ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΑΚΑΜΠΤΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ - ΣΥΝΙΣΤΑΜΕΝΗ ΟΜΟΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Βασικές έννοιες: Ισορροπία και Στατική Ισορροπία άκαμπτου σώματος – Συνθήκες Ισορροπίας - Κινητική κατάσταση άκαμπτου σώματος - Συνισταμένη δυνάμεων - Περιστροφή διανύσματος γύρω από το σημείο εφαρμογής του.

Στο παρόν κεφάλαιο ασχολούμαστε με την ισορροπία του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος, στο πλαίσιο του μοντέλου που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 1. Η διερεύνηση της ισορροπίας του άκαμπτου σώματος αναπτύσσεται κάτω από τους ίδιους περιορισμούς: Θεωρούμε άκαμπτα σώματα δύο διαστάσεων, με το επίπεδό τους να ταυτίζεται με σταθερό επίπεδο αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Η γενίκευση του θέματος στις τρεις διαστάσεις δεν εμφανίζει νέα φαινόμενα και δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες μαθηματικές τεχνικές, πέραν της εξοικείωσης με τη διανυσματική ανάλυση στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο.
Στην ενότητα 2.1 ορίζεται η έννοια της ισορροπίας και διατυπώνονται οι μαθηματικές συνθήκες που πρέπει και αρκεί να ικανοποιούνται, ώστε το σώμα να ισορροπεί. Στην ενότητα 2.2 διερευνούμε τις ιδιότητες της συνισταμένης πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων που ενεργούν σε διαφορετικά σημεία άκαμπτου σώματος (Εφαρμογές 1, 2 και 3). Στην Εφαρμογή 4 επιλύονται ενδεικτικά προβλήματα ισορροπίας σωμάτων που εντάσσονται στο μοντέλο του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος. Στο τέλος του κεφαλαίου παρατίθενται ασκήσεις προς λύση.

2.1 Ισορροπία και συνθήκες ισορροπίας δισδιάστατου άκαμπτου σώματος(6,9,21)

Η έννοια της **ισορροπίας** δισδιάστατου, άκαμπτου σώματος εντάσσεται στο πλαίσιο του ακόλουθου, γενικότερου ορισμού της ισορροπίας:
Αν ένα φαινόμενο περιγράφεται με το φυσικό μέγεθος x και μοντελοποιείται από διαφορικές εξισώσεις της μορφής(21):

$$\frac{du}{dt} = f(x,u,\mu) \qquad \text{(A)}$$

[όπου t ο χρόνος, $u = \dfrac{dx}{dt}$ η ταχύτητα μεταβολής του μεγέθους x και μ πραγματική μονόμετρη ή διανυσματική παράμετρος]
τότε κάθε σταθερή λύση

$$\frac{du}{dt} = 0,\ u = u_0$$

της (Α), ονομάζεται «λύση ισορροπίας»(21, παρ.7.2). Αν η τιμή του u_0 είναι το μηδέν, τότε η ισορροπία ονομάζεται **στατική**.
Η ισορροπία του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος προσδιορίζεται από τις λύσεις ισορροπίας των διαφορικών εξισώσεων κίνησης 34 και 35 τις παραγράφου 1.3Β. Οι εξισώσεις αυτές έχουν μορφή ίδια με εκείνη της (Α). Τα μεγέθη που αντιστοιχούν στο u είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας και η γωνιακή ταχύτητα του σώματος. Η πρώτη, αφορά στην ισορροπία του κέντρου μάζας του σώματος και η δεύτερη στη στροφική ισορροπία του.
Όσον αφορά στην ταχύτητα του κέντρου μάζας, αν υπάρχει λύση ισορροπίας ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε μπορεί να βρεθεί αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η ισορροπία είναι στατική. Αυτό όμως δεν ισχύει για τη γωνιακή ταχύτητα: Αν υπάρχει λύση ισορροπίας διαφορετική του μηδενός ως προς ένα

αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε δεν υπάρχει αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η ισορροπία είναι στατική.
Οι ιδέες αυτές, όπως και οι συνθήκες κάτω από τις οποίες είναι δυνατή η ισορροπία του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, αναλύονται στις παραγράφους 2.1Α και Β.

