιο 4: Σύμφωνα με τον ορισμό της (σχέση 14), η γωνιακή ταχύτητα προσδιορίζεται ως προς ένα σύστημα αξόνων στερεωμένο στο άκαμπτο σώμα Σ. Εύλογα γεννιέται το ερώτημα:
Η τιμή της γωνιακής ταχύτητας εξαρτάται από την επιλογή του στερεωμένου στο Σ συστήματος (O′,x'_1,x'_2,x'_3); Δηλαδή αν διαλέξουμε ένα άλλο σύστημα (O″,x''_1,x''_2,x''_3),



Σχήμα 1.2η: Τα συστήματα (O',x'_1,x'_2,x'_3) και (O'',x''_1,x''_2,x''_3) είναι στερεωμένα στο Σ. Τη χρονική στιγμή t, συμβολίζουμε με $\vec{\omega}'$ και $\vec{\omega}''$ τη γωνιακή ταχύτητα του Σ ως προς τα δύο συστήματα. Αποδεικνύουμε ότι για κάθε t ισχύει:

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}''$$

επίσης στερεωμένο στο Σ (σχήμα 1.2η), τότε η γωνιακή ταχύτητα ω'' του Σ ως προς αυτό, θα είναι ίδια ή διαφορετική με την ω', ως προς το (O',x'_1,x'_2,x'_3);
Στην πρόταση 1.2.1, που ακολουθεί, θα αποδείξουμε ότι κάθε χρονική στιγμή t η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του άκαμπτου σώματος Σ είναι ανεξάρτητη της επιλογής του στερεωμένου στο Σ συστήματος συντεταγμένων.

Πρόταση 1.2.1
Θεωρούμε το δισδιάστατο άκαμπτο σώμα Σ που κινείται πάνω στο επίπεδο (O,x_1,x_2) του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3), όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2η. Επίσης, θεωρούμε τα συστήματα αξόνων (O',x'_1,x'_2,x'_3) και (O'',x''_1,x''_2,x''_3), που είναι στερεωμένα στο Σ. Συμβολίζουμε με $\vec{\omega}'$ τη γωνιακή ταχύτητα του Σ ως προς το σύστημα (O',x'_1,x'_2,x'_3) και με $\vec{\omega}''$ ως προς το (O'',x''_1,x''_2,x''_3). Τότε ισχύει η σχέση:

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}''$$

<u>Απόδειξη</u>
Τα σημεία O' και O'' είναι στερεωμένα στο σώμα Σ. Επομένως, το O'' έχει σταθερές συντεταγμένες ως προς το σύστημα (O',x'_1,x'_2,x'_3), οπότε εφαρμόζοντας την 20 για το σημείο O'' προκύπτει η σχέση:

$$\frac{d\overrightarrow{OO''}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}' \times \overrightarrow{O'O''}$$

ομοίως, οι συντεταγμένες του O' δεν μεταβάλλονται ως προς το σύστημα (O'',x''_1,x''_2,x''_3) και έχουμε τη σχέση:

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO''}}{dt} + \vec{\omega}'' \times \overrightarrow{O''O'}$$

Αθροίζουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις κατά μέλη και δεδομένου ότι $\overrightarrow{O''O'} = -\overrightarrow{O'O''}$, προκύπτει η:

$$(\vec{\omega}' - \vec{\omega}'') \times \overrightarrow{O'O''} = 0$$

Τα διανύσματα $\vec{\omega}'$ και $\vec{\omega}''$ είναι συγγραμμικά και κάθετα στο $\overrightarrow{O'O''}$, οπότε σύμφωνα με τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου [Ένθετο 1, στο τέλος του κεφαλαίου 1], από την τελευταία σχέση έπεται η:

$$\left|\omega' - \omega''\right| \cdot \left(O'O''\right) = 0$$

όπου (Ο΄Ο΄΄) το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{O'O''}$. Από τη σχέση αυτή συνεπάγεται ότι

$$\omega' = \omega''$$

και αφού τα $\vec{\omega}'$ και $\vec{\omega}''$ είναι συγγραμμικά:

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}'' \tag{21}$$

■

Από την πρόταση 1.1.2 συμπεραίνουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα του άκαμπτου σώματος είναι ανεξάρτητη της επιλογής του στερεωμένου στο σώμα συστήματος συντεταγμένων. **Κάθε χρονική στιγμή**, **η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι ίδια ως προς κάθε στερεωμένο στο Σ σύστημα αναφοράς. Επιπλέον, οι στιγμιαίοι άξονες περιστροφής του Σ, είναι παράλληλοι και ομόρροποι**.
Η παραλληλία των στιγμιαίων αξόνων περιστροφής είναι προφανής για την περίπτωση του δισδιάστατου σώματος, όπου ο στιγμιαίας άξονας περιστροφής είναι πάντοτε παράλληλος με τον άξονα Ox_3, του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3), ως προς το οποίο μελετάμε την κίνηση του Σ. Ωστόσο, η κατεύθυνση του στιγμιαίου άξονα περιστροφής και η γωνιακή ταχύτητα είναι ανεξάρτητα από την επιλογή του στερεωμένου στο άκαμπτο σώμα συστήματος αξόνων και στη γενική περίπτωση της κίνησης τρισδιάστατου άκαμπτου σώματος στον Ευκλείδειο χώρο E_3. Στη γενική περίπτωση, η κατεύθυνση του στιγμιαίου άξονα περιστροφής ταυτίζεται με την κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας η οποία, γενικά, μεταβάλλεται με το χρόνο ως προς το μέτρο αλλά και ως προς την κατεύθυνση [Ένθετο 2 του κεφαλαίου 1]. Το σημαντικό αυτό συμπέρασμα μας επιτρέπει να μιλάμε για «γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του άκαμπτου σώματος Σ», χωρίς να αναφερόμαστε ως προς ποιο στερεωμένο στο σώμα σύστημα συντεταγμένων την υπολογίζουμε.

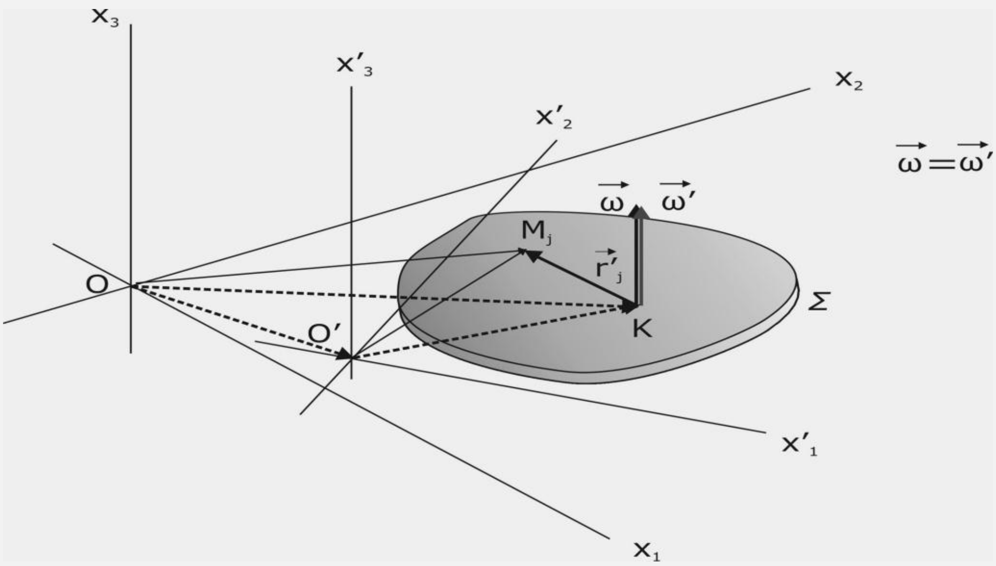
Σχόλιο 5: Σύμφωνα με την πρόταση 1.2.1, η γωνιακή ταχύτητα του Σ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του στερεωμένου στο Σ συστήματος αξόνων. Μένει να εξετάσουμε αν η γωνιακή ταχύτητα του Σ έχει διαφορετικές τιμές όταν υπολογίζεται ως προς ως προς δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Όπως θα αποδείξουμε στην πρόταση 1.2.2, **την ίδια χρονική στιγμή, η γωνιακή ταχύτητα του Σ είναι ίδια ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς**.

Πρόταση 1.2.2
Η γωνιακή ταχύτητα του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ είναι ανεξάρτητη του αδρανειακού συστήματος αναφοράς, ως προς το οποίο μελετάμε την κίνηση του Σ.

<u>Απόδειξη</u>
Στο σχήμα 1.2θ διακρίνονται δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς, τα (O,x_1,x_2,x_3) και το (O',x'_1,x'_2,x'_3). Κ είναι ένα σταθερό, γεωμετρικό σημείο του Σ. Έστω $\vec{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα του Σ ως προς το (O,x_1,x_2,x_3) και $\vec{\omega}'$ ως προς το (O',x'_1,x'_2,x'_3). Σύμφωνα με την 20, για το τυχαίο j-σωματίδιο του Σ που βρίσκεται στο σημείο M_j ισχύουν οι σχέσεις:
Ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3):

$$\frac{d\overrightarrow{OM_j}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OK}}{dt} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{KM_j}$$

και ως προς το αδρανειακό σύστημα (O',x'_1,x'_2,x'_3):



Σχήμα 1.2θ: Οι αδρανειακοί παρατηρητές Ο και Ο', την ίδια χρονική στιγμή, μετρούν την ίδια γωνιακή ταχύτητα για το σώμα Σ.

$$\frac{d\overrightarrow{O'M_j}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O'K}}{dt} + \vec{\omega}' \times \overrightarrow{KM_j}$$

Αφαιρούμε τις δύο σχέσεις κατά μέλη και σύμφωνα με το σχήμα 1.2θ, προκύπτει:

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(\vec{\omega} - \vec{\omega}'\right) \times \overrightarrow{KM_j}$$

$$\left(\vec{\omega} - \vec{\omega}'\right) \times \overrightarrow{KM_j} = 0$$

από την οποία, δεδομένου ότι τα διανύσματα $\vec{\omega}$ και $\vec{\omega}'$ είναι συγγραμμικά και κάθετα στο επίπεδο του Σ, καταλήγουμε ότι (Ένθετο 1 κεφαλαίου 1):

$$\vec{\omega} - \vec{\omega}' = 0$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}'$$

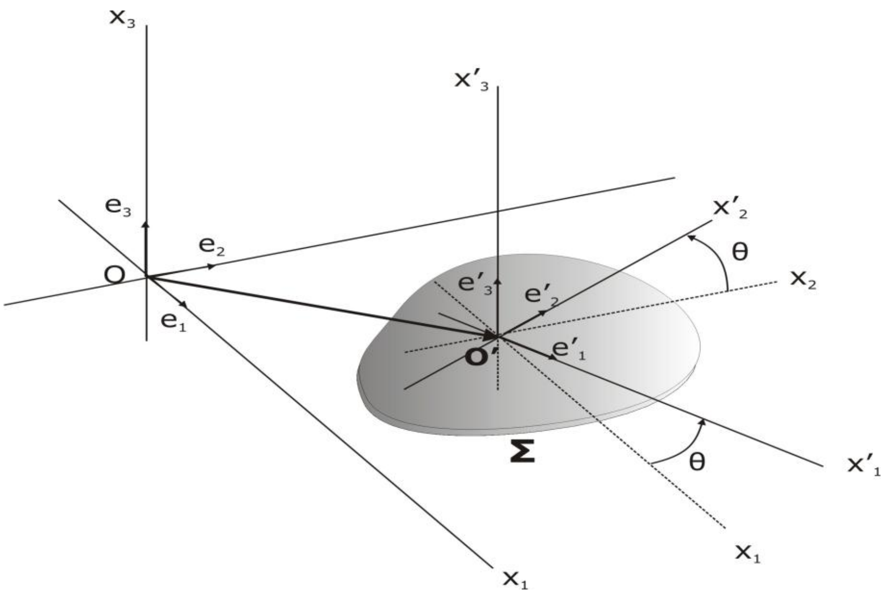
■

1.3 Εξισώσεις κίνησης του άκαμπτου σώματος(6,7,8,9,12,14)

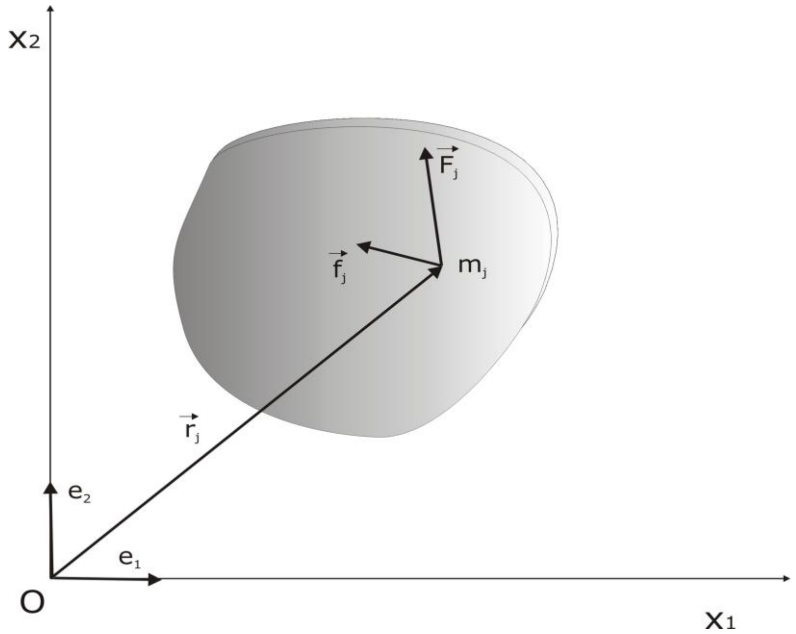
Στην παρούσα ενότητα διαμορφώνουμε τις γενικές διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3). Στις ενότητες 1.1 και 1.2 δείξαμε ότι οι συναρτήσεις του χρόνου που απαιτούνται για να προσδιορίζουμε κάθε χρονική στιγμή τις θέσεις και τις ταχύτητες όλων των σωματιδίων που απαρτίζουν το Σ, είναι μόνο τρεις: Οι συντεταγμένες της αρχής O′ ενός στερεωμένου στο Σ συστήματος αξόνων (O',x'_1,x'_2,x'_3) και η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες $O'x'_1$, $O'x'_2$, με τους Ox_1, Ox_2 (σχήμα 1.3α). Πρέπει να σημειώσουμε ότι η επιλογή του στερεωμένου στο Σ συστήματος (O',x'_1,x'_2,x'_3) είναι αυθαίρετη. Δηλαδή: α) ως αρχή O′ μπορεί να επιλεγεί οποιοδήποτε σημείο, ως προς το οποίο οι σχετικές θέσεις των σωματιδίων του Σ διατηρούνται κατά την κίνηση αναλλοίωτες και β) ο προσανατολισμός των αξόνων $O'x'_1$, $O'x'_2$ ως προς τους άξονες Ox_1, Ox_2 του (O,x_1,x_2,x_3), τη χρονική στιγμή $t=0$ (δηλαδή η τιμή της γωνίας θ για $t=0$), μπορεί να ληφθεί όπως επιθυμούμε.

Πώς θα ξεκινήσουμε;

Το μοντέλο μας εδράζεται στους γενικούς νόμους της Νευτώνειας μηχανικής: Η τροχιά κάθε j-σωματιδίου (j=1,2…N) του άκαμπτου σώματος προκύπτει ως λύση του 2ου νόμου του Newton. Επομένως οι γενικές εξισώσεις κίνησης του Σ θα προκύψουν από το συνδυασμό των επιμέρους εξισώσεων των σωματιδίων του. Ξεκινάμε λοιπόν γράφοντας τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του j-σωματιδίου του Σ. Θα προκύψει ένα τεράστιο σύστημα N εξισώσεων! Ωστόσο οι εξισώσεις αυτές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Υφίστανται των περιορισμών που επιβάλει το μοντέλο του άκαμπτου σώματος, όπως το περιγράψαμε στην ενότητα 1.1. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι υπάρχουν μόνο τρεις ανεξάρτητες μεταξύ τους διαφορικές εξισώσεις, που περιγράφουν πλήρως την κίνηση του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος στο επίπεδο. Έτσι λοιπόν, αξιοποιώντας τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά του μοντέλου του άκαμπτου σώματος θα συνδυάσουμε αυτές τις N εξισώσεις ώστε να προκύψουν οι τρεις που ζητάμε: Οι άγνωστες συναρτήσεις του χρόνου που θα εμπλέκονται σε αυτές, θα είναι οι συντεταγμένες της αρχής O′ στερεωμένου στο Σ συστήματος αξόνων (O',x'_1,x'_2,x'_3) και η γωνία θ που σχηματίζουν οι άξονες $O'x'_1$, $O'x'_2$, με τους Ox_1, Ox_2 του αδρανειακού συστήματος



Σχήμα 1.3α: Η κίνηση του άκαμπτου σώματος Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3) προσδιορίζεται από τη θέση της αρχής O′ του στερεωμένου στο σώμα συστήματος αξόνων (O',x'_1,x'_2,x'_3) και τη γωνία θ.



Σχήμα1.3β: Η κίνηση κάθε σωματιδίου j του άκαμπτου σώματος καθορίζεται από τη συνολική εσωτερική δύναμη $\vec{f}_j$ και τη συνολική εξωτερική δύναμη $\vec{F}_j$, που ασκούνται σε αυτό.

(O,x_1,x_2,x_3), ως προς το οποίο μελετάμε την κίνηση.

1.3Α Οι δύο πρώτες εξισώσεις κίνησης του άκαμπτου σώματος: Κέντρο μάζας

Γράφουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Newton στο τυχαίο j-σωματίδιο του άκαμπτου σώματος Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3). Οι δυνάμεις που ενεργούν στο Σ μπορούν να διακριθούν σε δύο κατηγορίες (παράγραφος 1.1Β): α) στις εσωτερικές, δηλαδή εκείνες που ασκούνται στο j από όλα τα άλλα σωματίδια του Σ και β) στις εξωτερικές, δηλαδή εκείνες που ασκούνται στο j από άλλα σωματίδια ή πεδία, εκτός του Σ (σχήμα 1.3β).

Συμβολίζουμε με $\vec{f}_j$ τη συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων και με $\vec{F}_j$ τη συνισταμένη των εξωτερικών. Αν m_j είναι η μάζα του j-σωματιδίου του Σ, τότε από το 2^o νόμο του Newton, λαμβάνουμε τις εξισώσεις:

$$m_j \cdot \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \vec{f}_j + \vec{F}_j \qquad (1)$$

όπου j=1,2,…N

Οι διανυσματικές εξισώσεις 1 ανάγονται σε ένα σύστημα 2N αλγεβρικών διαφορικών εξισώσεων: Κάθε διάνυσμα $\vec{r}_j$ βρίσκεται στο επίπεδο (O,x_1,x_2) και προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του x_{j1}, x_{j2}, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3):

$$\vec{r}_j = x_{j1} \cdot e_1 + x_{j2} \cdot e_2$$

Στην πρόταση 1.1.1 (Ένθετο 1.1.1), αποδείξαμε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης των σωματιδίων του άκαμπτου σώματος ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{f}_k = 0 \qquad (2)$$

Με βάση τις σχέσεις 2, συνδυάζουμε τις εξισώσεις 1 έτσι ώστε να εξαφανιστούν οι άγνωστες δυνάμεις $\vec{f}_j$. Αθροίζουμε κατά μέρη τις εξισώσεις 1 και δεδομένου ότι οι μάζες των σωματιδίων του σώματος Σ είναι ανεξάρτητες του χρόνου t, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j\right) = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \tag{3}$$

Στο δεξί μέρος της εξίσωσης 3 εμφανίζεται το άθροισμα (συνισταμένη) των **εξωτερικών** δυνάμεων που αναπτύσσονται στο σώμα. Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων προσδιορίζεται από τα δεδομένα του κάθε προβλήματος που καλούμαστε να διαχειριστούμε. Ο ρόλος της είναι πρωταγωνιστικός για τον υπολογισμό των συναρτήσεων του χρόνου, που καθορίζουν την κίνηση του άκαμπτου σώματος. Συμβολίζουμε:

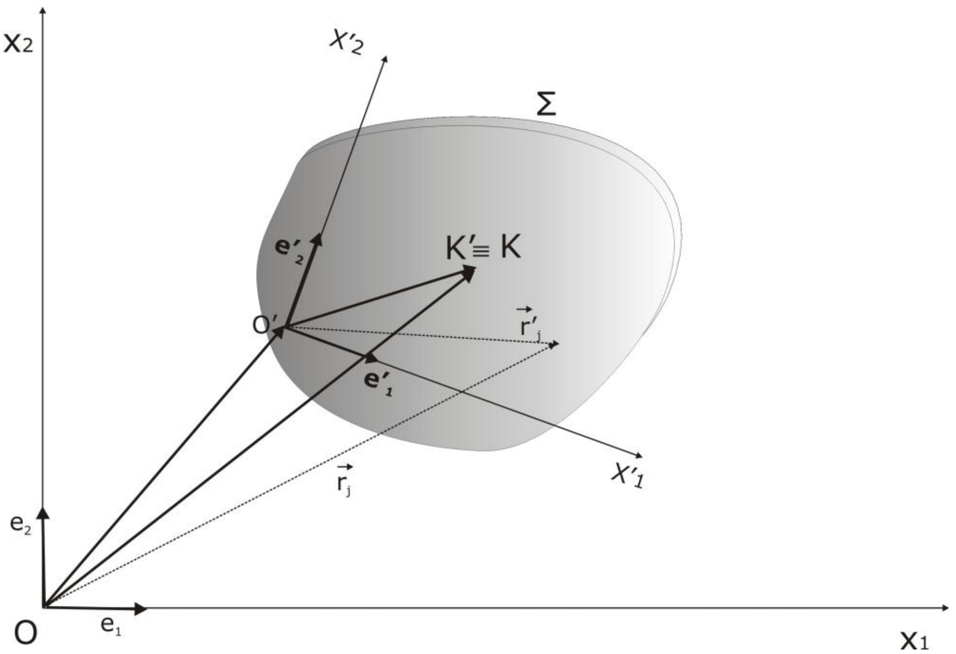
$$\vec{F} \equiv \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \tag{4}$$

Στο αριστερό μέρος της εξίσωσης 3 έχει εμφανιστεί η ποσότητα $\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j$. Μέσω της ποσότητας αυτής, μπορούμε να ορίσουμε ένα σημείο Κ του E_3, του οποίου η θέση ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O, x_1, x_2, x_3), προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{M} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j\right) \tag{5}$$

όπου Μ είναι η ολική μάζα του σώματος Σ:

$$M = \sum_{j=1}^{N} m_j \tag{6}$$



Σχήμα 1.3γ: Το κέντρο μάζας Κ του σώματος Σ είναι σημείο του Ευκλείδειου χώρου E_3, ανεξάρτητο του συστήματος συντεταγμένων ως προς το οποίο το έχουμε προσδιορίσει.

Το σημείο Κ που προσδιορίζεται από το διάνυσμα $\overrightarrow{OK}$, ονομάζεται **κέντρο μάζας** του σώματος Σ. Το κέντρο μάζας του άκαμπτου σώματος έχει δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες, που αναδεικνύονται στην πρόταση 1.3:

Πρόταση 1.3.1
Α) Το κέντρο μάζας είναι ανεξάρτητο του συστήματος αναφοράς, ως προς το οποίο έχει προσδιοριστεί.
Β) Οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας άκαμπτου σώματος Σ ως προς οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων στερεωμένο στο Σ, διατηρούνται σταθερές κατά την κίνηση του Σ.

Απόδειξη

Α) Θεωρούμε δύο συστήματα αναφοράς: Το (O,x_1,x_2) και το (O',x'_1,x'_2). Έστω $\overrightarrow{OK}$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας του Σ, ως προς το σύστημα (O,x_1,x_2) και $\overrightarrow{O'K'}$ ως προς το (O',x'_1,x'_2). Αρκεί να δείξουμε ότι τα Κ και Κ′ ταυτίζονται (Κ≡Κ′).
Σύμφωνα με τον ορισμό του κέντρου μάζας και το σχήμα 1.3γ, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{M}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j\right)$$

$$\overrightarrow{O'K'} = \frac{1}{M}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}'_j\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'K'} &= \frac{1}{M}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}'_j\right) = \frac{1}{M}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot (\vec{r}_j - \overrightarrow{OO'})\right) = \\ &= \frac{1}{M}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j\right) - \frac{1}{M}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N} m_j\right)\cdot\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OO'} = \\ &= \overrightarrow{O'K}\end{aligned}$$

Από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$\overrightarrow{O'K'} = \overrightarrow{O'K} \text{ και } K \equiv K'$$

Δηλαδή το κέντρο μάζας είναι ανεξάρτητο του συστήματος αναφοράς ως προς το οποίο το υπολογίζουμε.

Β) Για να δείξουμε το δεύτερο σκέλος της πρότασης 1.3, θεωρούμε ότι το σύστημα (O',x'_1,x'_2) είναι ένα σύστημα αξόνων στερεωμένο στο Σ. Αρκεί να δείξουμε ότι οι συντεταγμένες x'_{K1}, x'_{K2} του κέντρου μάζας Κ, ως προς το (O',x'_1,x'_2), δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned}\frac{dx'_{K1}}{dt} &= 0 \\ \frac{dx'_{K2}}{dt} &= 0\end{aligned} \qquad (7)$$

Από τον ορισμό του κέντρου μάζας και τις σχέσεις 18 της ενότητας 1.2:

$$\frac{d\vec{r}'_j}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r}'_j$$

προκύπτουν οι διαδοχικές ισότητες (σχήμα 1.3γ):

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{O'K}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\left(\sum_j m_j \cdot \vec{r}'_j\right)\right) = \frac{1}{M}\left(\sum_j m_j \cdot \frac{d}{dt}\vec{r}'_j\right) = \\ &= \frac{1}{M}\left(\sum_j m_j \cdot \left(\vec{\omega}\times\vec{r}'_j\right)\right) = \frac{1}{M}\cdot\vec{\omega}\times\left(\sum_j m_j \cdot \vec{r}'_j\right) =\end{aligned}$$

$$= \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'K} \tag{8}$$

και:

$$\frac{d\overrightarrow{O'K}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'_{K1} \cdot e'_1 + x'_{K2} \cdot e'_2\right) =$$

$$= \frac{dx'_{K1}}{dt} \cdot e'_1 + x'_{K1} \cdot \frac{de'_1}{dt} + \frac{dx'_{K2}}{dt} \cdot e'_2 + x'_{K2} \cdot \frac{de'_2}{dt} =$$

$$= \frac{dx'_{K1}}{dt} \cdot e'_1 + \frac{dx'_{K2}}{dt} \cdot e'_2 + x'_{K1} \cdot \vec{\omega} \times e'_1 + x'_{K2} \cdot \vec{\omega} \times e'_2 = \tag{9}$$

$$= \frac{dx'_{K1}}{dt} \cdot e'_1 + \frac{dx'_{K2}}{dt} \cdot e'_2 + \vec{\omega} \times \left(x'_{K1} \cdot e'_1 + x'_{K2} \cdot e'_2\right) =$$

$$= \frac{dx'_{K1}}{dt} \cdot e'_1 + \frac{dx'_{K2}}{dt} \cdot e'_2 + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O'K}$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις 17 της ενότητας 1.2:

$$\frac{de'_1}{dt} = \vec{\omega} \times e'_1$$

$$\frac{de'_2}{dt} = \vec{\omega} \times e'_2$$

Τα αριστερά μέλη των 8 και 9 είναι ίσα, επομένως είναι ίσα και τα δεξιά. Καταλήγουμε στη σχέση:

$$\frac{dx'_{K1}}{dt} \cdot e'_1 + \frac{dx'_{K2}}{dt} \cdot e'_2 = 0$$

από την οποία, δεδομένου ότι τα μοναδιαία διανύσματα e'_1, e'_2 των αξόνων $O'x'_1$, $O'x'_2$ είναι ορθογώνια (επομένως και γραμμικά ανεξάρτητα), προκύπτουν οι σχέσεις 7.

■

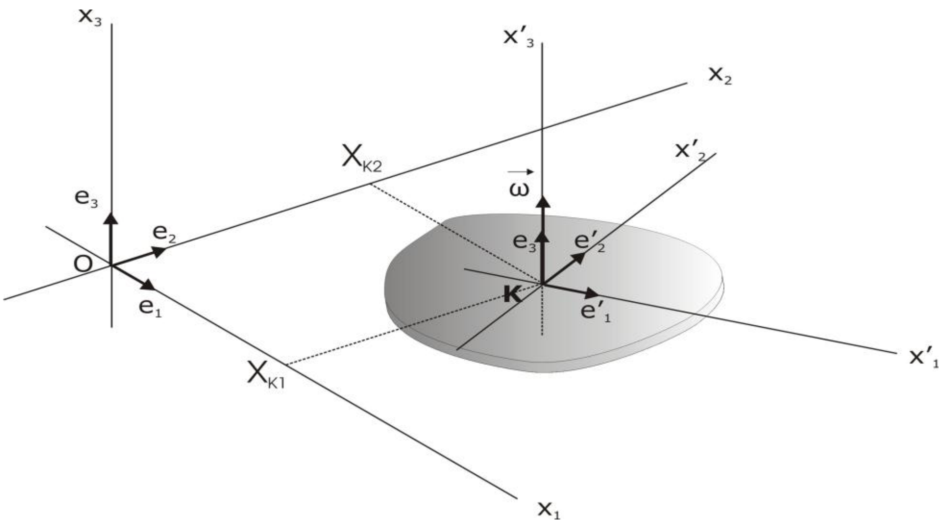
Δείξαμε ότι το κέντρο μάζας Κ του άκαμπτου σώματος Σ, έχει σταθερές συντεταγμένες ως προς το στερεωμένο στο Σ σύστημα (O',x'_1,x'_2). Δηλαδή οι σχετικές θέσεις των σωματιδίων του Σ ως προς το Κ, διατηρούνται σταθερές κατά την κίνηση του σώματος. Επομένως, μπορούμε να επιλέξουμε το Κ ως αρχή του στερεωμένου στο Σ συστήματος αξόνων που θα μας προσδιορίζει κάθε χρονική στιγμή τη θέση του Σ. Κάθε τέτοιο σύστημα, στερεωμένο στο Σ, που έχει αρχή το κέντρο μάζας Κ του Σ, ονομάζεται «**σύστημα κέντρου μάζας του Σ**».