2.1Α Ισορροπία και στατική ισορροπία άκαμπτου σώματος

Ορισμός της στατικής ισορροπίας άκαμπτου σώματος: Ένα άκαμπτο σώμα Σ λέμε ότι βρίσκεται σε **στατική ισορροπία** όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο προϋποθέσεις:

Α) Υπάρχει αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), ως προς το οποίο η επιτάχυνση $\frac{d\vec{V}_K}{dt}$ και η ταχύτητα $\vec{V}_K$ του κέντρου μάζας Κ του Σ είναι ίσες με το μηδέν:

$$\frac{d\vec{V}_K}{dt} = 0 \qquad (1α)$$

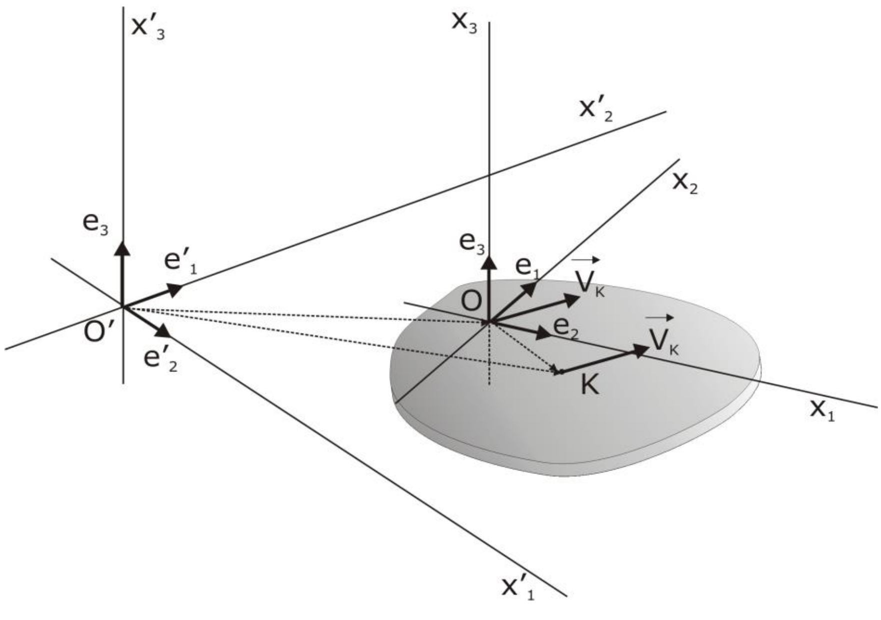
$$\vec{V}_K = 0 \qquad (1β)$$

Β) Η γωνιακή επιτάχυνση $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ και η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3) είναι ίση με το μηδέν:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 \qquad (1γ)$$

$$\vec{\omega} = 0 \qquad (1δ)$$

Σημειώστε την «ασυμμετρία» μεταξύ των προϋποθέσεων Α και Β: Αν η επιτάχυνση του κέντρου μάζας (Κ) του Σ είναι ίση με το μηδέν για κάθε t, ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε υπάρχει αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το Κ

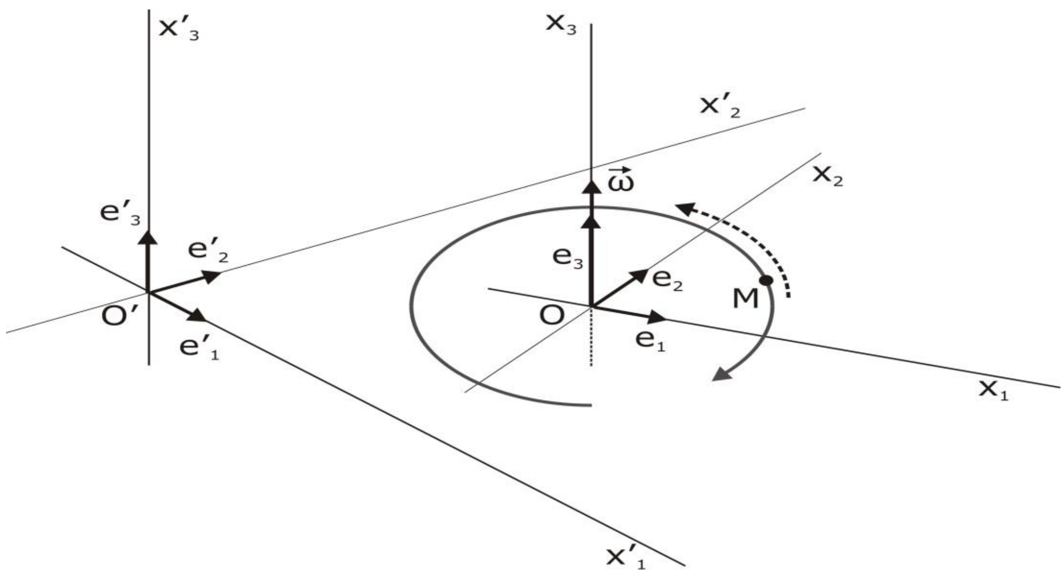


Σχήμα 2.1α: Το κέντρο μάζας Κ του Σ, κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{V}_K$ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O',x'_1,x'_2,x'_3). Αν το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), κινείται ως προς το (O',x'_1,x'_2,x'_3) με την ίδια ταχύτητα $\vec{V}_K$, τότε η ταχύτητα του Κ ως προς αυτό είναι ίση με το μηδέν.