Ποια είναι τα πλεονεκτήματα της επιλογής συστήματος κέντρου μάζας;
Από την εξίσωση 3 και από τον ορισμό του κέντρου μάζας Κ του Σ (σχέση 5), μπορούμε να βρούμε τις διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν οι συντεταγμένες (X_{K1},X_{K2}) του Κ, ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3):

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j\right) = \vec{F}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OK} = \frac{1}{M} \cdot \vec{F} \tag{10}$$

όπου: $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$ είναι η συνολική μάζα του Σ και $\vec{F} \equiv \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j$ είναι η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο Σ.
Αν προβάλλουμε όλα τα διανύσματα που εμφανίζονται στα δύο μέρη της 10, στους άξονες Ox_1 και Ox_2 του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3) (σχήματα 1.3δ,ε) προκύπτουν οι ζητούμενες εξισώσεις:



Σχήμα 1.3δ: Το σύστημα αναφοράς (Κ,x'_1,x'_2,x'_3) είναι στερεωμένο στο Σ και έχει αρχή το κέντρο μάζας Κ του Σ. Οι συντεταγμένες του Κ ως προς το αδρανειακό σύστημα (Ο,x_1,x_2,x_3) ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις 11.

$$\frac{d^2X_{K1}}{dt^2} = \frac{1}{M}\cdot F_1 \qquad \frac{d^2X_{K2}}{dt^2} = \frac{1}{M}\cdot F_2 \tag{11}$$

Συμβολίζουμε με $\vec{V}_K$ την ταχύτητα του Κ ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (Ο,x_1,x_2,x_3):

$$\vec{V}_K = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OK}$$

οπότε οι εξισώσεις 10 και 11 αντίστοιχα γράφονται (σχήμα 1.3ε):

$$\frac{d\vec{V}_K}{dt} = \frac{1}{M}\cdot \vec{F} \tag{10α}$$

$$\frac{dV_{K1}}{dt} = \frac{1}{M}\cdot F_1 \qquad \frac{dV_{K2}}{dt} = \frac{1}{M}\cdot F_2 \tag{11α}$$

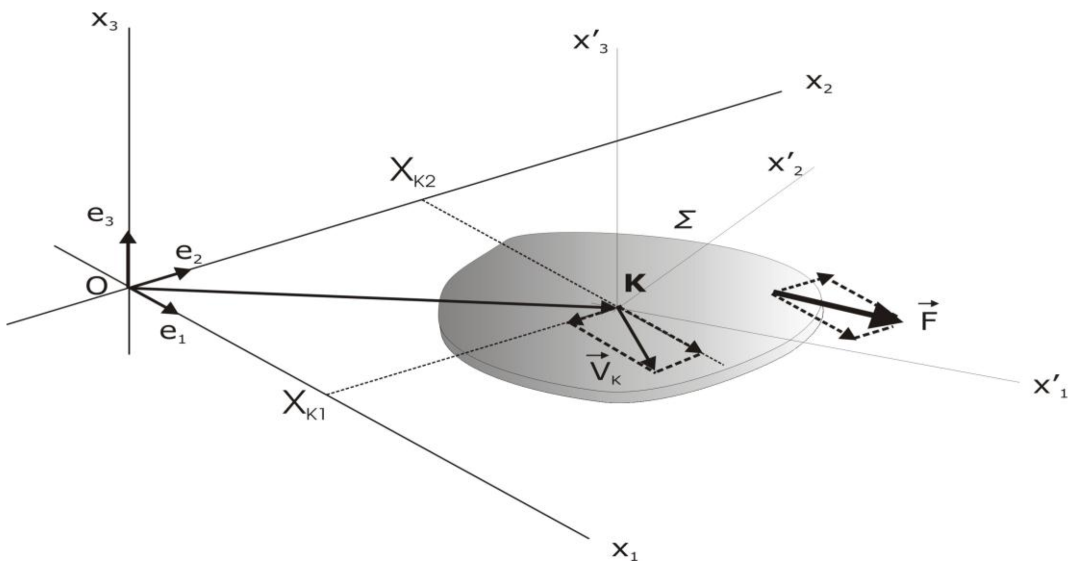
Η ταχύτητα $\vec{V}_K$ σχετίζεται με τις ταχύτητες των σωματιδίων του Σ, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\vec{V}_K = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OK} = \frac{1}{M}\cdot\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} m_j\cdot\vec{r}_j = \frac{1}{M}\cdot\sum_{j=1}^{N} m_j\cdot\vec{v}_j$$

Μια ακόμα ισοδύναμη έκφραση των εξισώσεων 10 ή 11, είναι και η ακόλουθη:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j \tag{12}$$

όπου με $\vec{P}$ συμβολίζουμε την ολική ορμή του σώματος Σ. Ισχύει:



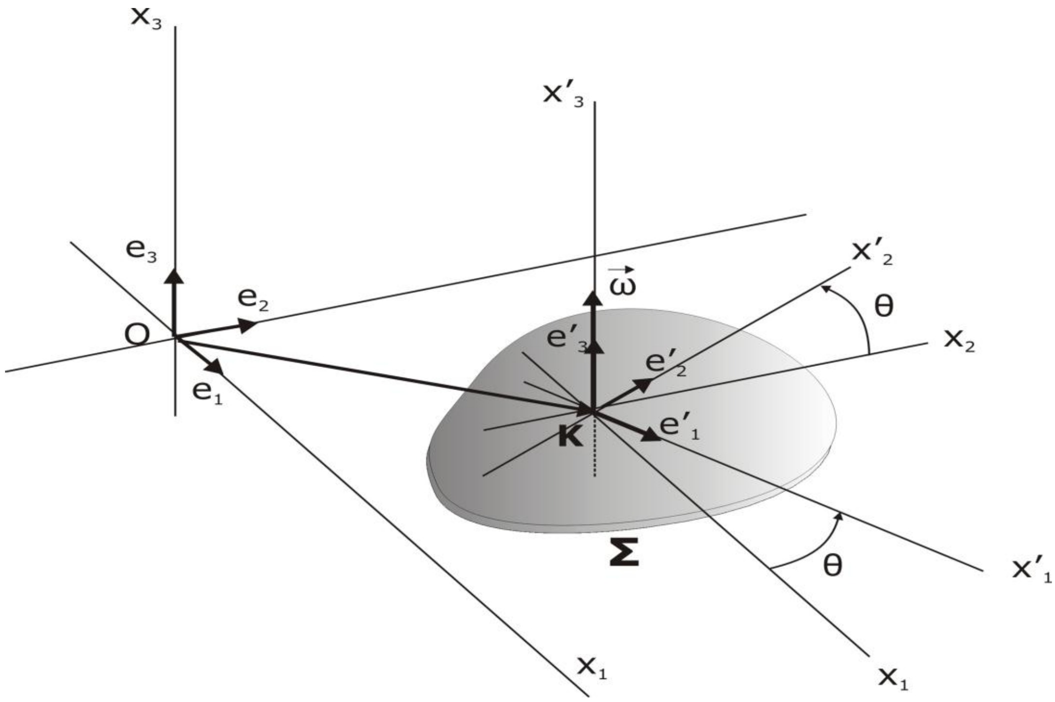
Σχήμα 1.3ε: Η γνώση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης του κέντρου μάζας Κ του Σ, ως προς αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3) απαιτεί μόνο το άθροισμα $\vec{F} \equiv \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j$ των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο Σ.

$$\vec{P} \equiv \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{v}_j = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j = M \cdot \vec{V}_K \qquad (13)$$

Από την 13 βλέπουμε ότι η ολική ορμή του Σ είναι ίση με την ορμή σωματιδίου μάζας $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$, που κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του Σ.

Επισημάνσεις:
Το κέντρο μάζας είναι ένα σημείο του Ευκλείδειου χώρου E_3, που ορίστηκε μέσω της σχέσης 5. Δεν ταυτίζεται πάντοτε με κάποιο σωματίδιο του σώματος. Μπορεί να είναι ένα σημείο που δεν ανήκει στο χώρο που ορίζει το σώμα. Το βασικό χαρακτηριστικό του είναι ότι οι σχετικές θέσεις των σημείων του σώματος είναι σταθερές ως προς αυτό. Επομένως, μπορεί να επιλεγεί ως αρχή στερεωμένου στο σώμα συστήματος αναφοράς - σύστημα «κέντρου μάζας». Το πλεονέκτημα ενός συστήματος κέντρου μάζας είναι ότι οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης των συντεταγμένων της αρχής του - του κέντρου μάζας του σώματος - ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι ίδιες με τις εξισώσεις κίνησης σημείου πάνω στο οποίο ενεργεί δύναμη ίση με το άθροισμα των **εξωτερικών** δυνάμεων που δρουν στο σώμα (εξισώσεις 11).
Αξίζει να σημειωθεί ότι η έννοια του κέντρου μάζας προέκυψε από τους μαθηματικούς χειρισμούς των εξισώσεων του Newton, στην προσπάθειά μας να διαμορφώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις που προσδιορίζουν τη χρονική μεταβολή των βαθμών ελευθερίας του συστήματος, και όχι από την εμπειρική γνώση μας.

Με τη διαμόρφωση των εξισώσεων 11, το πρώτο μέρος του στόχου μας, δηλαδή η γνώση των διαφορικών εξισώσεων κίνησης της αρχής Κ, του στερεωμένου στο Σ συστήματος αξόνων (K,x'_1,x'_2,x'_3) (σχήμα 1.3ζ), έχει ολοκληρωθεί. Μένει να βρούμε και την τρίτη διαφορική εξίσωση, της γωνίας θ που σχηματίζουν τη χρονική στιγμή t τα διανύσματα e'_1, e'_2, των αξόνων Kx'_1, Kx'_2, με τα e_1, e_2, των Ox_1, Ox_2.



Σχήμα 1.3ζ: Το Κ είναι το κέντρο μάζας του Σ. Το σύστημα (Κ,x'_1,x'_2,x'_3) είναι ένα σύστημα κέντρου μάζας, στερεωμένο στο Σ. Η θέση του Σ, κάθε χρονική στιγμή, προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του Κ και τη γωνία θ που σχηματίζουν οι άξονες Κx'_1, Κx'_2, ως προς αδρανειακό σύστημα (Ο,x_1,x_2,x_3).

1.3Β Στροφορμή και Ροπή: Η τρίτη εξίσωση κίνησης του άκαμπτου σώματος

Για να βρούμε την τρίτη και τελευταία διαφορική εξίσωση της κίνησης του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, ξεκινάμε πάλι από τις γενικές εξισώσεις του Newton, που περιγράφουν την κίνηση του τυχαίου j-σωματιδίου του Σ:

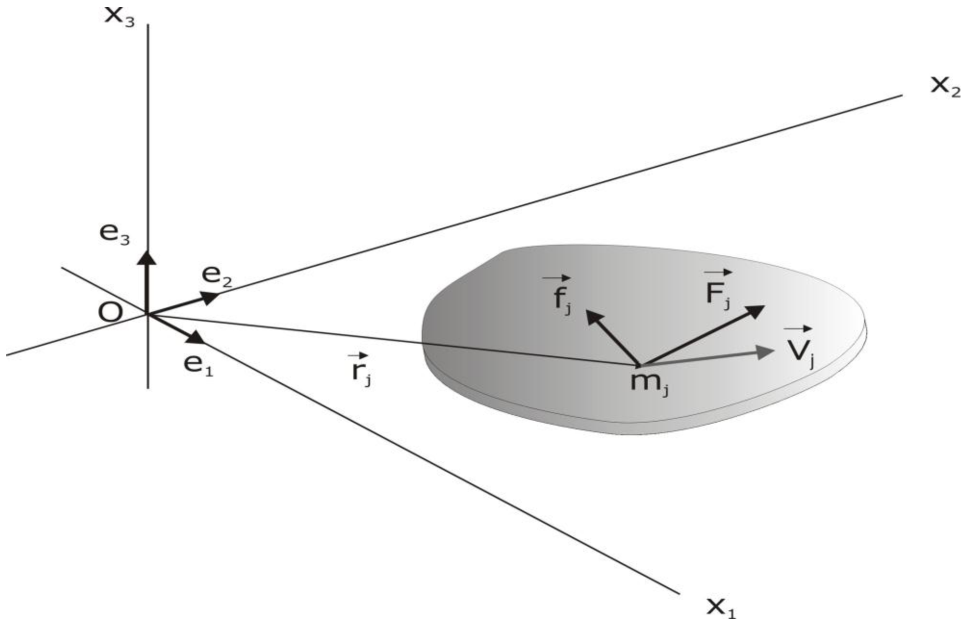
$$m_j \cdot \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \vec{f}_j + \vec{F}_j \qquad (14)$$

όπου $\vec{f}_j$ είναι η συνολική εσωτερική δύναμη που δέχεται το j-σωματίδιο από όλα τα άλλα σωματίδια του Σ και $\vec{F}_j$ είναι η συνολική δύναμη που δέχεται το j-σωματίδιο, από εξωτερικούς παράγοντες, όπως άλλα σώματα, πεδία δυνάμεων κλπ. Όλα τα διανύσματα που εμφανίζονται στη 14 αναφέρονται στο αδρανειακό σύστημα (Ο,x_1,x_2,x_3) (σχήμα 1.3η)

Στην πρόταση 1.1.1 (Ένθετο 1.1.1 της Ενότητας 1.1), έχουμε αποδείξει ότι ισχύει η σχέση:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{f}_j = 0 \qquad (15)$$

Έχοντας κατά νου τη 15, παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε εξωτερικά και τα δύο μέλη της 14 με το $\vec{r}_j$ και αθροίσουμε σε όλα τα σωματίδια του Σ (j=1,2…N), τότε ο όρος που περιέχει τις άγνωστες εσωτερικές δυνάμεις $\vec{f}_j$, μηδενίζεται. Οπότε, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της παραγώγισης και του εξωτερικού γινομένου (Ένθετο 1, στο τέλος του κεφαλαίου 1), βρίσκουμε:



Σχήμα 1.3η: Το διάνυσμα $\vec{f}_j$ παριστάνει τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο j-σωματίδιο από όλα τα άλλα σωματίδια του Σ. Το $\vec{F}_j$ ισούται με το άθροισμα όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο j-σωματίδιο του Σ.

$$\sum_{j=1}^{N}\left(m_j \cdot \vec{r}_j \times \frac{d\vec{v}_j}{dt}\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\vec{r}_j \times \vec{F}_j\right)$$

ή:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\left(m_j \cdot \vec{r}_j \times \vec{v}_j\right) - \sum_{j=1}^{N}\left(m_j \cdot \vec{v}_j \times \vec{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\vec{r}_j \times \vec{F}_j\right)$$

όπου $\vec{v}_j = \frac{d\vec{r}_j}{dt}$ είναι η ταχύτητα του j-σωματιδίου ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3). Δεδομένου ότι $\vec{v}_j \times \vec{v}_j = 0$, καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\left(m_j \cdot \vec{r}_j \times \vec{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{N}\left(\vec{r}_j \times \vec{F}_j\right) \qquad (16)$$

Αν το σώμα Σ είναι **απομονωμένο**, δηλαδή αν σε αυτό δεν ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις ($\vec{F}_j = 0$), τότε το δεξί μέρος της 16 μηδενίζεται και ισχύει:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}(m_j \cdot \vec{r}_j \times \vec{v}_j) = 0$$

Δηλαδή, αν το σώμα είναι απομονωμένο, η ποσότητα $\sum_{j=1}^{N}(m_j \cdot \vec{r}_j \times \vec{v}_j)$ διατηρείται σταθερή κατά την κίνησή του Σ.
Γενικά, από τη 16 προκύπτει ότι, εάν οι εξωτερικές δυνάμεις ικανοποιούν τη συνθήκη $\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{r}_j \times \vec{F}_j\right) = 0$, τότε το μέγεθος $\sum_{j=1}^{N}\left(m_j \cdot \vec{r}_j \times \vec{v}_j\right)$ διατηρείται σταθερό. Απ' ότι φαίνεται τα δύο αυτά μεγέθη θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην κίνηση του Σ, γι' αυτό θα τα ονοματίσουμε και θα τα ορίσουμε αυστηρά.

Ορίζουμε **στροφορμή του j-σωματιδίου του Σ ως προς σύστημα αναφοράς** (O,x_1,x_2,x_3) το μέγεθος:

$$\vec{J}_{(O),j} \equiv m_j \cdot \vec{r}_j \times \vec{v}_j \qquad (17)$$

Δεδομένου ότι το $\vec{p}_j = m_j \cdot \vec{v}_j$, παριστάνει την **ορμή** του j-σωματιδίου, **η στροφορμή** $\vec{J}_{(O),j}$ μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

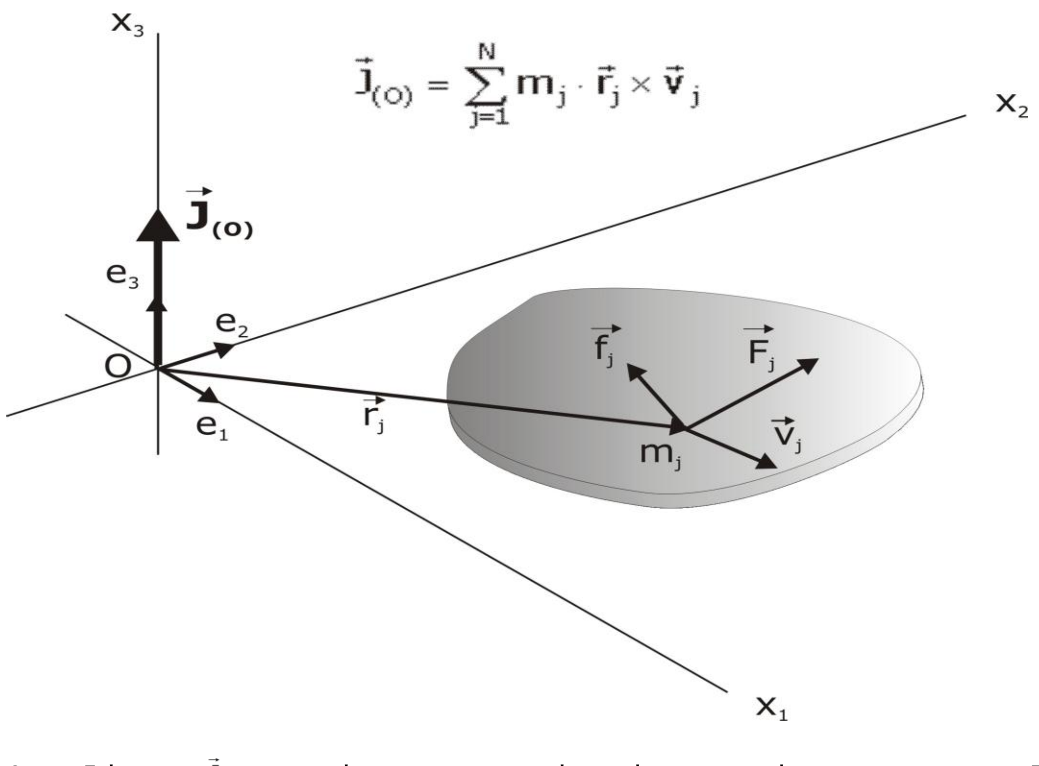
$$\vec{J}_{(O),j} = \vec{r}_j \times \vec{p}_j \qquad (17α)$$

Δηλαδή, η στροφορμή $\vec{J}$ ενός σωματιδίου, ως προς σύστημα αναφοράς (O,x_1,x_1,x_3) ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο της θέσης του $\vec{r}$ επί την ορμή του $\vec{p}$, ως προς το (O,x_1,x_1,x_3):

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (17β)$$

Το εξωτερικό γινόμενο είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των δύο διανυσμάτων, από τα οποία ορίζεται (Ένθετο 1, στο τέλος του κεφαλαίου 1). Στην περίπτωση του δισδιάστατου σώματος, που μελετάμε, όλα τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_j$ και οι ταχύτητες $\vec{v}_j$ των j-σωματιδίων του Σ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο (O,x_1,x_2). Επομένως οι στροφορμές $\vec{J}_{(O),j}$ των j-σωματιδίων (j=1,2…N) του Σ είναι κάθετες στο επίπεδο (O,x_1,x_2). Άρα έχουν την ίδια διεύθυνση: είναι παράλληλες με τον άξονα Ox_3 του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3).

Ορισμός της στροφορμής σώματος, ή συστήματος σωματιδίων: Η στροφορμή σώματος Σ, ή συστήματος σωματιδίων, ως προς σύστημα αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3) ισούται



Σχήμα 1.3θ: Το διάνυσμα $\vec{J}_{(O)}$ παριστάνει τη στροφορμή του άκαμπτου σώματος ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3).

με το άθροισμα των στροφορμών των σωματιδίων που το απαρτίζουν, ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς:

$$\vec{J}_{(O)} \equiv \sum_{j=1}^{N} \vec{J}_{(O),j} = \sum_{j=1}^{N} \left(m_j \cdot \vec{r}_j \times \vec{v}_j \right) = \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{r}_j \times \vec{p}_j \right) \tag{18}$$

Είδαμε ότι για την περίπτωση του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, που μελετάμε, οι στροφορμές $\vec{J}_{(O),j}$, j=1,2…N των j-σωματιδίων του είναι παράλληλες με τον άξονα Ox_3 του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3). Έπεται ότι και η (ολική) στροφορμή $\vec{J}_{(O)}$ του Σ είναι και αυτή παράλληλη με τον άξονα Ox_3 (σχήμα 1.3θ).

Ορισμός της ροπής δύναμης: Ορίζουμε **ροπή της δύναμης** $\vec{F}_j$ που ενεργεί στο j-σωματίδιο, **ως προς σύστημα αναφοράς** (O,x_1,x_2,x_3), το μέγεθος:

$$\vec{\tau}_{(O),j} \equiv \vec{r}_j \times \vec{F}_j \tag{19}$$

Γενικά, η ροπή $\vec{\tau}$ δύναμης $\vec{F}$ που έχει σημείο εφαρμογής το σημείο με διάνυσμα θέσης το $\vec{r}$, ως προς το σύστημα αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3), ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ επί τη δύναμη $\vec{F}$:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{19α}$$

Η **ολική ροπή** των δυνάμεων $\vec{F}_j$, j=1,2,…N, που ασκούνται στο σώμα Σ, ως προς το (O,x_1,x_2,x_3) ισούται με το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων, ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς:

$$\vec{\tau}_{(O)} = \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{r}_j \times \vec{F}_j \right) \tag{20}$$

Σύμφωνα με τους ορισμούς της στροφορμής του σώματος Σ και της ροπής των δυνάμεων που ενεργούν σε αυτό, η τρίτη εξίσωση κίνησης του Σ (εξίσωση 16), ως προς το **αδρανειακό** σύστημα αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3), γράφεται ως εξής:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = \vec{\tau}_{(O)} \tag{21}$$

όπου η στροφορμή $\vec{J}_{(O)}$ και η ολική ροπή $\vec{\tau}_{(O)}$, υπολογίζονται από τις σχέσεις 18 και 20, αντίστοιχα.

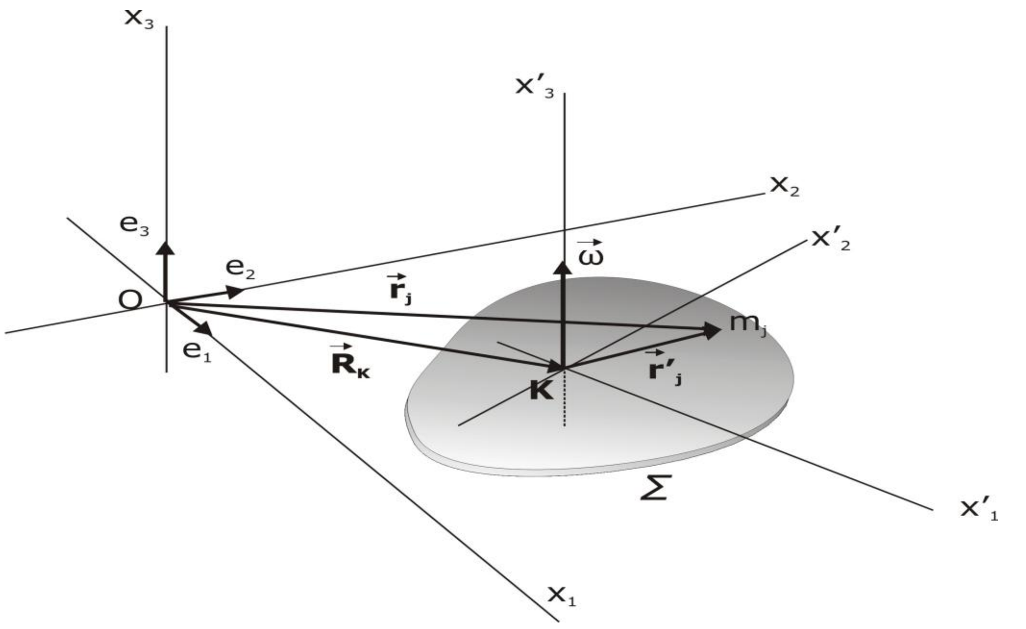
Η εξίσωση 21 είναι απαλλαγμένη από τις άγνωστες εσωτερικές δυνάμεις με τις οποίες αλληλεπιδρούν τα σωματίδια του Σ. Επιπλέον, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια στην εξίσωση 21 εμπλέκεται ως βασική μεταβλητή ο τρίτος βαθμός ελευθερίας που προσδιορίζει τη θέση του Σ κάθε χρονική στιγμή, ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3). Δηλαδή η γωνία θ που σχηματίζουν οι άξονες $O'x'_1$, $O'x'_2$ στερεωμένου στο Σ συστήματος αξόνων με τους άξονες Ox_1, Ox_2 του (O,x_1,x_2,x_3). Δεδομένου ότι στις δύο πρώτες διαφορικές εξισώσεις κίνησης του άκαμπτου σώματος (11) δεν εμπλέκεται η γωνία θ, η εξίσωση 21 είναι ανεξάρτητη από αυτές. Οι εξισώσεις 11 μαζί με την 21 περιγράφουν πλήρως την κίνηση του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος, κάτω από τις προϋποθέσεις του μοντέλου μας.

Σχόλιο: Πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα η γενικότητα της εξίσωσης 21: Αν και η αναλυτική έκφραση τόσο της στροφορμής του Σ, όσο και της ολικής ροπής των δυνάμεων που ενεργούν σε αυτό, συναρτώνται με την επιλογή του αδρανειακού συστήματος αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3), **η εξίσωση 21 ισχύει για κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς**. [Στο 1.3.2, καθώς και στο Ένθετο 3, στο τέλος του κεφαλαίου 1, δείχνουμε πώς μεταβάλλεται η στροφορμή του Σ και η ολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό, όταν τις υπολογίζουμε ως προς δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς]

Μετασχηματισμός της εξίσωσης 21

Πώς θα μετασχηματίσουμε την εξίσωση 21, ώστε να εμφανιστεί ως βασική μεταβλητή η γωνία θ, που προσδιορίζει κάθε χρονική στιγμή την περιστροφή του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3)*;*

Αρκεί να εφαρμόσουμε τον ορισμό της στροφορμής του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ και να την υπολογίσουμε συναρτήσει της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$ του Σ. Η γωνιακή ταχύτητα ισούται με το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζουν οι άξονες Kx'_1, Kx'_2 οποιουδήποτε (πρόταση 1.2.1) στερεωμένου στο Σ συστήματος αξόνων ως προς τους άξονες Ox_1, Ox_2 του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3) (παράγραφος 1.2Α). Επομένως, πρέπει να επιλέξουμε ένα σύστημα αξόνων στερεωμένο στο Σ, και να κάνουμε τους σχετικούς υπολογισμούς, με βάση τις σχέσεις 18, 20 και 21. Γνωρίζουμε ήδη τις εξισώσεις κίνησης του κέντρου μάζας Κ του Σ (παράγραφος 1.3Α). Επομένως, φαίνεται ότι είναι μια καλή επιλογή να επιλέξουμε για τους υπολογισμούς μας ένα σύστημα κέντρου μάζας, στερεωμένο στο Σ. Στο σχήμα 1.3ι, το σύστημα κέντρου μάζας που έχουμε επιλέξει είναι το (K,x'_1,x'_2,x'_3). Όπου ο αρχικός προσανατολισμός (τη



Σχήμα 1.3ι: Κ είναι το κέντρο μάζας του Σ. Τα διανύσματα θέσης $\vec{r}'_j$ των σωματιδίων του Σ ως προς το στερεωμένο στο Σ σύστημα αξόνων (K,x'_1,x'_2,x'_3) ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\vec{r}'_j = \vec{r}_j - \vec{R}_K$$

$$\frac{d\vec{r}'_j}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}'_j$$

(σχέσεις 1.2.18, παράγραφος 1.2Α)

στιγμή t=0) των αξόνων Kx'_1, Kx'_2 επιλέγεται αυθαίρετα.

Η στροφορμή του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3) υπολογίζεται από τη σχέση 18. Γράφουμε:

$$\vec{J}_{(O)}=\sum_{j=1}^{N}m_j\cdot(\vec{r}_j\times\vec{v}_j) \qquad (22)$$

Με τη βοήθεια του σχήματος 1.3ι και τις σχέσεις 1.2.19 της παραγράφου 1.2Α, η στροφορμή εκφράζεται διαδοχικά με τις παραστάσεις:

$$\begin{aligned}\vec{J}_{(O)}&=\sum_{j=1}^{N}m_j\cdot(\vec{r}_j\times\vec{v}_j)=\\&=\sum_{j=1}^{N}m_j\cdot\left((\overrightarrow{OK}+\vec{r}'_j)\times(\vec{V}_K+\vec{\omega}\times\vec{r}'_j)\right)=\\&=M\cdot\overrightarrow{OK}\times\vec{V}_K+\sum_{j=1}^{N}m_j\cdot\left(\vec{r}'_j\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'_j)\right)\end{aligned} \qquad (23)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\sum_{j=1}^{N}m_j\cdot\vec{r}'_j=0$, που προκύπτει από τον ορισμό του κέντρου μάζας όταν η αρχή του συστήματος αξόνων ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του Σ (παράγραφος 1.3Α και Ένθετο 4 του κεφαλαίου 1, βοηθητική πρόταση 2).

Σύμφωνα με τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου (Ένθετο 4 του κεφαλαίου 1, βοηθητική πρόταση 1), για κάθε $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}\in E_3$ ικανοποιούνται οι ταυτότητες:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

και

$$\vec{a}\times\vec{a}=0$$

οπότε, από την 23 λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\vec{J}_{(O)}=M\cdot\overrightarrow{OK}\times\vec{V}_K+\left(\sum_{j=1}^{N}m_j\cdot r_j'^2\right)\cdot\vec{\omega}-\sum_{j=1}^{N}m_j\cdot(\vec{r}'_j\cdot\vec{\omega})\cdot\vec{r}'_j \qquad (24)$$

Ο τελευταίος όρος στο δεξί μέλος της 24, στη γενική περίπτωση της κίνησης άκαμπτου σώματος στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο E_3 δεν είναι μηδενικός. Στην περίπτωση όμως της κίνησης δισδιάστατου άκαμπτου σώματος στο επίπεδο που μελετάμε, η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του Σ είναι πάντοτε κάθετη στο επίπεδο (O,x_1,x_2) (παράγραφος 1.2Α). Επομένως, τα διανύσματα $\vec{\omega}$ και $\vec{r}'_j$ είναι πάντοτε κάθετα μεταξύ τους και τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{r}'_j\cdot\vec{\omega}$ είναι ίσα με το μηδέν για κάθε j=1,2…N:

$$\vec{r}'_j\cdot\vec{\omega}=0$$

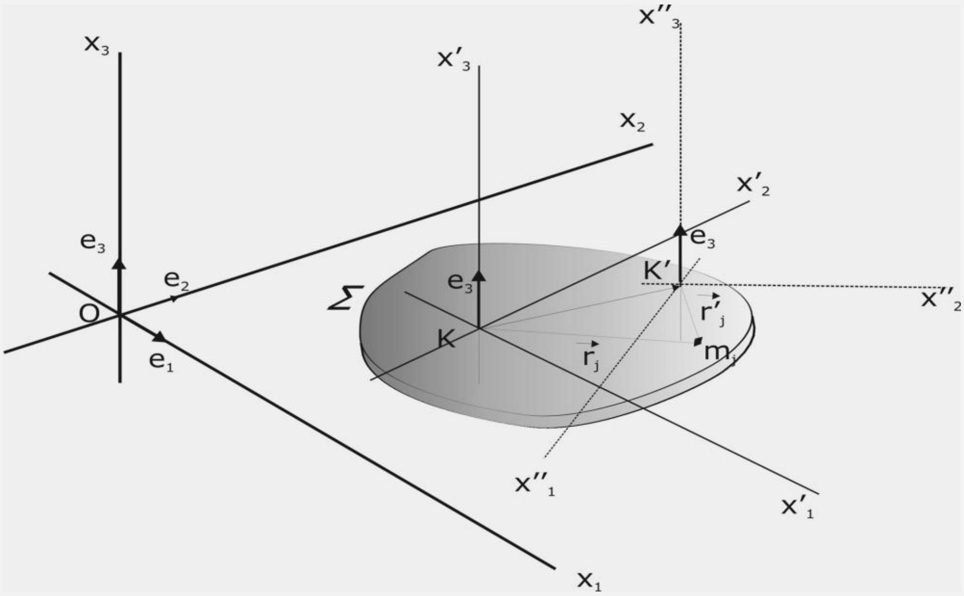
Ώστε ο τελευταίος όρος του δεξιού μέρους της 24 μηδενίζεται και η στροφορμή του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3) εκφράζεται με τη σχέση:

$$\vec{J}_{(O)}=M\cdot\overrightarrow{OK}\times\vec{V}_K+\left(\sum_{j=1}^{N}m_j\cdot r_j'^2\right)\cdot\vec{\omega} \qquad (25)$$

Κατά την κίνηση του σώματος Σ, τα μέτρα r'_j των διανυσμάτων θέσης $\vec{r}'_j$ των σωματιδίων του Σ, ως προς το στερεωμένο σε αυτό, σύστημα αξόνων (K,x'_1,x'_2,x'_3) δεν

Ένθετο 1.3.1

Θεώρημα του Steiner



Έστω I_K η ροπή αδράνειας του άκαμπτου σώματος Σ ως προς τον άξονα Κx'₃, που είναι κάθετος στο επίπεδο του Σ και διέρχεται από το κέντρο μάζας του Κ. Αν $I_{K'}$ είναι η ροπή αδράνειας του Σ ως προς άξονα Κ'x'₃, παράλληλο με τον Κx'₃, τότε ισχύει η σχέση:

$$I_{K'} = I_K + M \cdot (KK')^2$$

όπου: $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$

Απόδειξη:
Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας και τη βοηθητική πρόταση 2 του Ενθέτου 4, στο τέλος του κεφαλαίου 1, ισχύουν οι σχέσεις:

$$I_K \equiv \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j'^2 = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \left(\vec{r}_j - \overrightarrow{KK'}\right)^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j^2 + M \cdot (KK')^2 - 2 \cdot \overrightarrow{KK'} \cdot \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j =$$
$$= I_K + M \cdot (KK')^2$$

■

μεταβάλλονται. Επομένως, ο όρος $\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j'^2$, που εμφανίζεται στο δεξί μέρος της 25, έχει σταθερή τιμή -διατηρείται αναλλοίωτος- κατά την κίνηση του Σ. Η τιμή του εξαρτάται αποκλειστικά από το σχήμα, τη μάζα και τον τρόπο κατανομής της, του σώματος Σ. Ο όρος αυτός μας οδηγεί στον ορισμό ενός νέου φυσικού μεγέθους, που εμπλέκεται στην περιγραφή της κίνησης του άκαμπτου σώματος και ονομάζεται **ροπή αδράνειας**.