Ένθετο 2.1.1

Κινητική κατάσταση του άκαμπτου σώματος

Στο κεφάλαιο 1 δείξαμε ότι οι θέσεις και οι ταχύτητες των σωματιδίων του άκαμπτου σώματος Σ, αλλά και κάθε κινηματικό μέγεθος που αφορά στο Σ, κάθε χρονική στιγμή προσδιορίζονται από τη θέση του Σ ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, την ταχύτητα του κέντρου μάζας του Κ, και τη γωνιακή ταχύτητά του ω. Θα χρησιμοποιούμε τον όρο «**κινητική κατάσταση του Σ**» ή απλώς «**κατάσταση του Σ**», για να αναφερόμαστε συνολικά στα παραπάνω μεγέθη. Δηλαδή, με την έννοια της «κατάστασης» ενός σώματος ή συστήματος, εννοούμε τις πληροφορίες που απαιτούνται για να γνωρίζουμε κάθε χρονική στιγμή τις θέσεις και τις ταχύτητες των σωματιδίων που το απαρτίζουν (Ενότητα 1.2).



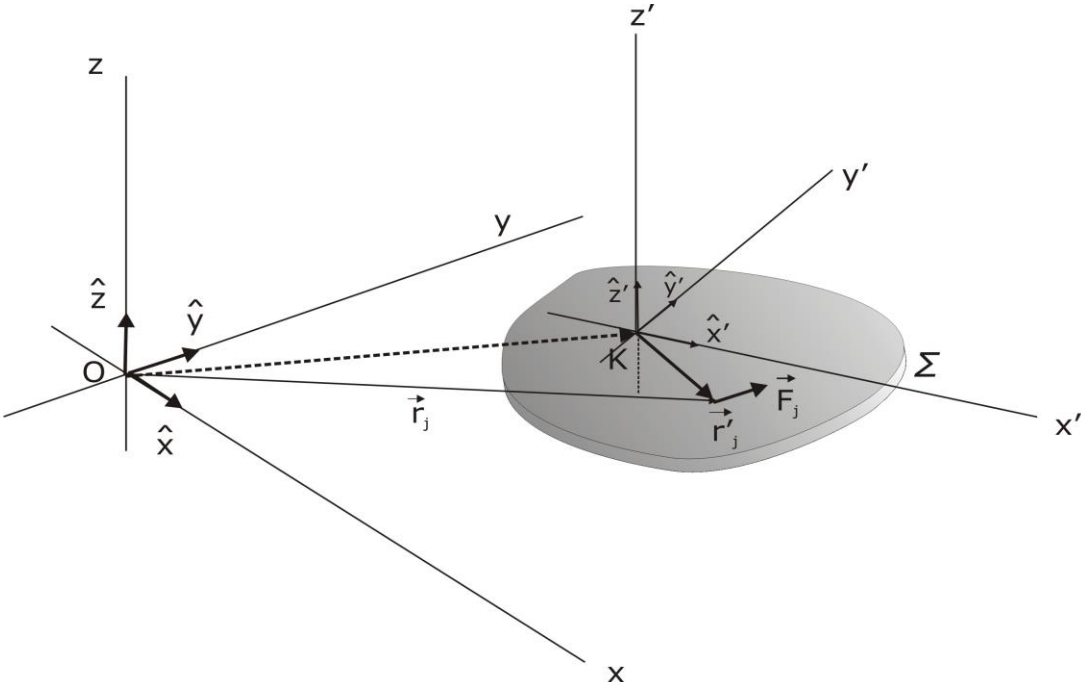
Σχήμα 2.1β: Το σύστημα αναφοράς (O', x'_1, x'_2, x'_3) είναι αδρανειακό. Το σημείο O και το ελεύθερο σωματίδιο M είναι ακίνητα σημεία του επιπέδου (O', x'_1, x'_2), ως προς το (O', x'_1, x'_2, x'_3). Το σύστημα αξόνων (O, x_1, x_2, x_3) περιστρέφεται ως προς το (O', x'_1, x'_2, x'_3) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Τότε το M περιστρέφεται ως προς το (O, x_1, x_2, x_3) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα –ω. Η κίνηση του ελεύθερου σωματιδίου M δεν είναι ευθύγραμμη ομαλή ως προς το (O, x_1, x_2, x_3). Επομένως, το περιστρεφόμενο σύστημα (O, x_1, x_2, x_3) δεν είναι αδρανειακό.