Γενικά, ορίζουμε ως **ροπή αδράνειας άκαμπτου σώματος Σ ως προς τον άξονα γγ'** την ποσότητα:

$$I_{(\gamma\gamma')} \equiv \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \rho_j^2 \qquad (26)$$

όπου ρ_j **η απόσταση του j-σωματιδίου του Σ από τον άξονα yy′**.

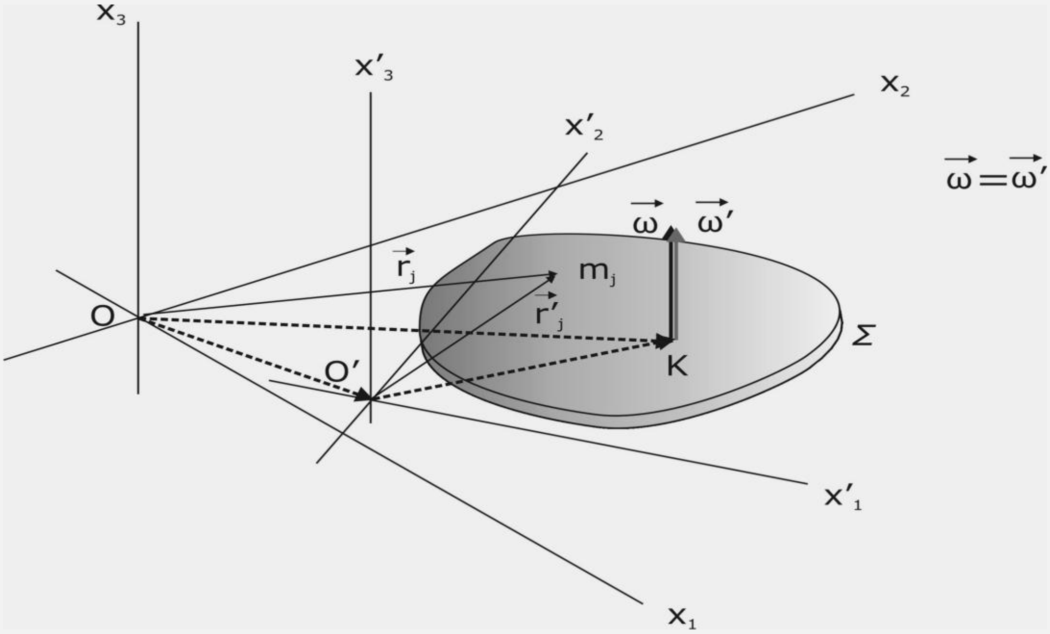
Στην περίπτωση του δισδιάστατου σώματος Σ, η απόσταση ρ_j κάθε σωματιδίου του Σ από τον άξονα περιστροφής Κx′$_3$, ταυτίζεται με το μέτρο του διανύσματος θέσης του $r'_j = |\vec{r}'_j|$ ως προς το στερεωμένο στο Σ σύστημα αξόνων κέντρου μάζας (Κ,x′$_1$,x′$_2$,x′$_3$).

Έτσι, ο όρος $\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r'^2_j$, στη σχέση 25 είναι η ροπή αδράνειας του δισδιάστατου,

Ένθετο 1.3.2

Πώς μεταβάλλεται η στροφορμή όταν υπολογίζεται ως προς δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς;

Θεωρούμε τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς (O,x$_1$,x$_2$,x$_3$) και (O′,x′$_1$,x′$_2$,x′$_3$). Σύμφωνα με τον ορισμό της στροφορμής ισχύουν οι σχέσεις (βλέπε σχήμα):



$$\vec{J}_{(O')} = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}'_j \times \vec{v}'_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \left(\vec{r}_j - \overrightarrow{OO'}\right) \times \left(\vec{v}_j - \vec{V}_{O'}\right) =$$
$$= \vec{J}_{(O)} - M \cdot \vec{V}_K \times \vec{V}_{O'} - M \cdot \overrightarrow{OO'} \times \left(\vec{V}_K - \vec{V}_{O'}\right)$$

(Ε1)

Ώστε δύο αδρανειακοί παρατηρητές μετράνε διαφορετική στροφορμή για το άκαμπτο σώμα Σ, την ίδια χρονική στιγμή.

Εξ άλλου, από τη σχέση 28, προκύπτει:

$$\vec{J}_{(O')} = M \cdot \overrightarrow{O'K} \times \vec{V}'_K + I_K \cdot \vec{\omega}' =$$
$$= \vec{J}_{(O)} - I_K \cdot \vec{\omega} - M \cdot \overrightarrow{OO'} \times \left(\vec{V}_K - \vec{V}_{O'}\right) - \overrightarrow{OK} \times \vec{V}_{O'} + I_K \cdot \vec{\omega}'$$

(Ε2)

[Κ είναι το κέντρο μάζας και Μ η μάζα του Σ. Τα μεγέθη με τόνους υπολογίζονται ως προς το αδρανειακό σύστημα (O′,x′$_1$,x′$_2$,x′$_3$)]

Από το συνδυασμό των Ε1 και Ε2, συνάγουμε εύκολα ότι:

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}$$

Δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα, είναι ανεξάρτητη του αδρανειακού συστήματος αναφοράς, ως προς το οποίο μελετάμε την κίνηση του Σ (βλέπε πρόταση 2.1.2).

■

άκαμπτου σώματος Σ, ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από το κέντρο μάζας Κ του Σ. Τη συμβολίζουμε με I_K:

$$I_K \equiv \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j'^2 \qquad (27)$$

Σύμφωνα με την 27, η στροφορμή του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), (σχέση 25), εκφράζεται με τη σχέση:

$$\vec{J}_{(O)} = M \cdot \overrightarrow{OK} \times \vec{V}_K + I_K \cdot \vec{\omega} \qquad (28)$$

όπου I_K είναι η ροπή αδράνειας του Σ ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο μάζας Κ του Σ. Η ροπή αδράνειας I_K διατηρείται αμετάβλητη κατά την κίνηση του Σ[1]: $\frac{dI_K}{dt} = 0$

Υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3)

Με βάση τη σχέση 28, υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3) και δίνουμε μια ποιο ειδική μορφή στην εξίσωση κίνησης 21.

Έχοντας κατά νου ότι

$$\vec{V}_K = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OK}$$

είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας (Κ) του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), παραγωγίζουμε την 28 και λαμβάνουμε:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = M \cdot \vec{V}_K \times \vec{V}_K + \overrightarrow{OK} \times \left(M \cdot \frac{d\vec{V}_K}{dt} \right) + I_K \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

όμως

$$\vec{V}_K \times \vec{V}_K = 0$$

οπότε η τελευταία παράσταση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = \overrightarrow{OK} \times \left(M \cdot \frac{d\vec{V}_K}{dt} \right) + I_K \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (29)$$

---

[1] Το αναλλοίωτο της ροπής αδράνειας κατά την κίνηση του Σ, μπορεί να αποδειχθεί και με άμεσο υπολογισμό του ρυθμού μεταβολής της:

$$\frac{dI_K}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j'^2 \right) = 2 \cdot \sum_{j=1}^{N} \left(m_j \cdot \vec{r}_j' \cdot \frac{d\vec{r}_j'}{dt} \right)$$

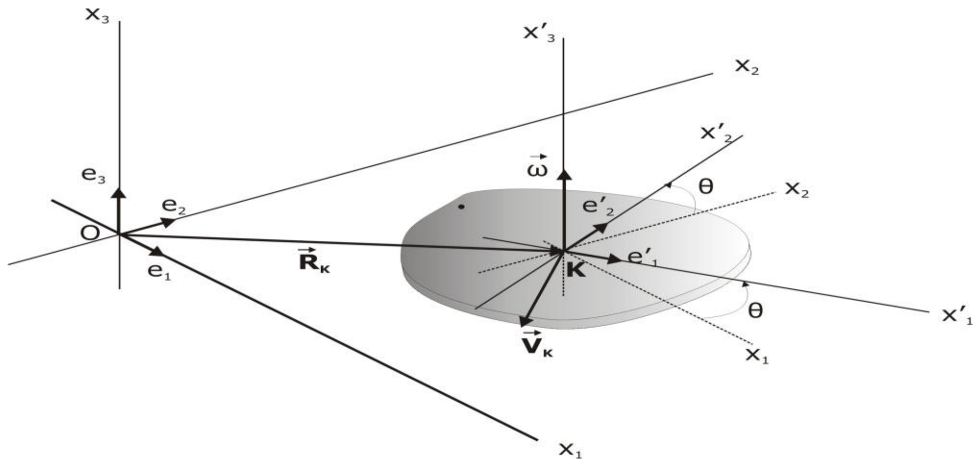
όπως έχουμε δείξει, ο ρυθμός μεταβολής των διανυσμάτων θέσης $\vec{r}_j'$, ως προς το στερεωμένο στο Σ σύστημα (K,x'_1,x'_2,x'_3) είναι:

$$\frac{d\vec{r}_j'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_j'$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{dI_K}{dt} = 2 \cdot \sum_{j=1}^{N} \left(m_j \cdot \vec{r}_j' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_j') \right)$$

Σύμφωνα με τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου (Ένθετο 1), το διάνυσμα $\vec{\omega} \times \vec{r}_j'$ είναι κάθετο στο $\vec{r}_j'$ και επομένως το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν: $\vec{r}_j' \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_j') = 0$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει αμέσως η 1.44.



Σχήμα 1.3κ: Η κίνηση του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, στο επίπεδο (O,x_1,x_2), καθορίζεται από τις συναρτήσεις $\vec{V}_K(t)=\dfrac{d\vec{R}_K(t)}{dt}$ και $\omega(t)=\dfrac{d\theta(t)}{dt}$. Το K είναι το κέντρο μάζας του Σ. θ είναι η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες Kx'_1, Kx'_2, του στερεωμένου στο Σ συστήματος (K,x'_1,x'_2,x'_3), με τους Ox_1, Ox_2, του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3).

Ο όρος μέσα στην παρένθεση, στο δεξί μέρος της 29, μας είναι ήδη γνωστός (εξίσωση κίνησης του κέντρου μάζας K του Σ, παράγραφος 1.3Α, εξίσωση 10α): Ισούται με τη συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο Σ:

$$M\cdot\frac{d\vec{V}_K}{dt}=\vec{F} \qquad (30)$$

Αντικαθιστούμε στην 29 και καταλήγουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής $\vec{J}_{(O)}$ του Σ δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt}=\overrightarrow{OK}\times\vec{F}+I_K\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (31)$$

Στο δεξί μέρος της 31 εμφανίζεται ο ρυθμός μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του Σ, γνωστός και ως **γωνιακή επιτάχυνση ω′** του Σ:

$$\vec{\omega}'\equiv\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Εκφράζουμε την εξίσωση κίνησης 21 με άγνωστη συνάρτηση τη γωνιακή ταχύτητα ω

Συνδυάζουμε τις εξισώσεις κίνησης 21 και 10α με τη σχέση 31:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt}=\vec{\tau}_{(O)} \qquad (32)$$

[όπου:

$$\vec{\tau}_{(O)}=\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{r}_j\times\vec{F}_j\right) \qquad (33)$$

είναι ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων $\vec{F}_j$ που ενεργούν στο Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3)]

Η εξίσωση κίνησης του κέντρου μάζας (K) του Σ (εξίσωση 10α της παραγράφου 1.3Α) γράφεται:

$$M \cdot \frac{d\vec{V}_K}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \tag{34}$$

Από τις 31, 32, 33 και 34 λαμβάνουμε την εξίσωση:

$$\overrightarrow{OK} \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j + I_K \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{r}_j \times \vec{F}_j \right) \tag{32α}$$

Σύμφωνα με το σχήμα 1.3λ ισχύει:

$$\vec{r}_j = \overrightarrow{OK} + \vec{r}'_j$$

οπότε, η 32α μετασχηματίζεται στην:

$$I_K \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}'_j \times \vec{F}_j \tag{35}$$

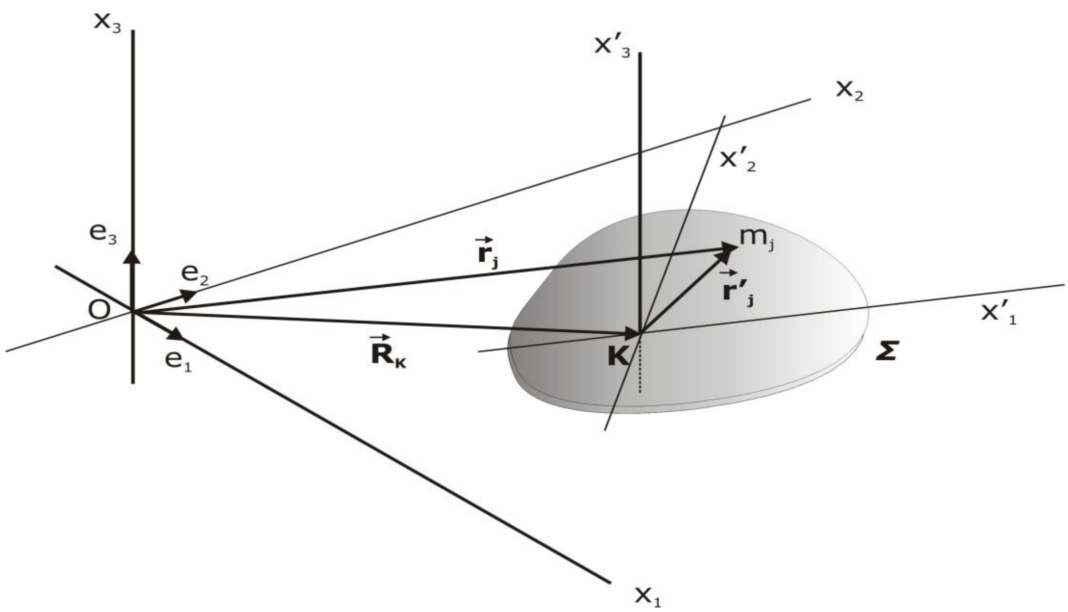
ή:

$$I_K \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_{(K)} \tag{35α}$$

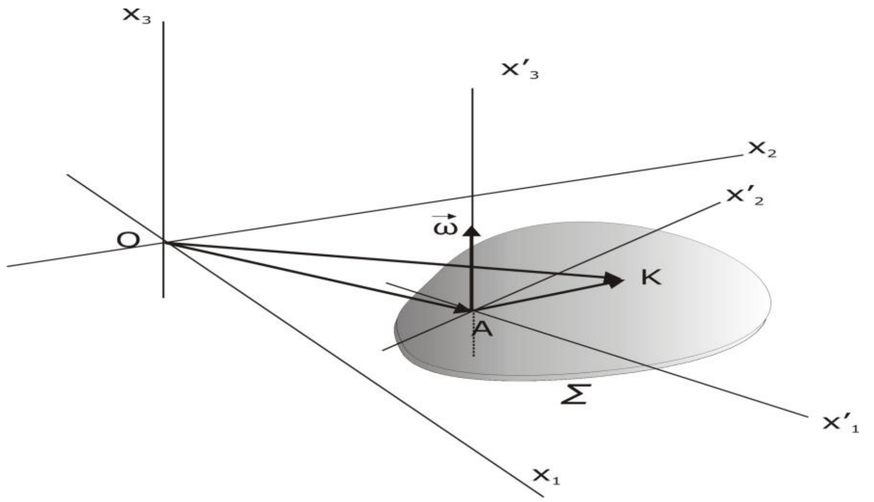
όπου:

$$\vec{\tau}_{(K)} \equiv \sum_{j=1}^{N} \vec{r}'_j \times \vec{F}_j \tag{36}$$

$\vec{\tau}_{(K)}$ είναι η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο Σ, ως προς σύστημα συντεταγμένων στερεωμένο στο Σ, με αρχή το κέντρο μάζας του Κ.



Σχήμα 1.3λ: Κ είναι το κέντρο μάζας του Σ. Το σύστημα αξόνων (K, x'_1, x'_2, x'_3) είναι στερεωμένο στο Σ.



Σχήμα 1.3μ: Το σημείο Α είναι ένα σταθερό σημείο του άκαμπτου σώματος. Το σύστημα αναφοράς (A,x'_1,x'_2,x'_3) είναι στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το οποίο τη στιγμή t έχει αρχή το Α και ταχύτητα ως προς το (O,x_1,x_2,x_3), ίση με την ταχύτητα του Α τη στιγμή t $(V_A=V_A(t))$.

Ένθετο 1.3.3

Το «στιγμιαία» αδρανειακό σύστημα αναφοράς (K,x'_1,x'_2,x'_3)

Στις σχέσεις 35, 35α, 36, τα μεγέθη ροπή, γωνιακή ταχύτητα, δυνάμεις κλπ, προσδιορίζονται ως προς το σύστημα αξόνων (K,x'_1,x'_2,x'_3), ως εάν το σύστημα αναφοράς (K,x'_1,x'_2,x'_3) να είναι αδρανειακό. Ωστόσο, γενικά αυτό δεν συμβαίνει. [Το Κ, κάτω από τη δράση των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο Σ, θα διαγράφει -γενικά- καμπύλη τροχιά ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3)]
Εισάγουμε την έννοια του «στιγμιαία» αδρανειακού συστήματος αναφοράς, σκεφτόμενοι ως εξής:
Συμβολίζουμε με τ το χρόνο ως ελεύθερη μεταβλητή. Η θέση του κέντρου μάζας Κ του Σ και η ταχύτητά του $\vec{V}_K$, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), είναι συναρτήσεις του τ: Κ=Κ(τ), $\vec{V}_K = \vec{V}_K(\tau)$ Έστω t μια τυχαία τιμή του τ. Για κάθε t, θεωρούμε το σύστημα αναφοράς (K_τ,x',y',z'), το οποίο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Το (K_τ,x',y',z') κινείται ως προς το (O,x_1,x_2,x_3) με **σταθερή ταχύτητα** $\vec{V}_\tau$ της οποίας η τιμή **κάθε χρονική στιγμή τ είναι ίση με τη στιγμιαία ταχύτητα του Κ τη στιγμή t**: $\vec{V}_\tau = \vec{V}_K(t)$.

β) Τη χρονική στιγμή τ=t αληθεύουν οι προτάσεις:
- β1) Η αρχή K_τ, του (K_τ,x',y',z') ταυτίζεται με το κέντρο μάζας Κ του Σ: για τ=t $K_t \equiv K = K(t)$.
- β2) Οι άξονες του (K_τ,x',y',z') ταυτίζονται με τους άξονες του στερεωμένου στο Σ συστήματος (K,x'_1,x'_2,x'_3).

Το σύστημα (K_τ,x'_1,x'_2,x'_3) κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3). Επομένως είναι και αυτό αδρανειακό. Συστήματα όπως το (K_τ,x'_1,x'_2,x'_3) ονομάζονται «**στιγμιαία αδρανειακά συστήματα αναφοράς**». Η βασική τους ιδιότητα είναι ότι είναι αδρανειακά και για μια χρονική στιγμή t ταυτίζονται με κάποιο στερεωμένο στο Σ σύστημα αξόνων.

Επισήμανση 1: Τα μεγέθη που εμφανίζονται στις σχέσεις 35, 35α, 36, όπως η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, οι εξωτερικές δυνάμεις, και η ροπή, υπολογίζονται ως εάν το σύστημα (K,x'_1,x'_2,x'_3) είναι αδρανειακό. Όμως το (K,x'_1,x'_2,x'_3) γενικά, είναι μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. *Υπάρχει εδώ κάποια αντίφαση;* Αναμφισβήτητα όχι. Πρέπει ωστόσο να ξεκαθαριστούν ορισμένες ενδεχόμενες παρανοήσεις:
Α) Οι εξισώσεις 35, 36 **ισχύουν σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς**. Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και οι εξωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_j$ είναι υπολογισμένες ως προς ένα αδρανειακό σύστημα και ως γνωστόν (Ένθετο 1.3.2 και Ένθετο 3, στο τέλος του κεφαλαίου 1) διατηρούνται αναλλοίωτες ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.
Β) Μπορούμε να φανταστούμε ένα αδρανειακό σύστημα (K',x''_1,x''_2,x''_3) που κινείται ως προς το (O,x_1,x_2,x_3) με **σταθερή ταχύτητα** $\vec{V}_{K'} = \vec{V}_K(t)$ (δηλαδή η ταχύτητα του K′ κάθε χρονική στιγμή τ, ισούται με την ταχύτητα του K τη χρονική στιγμή τ=t). Επιπλέον θεωρούμε ότι η αρχή και οι άξονες του (K',x''_1,x''_2,x''_3), τη χρονική στιγμή τ=t, ταυτίζονται με την αρχή και τους άξονες του (K,x'_1,x'_2,x'_3). Είναι φανερό ότι το σύστημα αναφοράς (K',x''_1,x''_2,x''_3) είναι αδρανειακό και ότι τη χρονική στιγμή τ=t ταυτίζεται με το (K,x'_1,x'_2,x'_3). Το σύστημα (K',x''_1,x''_2,x''_3) ονομάζεται **στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς** του σώματος Σ, τη χρονική στιγμή t (Ένθετο 1.3.3).
Γ) Στις σχέσεις 35, 35α και 36, τα διανύσματα θέσης ($\vec{r}'_j$), οι εξωτερικές δυνάμεις, η γωνιακή ταχύτητα έχουν υπολογιστεί ως προς το στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς (K',x''_1,x''_2,x''_3), το οποίο τη χρονική στιγμή t ταυτίζεται με το σύστημα αξόνων (K,x'_1,x'_2,x'_3).

Επισήμανση 2: Σε όλες τις περιπτώσεις κίνησης που επικεντρώνουμε τη μελέτη μας, οι εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα Σ βρίσκονται πάνω στο επίπεδό του, το οποίο ταυτίζεται με το επίπεδο κίνησης του Σ. Έτσι, τόσο η γωνιακή ταχύτητα, όσο και οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων έχουν πάντοτε διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο κίνησης του Σ (παράγραφος 1.2Α, σχέση 1.3.20). Επομένως η εξίσωση 35α ανάγεται σε αλγεβρική:

$$I_K \cdot \frac{d\omega}{dt} = \tau_{(K)} \tag{37}$$

Στην εξίσωση 37, η γωνιακή ταχύτητα ω ισούται με το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζουν οι άξονες Kx'_1, Kx'_2 του στερεωμένου στο Σ συστήματος συντεταγμένων (K,x'_1,x'_2,x'_3), με τους άξονες Ox_1, Ox_2, του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3) αντίστοιχα ($\omega = d\theta/dt$). Ως θετικές θεωρούνται οι γωνίες με αριστερόστροφη διαγραφή και, βέβαια, μετρούνται σε ακτίνια (rad).

Γενίκευση των εξισώσεων 35-36, ως προς οποιοδήποτε σύστημα αξόνων στερεωμένο στο κινούμενο άκαμπτο σώμα Σ (σύστημα που η αρχή του δεν ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του Σ)
Με την πρόταση που ακολουθεί δείχνουμε ότι οι εξισώσεις 35, 35α και 36 διατηρούν την ίδια μορφή, ως προς οποιοδήποτε σύστημα αξόνων στερεωμένο στο κινούμενο άκαμπτο σώμα Σ.

Πρόταση 1.3.2
Έστω Α οποιοδήποτε, **σταθερό σημείο του άκαμπτου σώματος** Σ: Οι σχετικές θέσεις των σωματιδίων του Σ ως προς το Α διατηρούνται αναλλοίωτες κατά την κίνηση του Σ. Τότε, η σχέση 35α γενικεύεται στη:

$$I_A \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_{(A)}$$

όπου I_A η ροπή αδράνειας του Σ ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του, διερχόμενο από το Α και $\vec{\tau}_{(A)}$ η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο Σ, ως προς «στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς» (A,x'_1,x'_2,x'_3) (σχήμα 1.3μ).

<u>Απόδειξη</u>

Θεωρούμε τυχαία χρονική στιγμή t και το στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς (A_τ,x'_1,x'_2,x'_3). Τη στιγμή t η αρχή A_τ του (A_τ,x'_1,x'_2,x'_3) ταυτίζεται με το Α: $A_t \equiv A$. Η εξίσωση μεταβολής της στροφορμής 21 ισχύει για κάθε αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3). Την εφαρμόζουμε ως προς το (A_τ,x'_1,x'_2,x'_3), τη χρονική στιγμή t, και λαμβάνουμε:

$$\frac{d\vec{J}_{(A)}}{dt} = \vec{\tau}_{(A)} \tag{38}$$

όπου $\vec{\tau}_{(A)}$ συμβολίζει τη συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A,x'_1,x'_2,x'_3). Η στροφορμή $\vec{J}_{(A)}$, ως προς το ίδιο σύστημα, υπολογίζεται με εφαρμογή της σχέσης 28:

$$\vec{J}_{(A)} = M \cdot \overrightarrow{AK} \times \frac{d\overrightarrow{AK}}{dt} + I_K \cdot \vec{\omega} \tag{39}$$

όπου $\overrightarrow{AK}$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας Κ του Σ ως προς το (A,x'_1,x'_2,x'_3).
Δεδομένου ότι τα Α και Κ είναι σταθερά σημεία του σώματος Σ, ισχύει η σχέση (σχήμα 1.3μ και παράγραφος 1.2Β):

$$\frac{d\overrightarrow{OK}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AK}$$

ή:

$$\frac{d\overrightarrow{AK}}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AK} \tag{40}$$

Από τις 39 και 40 προκύπτει:

$$\vec{J}_{(A)} = M \cdot \overrightarrow{AK} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AK}\right) + I_K \cdot \vec{\omega}$$

και με βάση τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου (Ένθετα 1 και 4 στο τέλος του κεφαλαίου 1):

$$\vec{J}_{(A)} = \left(M \cdot (AK)^2 + I_K\right) \cdot \vec{\omega} \tag{41}$$

Η 41, με εφαρμογή του θεωρήματος του Steiner (Ένθετο 1.3.1), γράφεται:

$$\vec{J}_{(A)} = I_A \cdot \vec{\omega} \tag{42}$$

όπου: $\vec{J}_{(A)}$ είναι η στροφορμή του Σ ως προς το στιγμιαία αδρανειακό σύστημα (A,x'_1,x'_2,x'_3), I_A η ροπή αδράνειας του Σ ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του Σ και διερχόμενο από το σημείο Α του Σ και $\vec{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα του Σ, ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς (Ένθετο 1.3.2).
Αφού το σημείο Α (όπως και το Κ) είναι σταθερό σημείο του Σ, οι αποστάσεις του από τα σημεία του Σ δεν μεταβάλλονται κατά την κίνηση του Σ. Επομένως και η ροπή αδράνειας $I_A = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j''^2$ διατηρείται σταθερή:

$$\frac{dI_A}{dt} = 0 \tag{43}$$

Η ζητούμενη εξίσωση προκύπτει αμέσως από το συνδυασμό των 38, 42 και 43:

$$I_A \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_{(A)} \tag{44}$$

■

Στο σημείο αυτό, ο στόχος μας έχει επιτευχθεί. Οι εξισώσεις 10α, 38-39 ή η 44 περιγράφουν την κίνηση του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, πάνω στο επίπεδο (O,x_1,x_2) του αδρανειακού συστήματος αναφοράς (O,x_1,x_2,x_3), στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής και του θεωρητικού μοντέλου, που περιγράφηκε στην ενότητα 1.1. Τις ξαναγράφουμε για να έχουμε τη δυνατότητα άμεσης χρήσης τους:

$$\frac{d\vec{V}_K}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \tag{45}$$

$$I_A \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_{(A)} \tag{46}$$

όπου:

$\vec{V}_K$: Η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ του σώματος Σ.

$M = \sum_{j=1}^{N} m_j$: Η ολική μάζα του Σ.

$I_A = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j'^2$: Η ροπή αδράνειας του Σ ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από το σταθερό σημείο Α του Σ.

$\vec{\omega}$: Η γωνιακή ταχύτητα του Σ, ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Είναι διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο κίνησης του Σ.

$\vec{\tau}_{(A)} \equiv \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j' \times \vec{F}_j$: Η συνολική ροπή των **εξωτερικών δυνάμεων** που δρουν στο Σ, **ως προς το στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς (Α,x′₁,x′₂,x′₃)** (Α είναι η θέση σταθερού σημείου του Σ -για παράδειγμα του κέντρου μάζας του- τη χρονική στιγμή t (Ένθετο 1.3.3)).

Αν οι ροπές και η στροφορμή υπολογιστούν ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), τότε η 46 αντικαθίσταται με την (32α):

$$\overrightarrow{OK} \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j + I_K \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_{(O)} \tag{46α}$$

όπου Κ το κέντρο μάζας του Σ.

Οι εξισώσεις 45 και 46-46α προσδίδουν στο μοντέλο του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος μια μαθηματική μορφή, κατάλληλη τόσο για την επίλυση προβλημάτων, όσο και για το σχεδιασμό πειραματικών διατάξεων που αποσκοπούν στον εμπειρικό του έλεγχο.

ΕΝΘΕΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

Ένθετο 1

Εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων[1,2,4,6,15]

Ορισμός: Ως **εξωτερικό γινόμενο** στον Ευκλείδειο χώρο E_3, ορίζουμε την απεικόνιση:

$$E_3 \times E_3 \ni (\vec{a},\vec{b}) \rightarrow \vec{c} \equiv \vec{a} \times \vec{b} \in E_3$$

που έχει τις ιδιότητες:

1) Είναι γραμμική και ως προς τις δύο μεταβλητές $\vec{a}$ και $\vec{b}$:

$$(\lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a}_1 \times \vec{b}) + \mu(\vec{a}_2 \times \vec{b})$$

για κάθε $\lambda,\mu \in R$.

2) Είναι αντισυμμετρική:

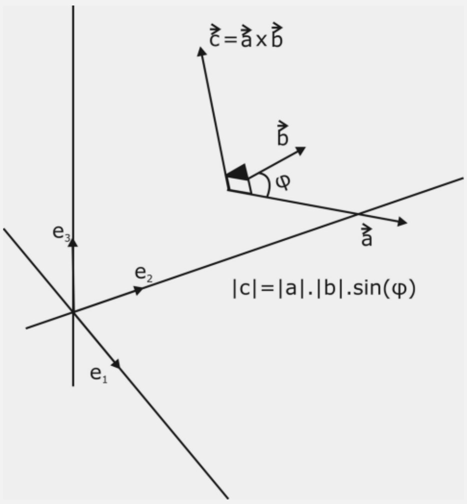
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

3) Το $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ είναι κάθετο στα $\vec{a}$ και $\vec{b}$:

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

4) Αν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε το μέτρο του $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ισούται με το γινόμενο των μέτρων των $\vec{a}$ και $\vec{b}$:

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$



Σχήμα Ε1.1: Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στον Ευκλείδειο χώρο E_3.