έχει ταχύτητα ίση με το μηδέν. Ωστόσο αν ως προς κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το Σ έχει μηδενική γωνιακή επιτάχυνση και σταθερή γωνιακή ταχύτητα (για κάθε t) τότε θα έχει την ίδια γωνιακή ταχύτητα ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Ας αναλύσουμε διεξοδικότερα τους παραπάνω ισχυρισμούς:

Έστω ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας (Κ) του σώματος Σ είναι μηδενική ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O', x'_1, x'_2, x'_3). Τότε, το Κ κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{V}_K$ ως προς το (O', x'_1, x'_2, x'_3). Έστω ένα δεύτερο αδρανειακό σύστημα (O, x_1, x_2, x_3) που κινείται ως προς το (O', x'_1, x'_2, x'_3) με σταθερή ταχύτητα $\vec{V}_O = \vec{V}_K$. Τότε ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x_1, x_2, x_3) το Κ έχει ταχύτητα ίση με μηδέν (σχήμα 2.1α):

$$\frac{d\overrightarrow{OK}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O'K}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{O'O}}{dt} = \vec{V}_K - \vec{V}_O = 0$$

Τα πράγματα είναι διαφορετικά, όσον αφορά στη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$: Έστω ότι ως προς το αδρανειακό σύστημα (O', x'_1, x'_2, x'_3) η γωνιακή επιτάχυνση του Σ είναι μηδέν και η γωνιακή ταχύτητά του σταθερή (σχήμα 2.1β). Αν η γωνιακή ταχύτητα του Σ ως προς το (Ο′,x′$_1$,x′$_2$,x′$_3$) είναι διαφορετική από το μηδέν, τότε δεν υπάρχει αδρανειακό σύστημα, ως προς το οποίο η γωνιακή ταχύτητα του Σ να μηδενίζεται. Αν υπήρχε τέτοιο σύστημα, θα έπρεπε να περιστρέφεται και αυτό ως προς το (Ο′,x′$_1$,x′$_2$,x′$_3$) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ (σχήμα 2.1β). Τότε όμως δεν θα ήταν αδρανειακό[1]. Αν το σώμα Σ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, τότε περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Έτσι, αν η γωνιακή ταχύτητα του Σ είναι ίση με το μηδέν ως προς το αδρανειακό σύστημα (Ο′,x′$_1$,x′$_2$,x′$_3$), τότε είναι μηδέν και ως προς οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα. (Ένθετο 1.3.2 «Μεταβολή της στροφορμής…» της παραγράφου 1.3Β).



Σχήμα 2.1γ: Δυνάμεις και ροπές ως προς δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς (O,x,y,z) και (K,x′,y′z′): Οι δυνάμεις $\vec{F}_j$ δεν μεταβάλλονται ως προς τα δύο συστήματα. Μεταβάλλονται μόνον οι τιμές των συνιστωσών τους, λόγω της διαφορετικής κατεύθυνσης των αξόνων Ox, Kx′ και Oy, Ky′. Ισχύει η σχέση:

$$\vec{F}_j = F_{jx}\cdot\hat{x} + F_{jy}\cdot\hat{y} = F'_{jx'}\cdot\hat{x}' + F'_{jy'}\cdot\hat{y}' = \vec{F}'_j$$

Ωστόσο, η συνολική ροπή των $\vec{F}_j$ εξαρτάται και από τα διανύσματα θέσης $\vec{r}_j$ ($\vec{r}'_j$), με συνέπεια να έχει διαφορετική έκφραση ως προς τα δύο αδρανειακά συστήματα. Ισχύει:

$$\vec{\tau}_{(K)} = \sum_{j=1}^{N}\vec{r}'_j\times\vec{F}_j = \sum_{j=1}^{N}\left(\vec{r}_j - \overrightarrow{OK}\right)\times\vec{F}_j =$$

$$= \vec{\tau}_{(O)} - \overrightarrow{OK}\times\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j$$

Από τη σχέση αυτή, προκύπτει ότι αν $\vec{\tau}_{(O)} = 0$ και $\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j = 0$, τότε ισχύει και $\vec{\tau}_{(K)} = 0$

[1] Ένα σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται ως προς ένα αδρανειακό με σταθερή γωνιακή ταχύτητα (σχήμα 2.1.β), δεν είναι αδρανειακό: Η τροχιά ενός ελεύθερου σωματιδίου ως προς αυτό δεν είναι ευθεία γραμμή.