Δείξτε ότι αληθεύουν οι ακόλουθες προτάσεις

Πρόταση 1

Σύμφωνα με αξιώματα 1 έως 4 του εξωτερικού γινομένου, για τα ορθογώνια και μοναδιαία διανύσματα βάσης e_1, e_2, e_3, του E_3, ισχύουν οι σχέσεις:

$$e_1 \times e_2 = e_3$$
$$e_3 \times e_1 = e_2$$
$$e_2 \times e_3 = e_1$$

Πρόταση 2

Αν τα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι συγγραμμικά, τότε το εξωτερικό γινόμενό τους ισούται με μηδέν, και αντιστρόφως.

Πρόταση 3

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου των $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από αυτά.

Πρόταση 4

Με βάση την πρόταση 3, δείξτε ότι το «μεικτό» γινόμενο $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από αυτά. Στη συνέχεια δείξτε τις σχέσεις:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(a\times\vec{b}\right)$$

Ένθετο 2

Πίνακες στροφής - Ιδιοδιανύσματα - Στιγμιαίος άξονας περιστροφής[2,4,6,8,13]

Η κίνηση ενός τρισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ στον Ευκλείδειο χώρο E_3 ως προς αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), ανάγεται στη μελέτη της κίνησης ενός συστήματος αξόνων (O',x'_1,x'_2,x'_3) στερεωμένου στο Σ, ως προς το (O,x_1,x_2,x_3). Ο προσανατολισμός του (O',x'_1,x'_2,x'_3) ως προς το (O,x_1,x_2,x_3) κάθε χρονική στιγμή, προσδιορίζεται από έναν **πίνακα στροφής** R(t). Τη χρονική στιγμή t=0, ο πίνακας R(t) ισούται με τον ταυτοτικό πίνακα I:

$$R(0)=I$$

όπου

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Κατά την κίνηση του Σ, οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων του και οι γωνίες που σχηματίζουν τα διανύσματα θέσης τους ως προς το σύστημα (O',x'_1,x'_2,x'_3), διατηρούνται αναλλοίωτες. Οι συνθήκες αυτές εξασφαλίζονται από τον πίνακα στροφής R(t) ο οποίος, όπως είναι γνωστό από τη γραμμική άλγεβρα[2,8], έχει τη ιδιότητα να διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο του E_3. Εξ ορισμού, κάθε πίνακας στροφής ικανοποιεί τη σχέση:

$$\left(R\vec{a}\right)\cdot\left(R\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ του E_3.

Ο **συμμετρικός** (R^+) ενός πίνακα R ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{a}\cdot\left(R\vec{b}\right)=\left(R^+\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$$

Δείξτε ότι αληθεύουν οι προτάσεις:

Α) Τα στοιχεία του πίνακα R^+ -του συμμετρικού του R- ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$R^+_{ij}=R_{ji}$$

Β) Η ορίζουσα του πίνακα R^+ είναι ίση με την ορίζουσα του R.

$$\det\left(R^+\right)=\det\left(R\right)$$

Γ) Αν ο πίνακας R διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο, τότε είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του ισούται με το συμμετρικό του:

$$R^{-1}=R^+$$

και αντιστρόφως.

Οι πίνακες που ικανοποιούν τη σχέση αυτή ονομάζονται **ορθογώνιοι**. Σύμφωνα με την πρόταση αυτή, οι πίνακες στροφής είναι ορθογώνιοι. Διατηρούν αναλλοίωτο το εσωτερικό γινόμενο και το μήκος των διανυσμάτων:

$$\left\|R\vec{u}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|$$

(Δείξτε τον τελευταίο ισχυρισμό)

Δ) Αν ένας πίνακας R είναι αντιστρέψιμος, τότε η ορίζουσά του είναι διάφορη από το μηδέν και ισχύει η σχέση:

$$\det\left(R^{-1}\right)=\frac{1}{\det\left(R\right)}$$

Ε) Αν ένας πίνακας R είναι ορθογώνιος, τότε η ορίζουσά του ικανοποιεί τη σχέση:

$$\left[\det\left(R\right)\right]^2=1$$

Από την πρόταση Ε συμπεραίνουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα στροφής R(t), που περιγράφει την περιστροφή του στερεωμένου στο Σ συστήματος αξόνων (O',x'_1,x'_2,x'_3), μπορεί να είναι είτε ίση με +1 είτε ίση με -1. Δεδομένου ότι:

α) για t=0 ισχύει R(0)=I

β) det(I)=1
γ) Ο πίνακας R και η ορίζουσά του είναι συνεχής συναρτήσεις του χρόνου t, συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

$$\det\left(R(t)\right) = 1$$

για κάθε τιμή του χρόνου t.

Ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα R ονομάζεται κάθε **μη μηδενικό** διάνυσμα $\vec{u}$ του E_3, για το οποίο υπάρχει πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός λ, τέτοιος ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

$$R\vec{u} = \lambda\vec{u} \qquad (1)$$

Ο αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του R.

Πώς υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές ενός ορθογώνιου πίνακα; Η εξίσωση (1) ανάγεται σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με αγνώστους τις τρεις συντεταγμένες του ιδιοδιανύσματος $\vec{u}$. Το σύστημα αυτό έχει λύση διαφορετική της μηδενικής, εφόσον η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\det(R - \lambda I) = 0 \qquad (2)$$

όπου I παριστάνει τον ταυτοτικό πίνακα.
Η εξίσωση 2 είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού ως προς λ. Επομένως έχει τρεις ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Ώστε καταλήγουμε στο:
Συμπέρασμα 1: Οι ιδιοτιμές ενός 3x3 πίνακα του Ευκλείδειου χώρου E_3, είναι ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης τρίτου βαθμού.

Από τη σχέση 1 είναι φανερό ότι αν το $\vec{u}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του R, τότε και κάθε διάνυσμα $a \cdot \vec{u}$, με α πραγματικό αριθμό, είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του R, με την ίδια ιδιοτιμή λ. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε ιδιοτιμή λ, μπορούμε πάντοτε να βρούμε ιδιοδιάνυσμα $\hat{\eta}$ του R με μοναδιαίο μήκος:

$$R\hat{\eta} = \lambda \cdot \hat{\eta}$$

$$\|\hat{\eta}\| = \sqrt{\left(\hat{\eta} \cdot \hat{\eta}\right)} = 1$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι ο πίνακας R είναι πίνακας στροφής. Τότε, όπως είδαμε διατηρεί αναλλοίωτο το εσωτερικό γινόμενο. Αν $\hat{\eta}$ μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του R με ιδιοτιμή λ, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left(R\hat{\eta}\right) \cdot \left(R\hat{\eta}\right) = \left(\hat{\eta} \cdot \hat{\eta}\right) = 1$$

$$\left(\lambda\hat{\eta} \cdot \lambda\hat{\eta}\right) = 1$$

$$|\lambda|^2 \cdot \left(\hat{\eta} \cdot \hat{\eta}\right) = 1$$

$$|\lambda|^2 = 1$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει το:
Συμπέρασμα 2: Κάθε ιδιοτιμή ενός πίνακα στροφής του Ευκλείδειου χώρου E_3 είναι ένας μιγαδικός αριθμός με μέτρο ίσο με τη μονάδα. Γενικά έχει τη μορφή: $\lambda = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$, όπου $0 \le \varphi < 2\pi$.

Από το συνδυασμό των συμπερασμάτων 1 και 2, συνεπάγεται ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα στροφής R(t), για κάθε t, είναι ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης τρίτου βαθμού και ταυτόχρονα έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα. Όπως είναι γνωστό από τη στοιχειώδη Άλγεβρα, οι πολυωνυμικές εξισώσεις τρίτου βαθμού έχουν είτε τρεις πραγματικές ρίζες, είτε μία πραγματική ρίζα και δύο συζυγείς μιγαδικές. Δηλαδή ο R(t) έχει, για κάθε t, τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή. Είτε τη +1 είτε τη -1. Έστω ότι ο πίνακας στροφής R(t) έχει ιδιοτιμή τη -1. Τότε, για κάθε t υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $\hat{\eta}(t) \neq 0$, που ικανοποιεί τη σχέση $R(t)\hat{\eta}(t) = -\hat{\eta}(t)$. Όμως γνωρίζουμε ότι για t=0 ο R(0) ισούται με τον ταυτοτικό πίνακα I. Έπεται ότι $\hat{\eta}(0) = -\hat{\eta}(0)$. Δηλαδή το ιδιοδιάνυσμα $\hat{\eta}(0)$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, που αντίκειται στον ορισμό του ιδιοδιανύσματος. Συμπεραίνουμε ότι για κάθε τιμή του χρόνου t, ο πίνακας στροφής R(t) έχει ως ιδιοτιμές το +1 και δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς μέτρου +1.

Ώστε για κάθε t, υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}(t)$ του E_3, που είναι ιδιοδιάνυσμα του R(t), με ιδιοτιμή λ=+1. Δηλαδή, το $\hat{n}(t)$ ικανοποιεί για κάθε t, τη σχέση:

$$R(t)\hat{n}(t) = \hat{n}(t) \tag{3}$$

Από τη σχέση 3, προκύπτει ότι κάθε χρονική στιγμή υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}(t)$ του E_3, που δεν μεταβάλλεται από τον πίνακα στροφής R(t). Άρα και ο άξονας που ορίζεται από το $\hat{n}(t)$ διατηρείται **στιγμιαία** αναλλοίωτος από τον πίνακα στροφής R(t). Ο άξονας αυτός ονομάζεται **στιγμιαίος άξονας περιστροφής** του άκαμπτου σώματος Σ.

[Βέβαια, καθώς τρέχει ο χρόνος t, ο πίνακας R(t) μεταβάλλεται. Επομένως μεταβάλλεται και το ιδιοδιάνυσμα $\hat{n}(t)$, με συνέπεια να αλλάζει και ο προσανατολισμός του στιγμιαίου άξονα περιστροφής - εξ ου και το όνομά του «στιγμιαίος»]

Στην **περίπτωση κίνησης δισδιάστατου άκαμπτου σώματος στο επίπεδο**, ο πίνακας στροφής R(t), περιστρέφει μόνο τα διανύσματα e'_1 και e'_2 του στερεωμένου στο Σ συστήματος (O',x'_1,x'_2,x'_3), ως προς το αδρανειακό (O,x_1,x_2,x_3), ενώ το e'_3 διατηρείται αμετάβλητο και ίσο με το e_3. Σύμφωνα με τα σχήματα 1.2ε και ζ της ενότητας 1.2, ο πίνακας στροφής ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$R(t)e_1 = \cos(\theta(t)) \cdot e_1 + \sin(\theta(t)) \cdot e_2$$
$$R(t)e_2 = -\sin(\theta(t)) \cdot e_1 + \cos(\theta(t)) \cdot e_2$$
$$R(t)e_3 = e_3$$

από τις οποίες έπεται ότι έχει τη μορφή:

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από τις σχέσεις αυτές μπορεί κανείς να διαπιστώσει εύκολα, ότι το διάνυσμα e_3 είναι ιδιοδιάνυσμα του R(t) για κάθε χρονική στιγμή t, με ιδιοτιμή ίση με +1. Ώστε, στην περίπτωση μας, ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής μετακινείται, παραμένοντας διαρκώς παράλληλος με τον εαυτό του και με τον άξονα Ox_3 του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3).

Ένθετο 3

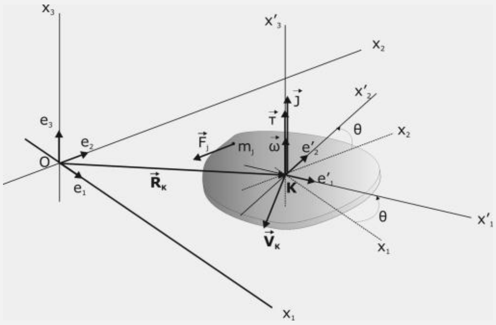
Πώς μεταβάλλεται η στροφορμή σώματος και η ροπή δυνάμεων, όταν υπολογίζονται ως προς διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς;

Λήμμα Ε3.1

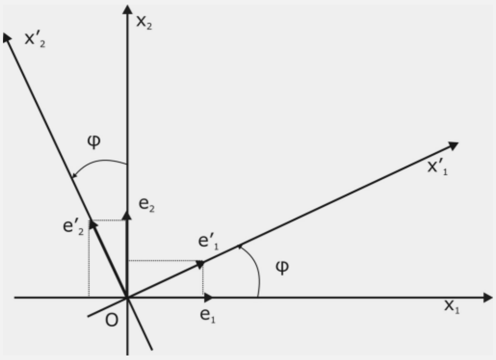
Έστω (O,x'_1,x'_2,x_3) το αδρανειακό σύστημα αναφοράς, που προκύπτει κατά την περιστροφή των αξόνων του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3) γύρω από τον άξονα Ox_3, κατά σταθερή γωνία φ (σχήμα Ε3.1, Ε3.2).

Α) Ποιες σχέσεις συνδέουν τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων των δύο συστημάτων;

Β) Αν M_j κινούμενο σωματίδιο, πώς σχετίζονται οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης του $\overrightarrow{OM_j}$, και της ταχύτητάς του $\vec{v}_j = \dfrac{d\overrightarrow{OM_j}}{dt}$, ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς;



Σχήμα Ε3.1: Τα αδρανειακά συστήματα (O,x_1,x_2,x_3) και (O,x'_1,x'_2,x_3) έχουν κοινό τον άξονα Ox_3. Τα δύο άλλα ζεύγη αξόνων σχηματίζουν σταθερή γωνία φ.



Σχήμα Ε3.2: Τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων των δύο αδρανειακών συστημάτων, σχετίζονται με τις σχέσεις:

$$e'_1 = \cos\varphi \cdot e_1 + \sin\varphi \cdot e_2$$
$$e'_2 = -\sin\varphi \cdot e_1 + \cos\varphi \cdot e_2$$

<u>Λύση</u>

Α) Σύμφωνα με το σχήμα Ε3.2, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} e'_1 &= \cos\varphi \cdot e_1 + \sin\varphi \cdot e_2 \\ e'_2 &= -\sin\varphi \cdot e_1 + \cos\varphi \cdot e_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Ή, με τη μορφή πίνακα:

$$\begin{aligned} e'_1 &= R_{11} \cdot e_1 + R_{12} \cdot e_2 \\ e'_2 &= R_{21} \cdot e_1 + R_{22} \cdot e_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

όπου $R_{\mu\nu}$ τα στοιχεία του πίνακα στροφής $R=[R_{\mu\nu}]$ του επιπέδου (O,x_1,x_2) γύρω από τον άξονα Ox_3, κατά γωνία φ:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \cos\varphi,\ R_{12} = \sin\varphi, \\ R_{21} &= -\sin\varphi,\ R_{22} = \cos\varphi \end{aligned} \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε εξωτερικά το e'_1 με το e'_2:

$$\begin{aligned} e'_1 \times e'_2 &= (R_{11} \cdot e_1 + R_{12} \cdot e_2) \times (R_{21} \cdot e_1 + R_{22} \cdot e_2) = \\ &= (R_{11} \cdot R_{22} - R_{12} \cdot R_{21}) \cdot e_3 = \\ &= \det(R) \cdot e_3 = \\ &= (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \cdot e_3 = \\ &= e_3 = e'_3 \end{aligned} \qquad (4)$$

Β) Το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OM_j}$ του κινούμενου σημείου M_j, ως προς τα δύο συστήματα αξόνων (O,x_1,x_2,x_3) και (O,x'_1,x'_2,x_3), γράφεται αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_j} &= \vec{r}_j = x_{j1}\cdot e_1 + x_{j2}\cdot e_2\\ \overrightarrow{OM_j} &= \vec{r}'_j = x'_{j1}\cdot e'_1 + x'_{j2}\cdot e'_2\end{aligned} \qquad (5)$$

Από το συνδυασμό των σχέσεων 1 και 5, προκύπτουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}&x_{j1}\cdot e_1 + x_{j2}\cdot e_2 = x'_{j1}\cdot e'_1 + x'_{j2}\cdot e'_2 =\\ &= x'_{j1}\cdot(\cos\varphi\cdot e_1+\sin\varphi\cdot e_2) + x'_{j2}\cdot(-\sin\varphi\cdot e_1+\cos\varphi\cdot e_2) =\\ &= (x'_{j1}\cdot\cos\varphi - x'_{j2}\cdot\sin\varphi)\cdot e_1 + (x'_{j1}\cdot\sin\varphi + x'_{j2}\cdot\cos\varphi)\cdot e_2\end{aligned}$$

από τις οποίες έπεται ότι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{OM_j}$, ως προς τα δύο αδρανειακά συστήματα συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}x_{j1} &= x'_{j1}\cdot\cos\varphi - x'_{j2}\cdot\sin\varphi\\ x_{j2} &= x'_{j1}\cdot\sin\varphi + x'_{j2}\cdot\cos\varphi\end{aligned} \qquad (6α)$$

ή:

$$\begin{aligned}x_{j1} &= x'_{j1}\cdot R_{11} + x'_{j2}\cdot R_{21}\\ x_{j2} &= x'_{j1}\cdot R_{12} + x'_{j2}\cdot R_{22}\end{aligned} \qquad (6β)$$

Από τις σχέσεις 6 και δεδομένου **ότι η γωνία στροφής φ είναι σταθερή** (ανεξάρτητη του χρόνου t), οι συνιστώσες της ταχύτητας

$$\vec{v}_j = \frac{d\overrightarrow{OM_j}}{dt}$$

του M_i, ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς σχετίζονται με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}v_{j1} &= v'_{j1}\cdot\cos\varphi - v'_{j2}\cdot\sin\varphi\\ v_{j2} &= v'_{j1}\cdot\sin\varphi + v'_{j2}\cdot\cos\varphi\end{aligned} \qquad (7α)$$

ή:

$$\begin{aligned}v_{j1} &= v'_{j1}\cdot R_{11} + v'_{j2}\cdot R_{21}\\ v_{j2} &= v'_{j1}\cdot R_{12} + v'_{j2}\cdot R_{22}\end{aligned} \qquad (7β)$$

όπου, $v_{j\mu} \equiv \dfrac{dx_{j\mu}}{dt}$, $v'_{j\mu} \equiv \dfrac{dx'_{j\mu}}{dt}$, μ=1,2.

■

Πρόταση Ε3.1

Συμβολίζουμε με $\vec{J}_{(O)}$, $\vec{J}'_{(O)}$, τη στροφορμή του άκαμπτου σώματος Σ ως προς τα αδρανειακά συστήματα (O,x_1,x_2,x_3), (O,x'_1,x'_2,x_3), αντίστοιχα (σχήματα Ε3.1, Ε3.2). Ομοίως, συμβολίζουμε $\vec{\tau}_{(O)}$ και $\vec{\tau}'_{(O)}$, τη συνολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στο Σ, ως προς τα (O,x_1,x_2,x_3), (O,x'_1,x'_2,x_3), αντίστοιχα. Τότε ισχύουν οι σχέσεις:

Α) $\vec{J}'_{(O)} = \vec{J}_{(O)}$

Β) $\vec{\tau}'_{(O)} = \vec{\tau}_{(O)}$

<u>Απόδειξη</u>

Α) Εφαρμόζουμε τον ορισμό της στροφορμής σε συνδυασμό με τα συμπεράσματα του λήμματος 1.4 και υπολογίζουμε τη στροφορμή του σωματιδίου M_i, ως προς τα δύο αδρανειακά συστήματα (O,x'_1,x'_2,x_3) και (O,x_1,x_2,x_3):

$$\begin{aligned}&\vec{J}_{(O),j} = m_j\cdot\vec{r}_j\times\vec{v}_j =\\ &= m_j\cdot(x_{j1}\cdot e_1 + x_{j2}\cdot e_2)\times(v_{j1}\cdot e_1 + v_{j2}\cdot e_2) =\\ &= m_j\cdot(x_{j1}\cdot v_{j2} - x_{j2}\cdot v_{j1})\cdot e_3\end{aligned} \qquad (8α)$$

$$\begin{aligned}\vec{J}'_{(O),j} &= m_j \cdot \vec{r}'_j \times \vec{v}'_j = \\ &= m_j \cdot (x'_{j1} \cdot e'_1 + x'_{j2} \cdot e'_2) \times (v'_{j1} \cdot e'_1 + v'_{j2} \cdot e'_2) = \\ &= m_j \cdot (x'_{j1} \cdot v'_{j2} - x'_{j2} \cdot v'_{j1}) \cdot (e'_1 \times e'_2) = \\ &= m_j \cdot (x'_{j1} \cdot v'_{j2} - x'_{j2} \cdot v'_{j1}) \cdot e_3\end{aligned} \tag{8β}$$

Από τις 8α, 6βκαι 7β, έχουμε:

$$\begin{aligned}\vec{J}_{(O),j} &= m_j \cdot (x_{j1} \cdot v_{j2} - x_{j2} \cdot v_{j1}) \cdot e_3 = \\ &= m_j \cdot [(x'_{j1} \cdot R_{11} + x'_{j2} \cdot R_{21}) \cdot (v'_{j1} \cdot R_{12} + v'_{j2} \cdot R_{22}) - \\ &-(x'_{j1} \cdot R_{12} + x'_{j2} \cdot R_{22}) \cdot (v'_{j1} \cdot R_{11} + v'_{j2} \cdot R_{21})] \cdot e_3 = \\ &= m_j \cdot (x'_{j1} \cdot v'_{j2} - x'_{j2} \cdot v'_{j1}) \cdot (R_{11} \cdot R_{22} - R_{12} \cdot R_{21}) \cdot e_3 = \\ &= m_j \cdot (x'_{j1} \cdot v'_{j2} - x'_{j2} \cdot v'_{j1}) \cdot \det[R] \cdot e_3 = \\ &= m_j \cdot (x'_{j1} \cdot v'_{j2} - x'_{j2} \cdot v'_{j1}) \cdot e_3 = \\ &= \vec{J}'_{(O),j}\end{aligned}$$

Ώστε ισχύει:

$$\vec{J}_{(O),j} = \vec{J}'_{(O),j}$$

και για το σώμα Σ:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{J}_{(O),j} = \sum_{j=1}^{N} \vec{J}'_{(O),j}$$

$$\vec{J}_{(O)} = \vec{J}'_{(O)}$$

Β) Η σχέση (Β) προκύπτει από την (Α) και την εξίσωση της στροφικής κίνησης του Σ ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς: Ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), έχουμε:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = \vec{\tau}_{(O)}$$

Ενώ ως προς το (O,x'_1,x'_2,x_3):

$$\frac{d\vec{J}'_{(O)}}{dt} = \vec{\tau}'_{(O)}$$

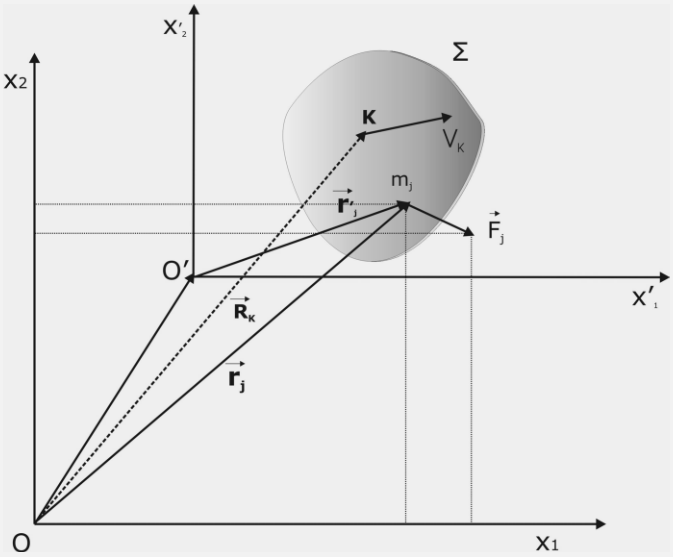
Σύμφωνα με τη (Β), ισχύει $\vec{J}'_{(O)} = \vec{J}_{(O)}$ για κάθε t. Από τη σχέση αυτή και τις δύο προηγούμενες, συνεπάγουμε ότι:

$$\vec{\tau}'_{(O)} = \vec{\tau}_{(O)}$$

■

Συμπέρασμα: Η στροφορμή σώματος και η ολική ροπή δυνάμεων διατηρούνται αναλλοίωτες όταν περιστρέψουμε το σύστημα αναφοράς κατά σταθερή γωνία φ, γύρω από άξονα που διέρχεται από την αρχή Ο του συστήματος.

Πώς μεταβάλλεται η στροφορμή και η ολική ροπή, όταν τα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς είναι μετατοπισμένα ή κινούνται με σταθερή σχετική ταχύτητα $\vec{V}$;



Σχήμα Ε3.3: α) Τα διανύσματα θέσης του ίδιου σημείου, ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς, ικανοποιούν τη σχέση: $\vec{r}_j' = \vec{r}_j - \overrightarrow{OO'}$. β) Οι συνιστώσες των δυνάμεων $\vec{F}_j$ είναι ίδιες ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς. γ) Το Κ είναι το κέντρο μάζας του Σ.

Στο σχήμα Ε3.3 εικονίζονται δύο αδρανειακά συστήματα (O,x_1,x_2,x_3) και (O',x'_1,x'_2,x'_3). Το (O',x'_1,x'_2,x'_3) κινείται ως προς το (O,x_1,x_2,x_3) με σταθερή ταχύτητα $\vec{V}$, διατηρώντας τους άξονές του παράλληλους με τους αντίστοιχους άξονες του (O,x_1,x_2,x_3). Η κίνηση της αρχής O′ του (O',x'_1,x'_2,x'_3), ως προς το (O,x_1,x_2,x_3) περιγράφεται με την εξίσωση:

$$\overrightarrow{OO'} = \vec{a} + \vec{V} \cdot t$$

όπου $\vec{a}$ σταθερό διάνυσμα, ανεξάρτητο του χρόνου t.

Α) Δείξτε ότι η επιτάχυνση κάθε σωματιδίου διατηρείται αναλλοίωτη ως προς τα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς:

$$\frac{d\vec{v}_j}{dt} = \frac{d\vec{v}_j'}{dt}$$

όπου $\vec{v}_j$ η ταχύτητα του σωματιδίου j ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3) και $\vec{v}_j'$ ως προς το (O',x'_1,x'_2,x'_3).

Στη συνέχεια, με βάση την πρόταση αυτή και το 2ο νόμο του Newton, **δείξτε ότι η δύναμη $\vec{F}_j$ που ασκείται σε οποιαδήποτε σωματίδιο διατηρείται αναλλοίωτη ως προς τα δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς**:

$$\vec{F}_j = \vec{F}_j'$$

Β) Δείξτε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{J}' = \vec{J} - M \cdot \vec{R}_K \times \vec{V} - M \cdot (\vec{a} + \vec{V} \cdot t) \times (\vec{V}_K - \vec{V})$$

$$\vec{\tau}' = \vec{\tau} - (\vec{a} + \vec{V} \cdot t) \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \qquad (9α,β)$$

όπου $\vec{J}'$ η στροφορμή του άκαμπτου σώματος Σ και $\vec{T}'$ η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν σε αυτό, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O',x'_1,x'_2,x'_3). Τα διανύσματα στα δεξιά μέρη των σχέσεων 9α και 9β, αναφέρονται ως προς το (O,x_1,x_2,x_3). Το $\vec{R}_K$ συμβολίζει το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας (Κ) του Σ και το $\vec{V}_K$ την ταχύτητα του Κ, ως προς το (O,x_1,x_2,x_3).

Γ) Αν ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), το Σ κινείται σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{T}$$

$$\frac{d\vec{V}_K}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j$$

τότε ως προς το (O',x'_1,x'_2,x'_3) κινείται σύμφωνα με τις:

$$\frac{d\vec{J}'}{dt} = \vec{T}'$$

$$\frac{d\vec{V}'_K}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{N} \vec{F}'_j$$

και αντιστρόφως.

Ένθετο 4

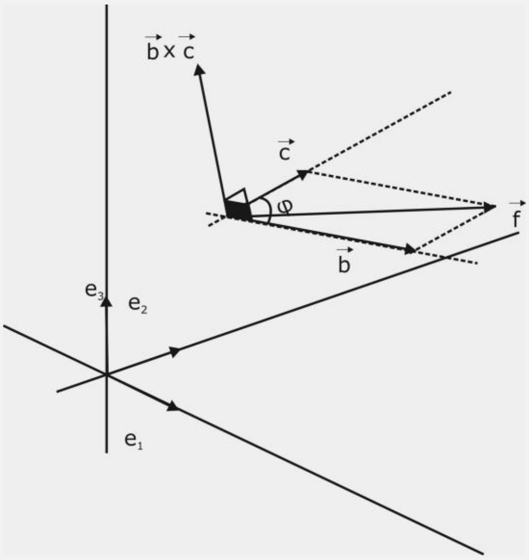
Βοηθητική πρόταση 1

Αν $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ οποιαδήποτε διανύσματα του E_3, τότε ισχύει η σχέση:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\vec{f}\equiv\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$. Το $\vec{c}$ είναι κάθετο στο $\vec{b}\times\vec{c}$, επομένως ανήκει στο επίπεδο των $\vec{b}$, $\vec{c}$ (βλέπε Ένθετο 1 και σχήμα Ε4.1).



Σχήμα Ε4.1: Το διάνυσμα $\vec{f}$ είναι κάθετο στο $\vec{b}\times\vec{c}$, επομένως ανήκει στο επίπεδο των $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Αφού το $\vec{c}$ ανήκει στο επίπεδο των $\vec{b}$, $\vec{c}$, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ, μ, ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\vec{f} = \lambda\cdot\vec{b} + \mu\cdot\vec{c} \tag{1}$$

Το $\vec{c}$ είναι κάθετο στο $\vec{a}$. Επομένως ισχύει:

$$\vec{f}\cdot\vec{a} = 0 \tag{2}$$

Από τις 1 και 2, προκύπτει ότι:

$$\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \mu\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) = 0 \tag{3}$$

Από την 3 έπεται ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός ν, ώστε:

$$\lambda = \nu\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})$$

$$\mu = -\nu\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Ώστε για κάθε $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, ισχύει η σχέση:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \nu\cdot\left((\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\right) \tag{4}$$

Η 4 ισχύει για κάθε $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ στο E_3, άρα και για

$$\vec{a} = e_2 \quad \vec{b} = e_1 \quad \vec{c} = e_2$$

Για την επιλογή αυτή, από την 4 προκύπτει ότι:

$$e_1 = \nu\cdot e_1$$

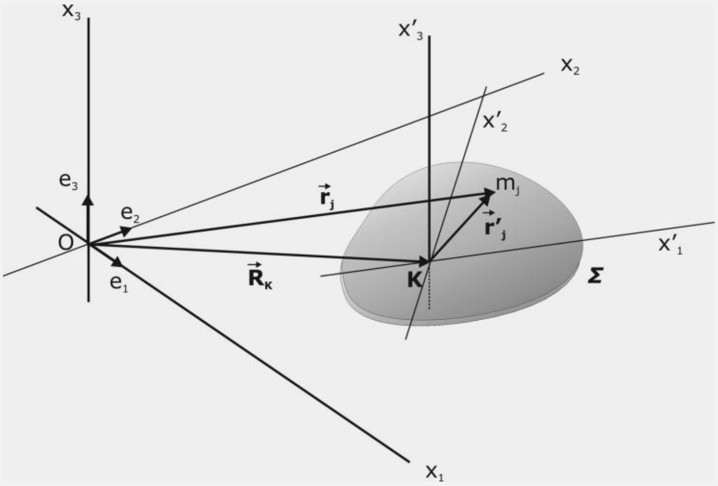
Από την οποία συνεπάγεται ότι ν=1.

■

Βοηθητική πρόταση 2

Έστω Κ το κέντρο μάζας του άκαμπτου σώματος Σ. Συμβολίζουμε με $\vec{r}_j$ j=1,2…N, τα διανύσματα θέσης των σωματιδίων του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3) και με $\vec{r}_j'$ j=1,2…N, ως προς το στερεωμένο στο Σ σύστημα (K, x'_1,x'_2,x'_3) (σχήμα Ε4.2). Τότε ισχύει η σχέση:

$$\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j' = 0 \qquad (5)$$



Σχήμα Ε4.2: Το Κ είναι το κέντρο μάζας του Σ. Το σύστημα αξόνων (Κ, x'_1,x'_2,x'_3) είναι στερεωμένο στο Σ και έχει αρχή το κέντρο μάζας Κ του Σ.

Απόδειξη

Από τον ορισμό του κέντρου μάζας και σύμφωνα με το σχήμα Ε4.2, ισχύουν διαδοχικά, οι σχέσεις:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{M} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot (\overrightarrow{OK} + \vec{r}_j') \right)$$

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j'$$

Από την τελευταία έπεται η 5.

■