Ορισμός της ισορροπίας άκαμπτου σώματος: Θα λέμε ότι **το στερεό σώμα Σ ισορροπεί,** αν υπάρχει αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), ως προς το οποίο ισχύουν οι σχέσεις 1α,β,γ, όχι όμως υποχρεωτικά και η 1δ. Δηλαδή, αν το Σ βρίσκεται σε στατική ισορροπία, τότε ισορροπεί. Δεν ισχύει υποχρεωτικά και το αντίστροφο: Αν το Σ ισορροπεί, τότε είναι ενδεχόμενο να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, την ίδια ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, οπότε δεν θα βρίσκεται σε στατική ισορροπία.

2.1Β Συνθήκες ισορροπίας άκαμπτου σώματος: Ποιες μαθηματικές σχέσεις αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ισορροπία του άκαμπτου σώματος;

Η μορφή της κίνησης του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, καθώς και η ισορροπία του, όπως αυτή ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, καθορίζονται από τις εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στο Σ και τις ροπές τους (παράγραφος 1.3Β).
Ποιες μαθηματικές σχέσεις πρέπει και αρκεί να ικανοποιούν οι εξωτερικές δυνάμεις και οι ροπές τους, ώστε το σώμα να ισορροπεί;
Η απάντηση θα προκύψει από τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος (παράγραφος 1.3Β, εξισώσεις 34 και 35), σε συνδυασμό με τον ορισμό της ισορροπίας του Σ:

$$\frac{d\vec{V}_K}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \tag{2}$$

και

$$I_K \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_{(K)} \tag{3α}$$

ή:

$$\overrightarrow{OK} \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j + I_K \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_{(O)} \tag{3β}$$

όπου:
$\vec{V}_K$: η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ του Σ ως προς αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3)
Μ: η ολική μάζα του Σ
I_K: η ροπή αδράνειας του Σ ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του Κ
$\vec{\omega}$: η γωνιακή ταχύτητα του Σ (διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο κίνησης του Σ)
$\vec{\tau}_{(K)} \equiv \sum_{j=1}^{N} \vec{r}'_j \times \vec{F}_j$ είναι η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο Σ, ως προς το στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς (K,x'_1,x'_2,x'_3) και $\vec{\tau}_{(O)}$ οι ροπές των ίδιων δυνάμεων ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3).

Όταν το Σ βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, τότε εξ ορισμού υπάρχει αδρανειακό σύστημα αναφοράς –έστω το (O,x_1,x_2,x_3)- ως προς το οποίο η επιτάχυνση και η ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ του Σ είναι μηδενική και η γωνιακή επιτάχυνση του Σ είναι επίσης μηδενική. Από τις γενικές εξισώσεις κίνησης 2 και 3, προκύπτει ότι η ισορροπία του Σ εξασφαλίζεται τότε και μόνον, όταν οι εξωτερικές δυνάμεις και οι ροπές τους ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j = 0 \tag{4}$$

$$\vec{\tau}_{(K)} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j' \times \vec{F}_j = 0 \qquad (5α)$$

ή:

$$\vec{\tau}_{(O)} = \overrightarrow{OK} \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j + \vec{\tau}_{(K)} = 0 \qquad (5β)$$

Δηλαδή το Σ ισορροπεί τότε και μόνον αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο Σ είναι μηδενική και η συνολική ροπή των δυνάμεων αυτών ως προς το στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς (K,x'_1,x'_2,x'_3) ή ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), είναι μηδέν. Οι εξισώσεις 4 και 5 αποτελούν τις **συνθήκες ισορροπίας** του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ.

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι συνθήκες 4 και 5 είναι ικανές για την ισορροπία του Σ, όχι όμως και για την στατική ισορροπία του. Κι αυτό γιατί εξασφαλίζουν μηδενική γωνιακή επιτάχυνση, όχι όμως και μηδενική γωνιακή ταχύτητα. Για να βρίσκεται το Σ σε στατική ισορροπία, στις συνθήκες 4 και 5 πρέπει να προσθέσουμε και άλλη μια: «Ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η γωνιακή ταχύτητα του Σ είναι ίση με το μηδέν».

Αξίζει να κάνουμε μια επισήμανση, που αφορά στην έκφραση των συνθηκών ισορροπίας ως προς διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς: Θα δείξουμε ότι οι συνθήκες ισορροπίας 4 και 5 είναι αναλλοίωτες ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Δηλαδή αν ισχύουν ως προς ένα αδρανειακό σύστημα, τότε ισχύουν για κάθε αδρανειακό σύστημα. [Στην ανάλυσή μας θα βοηθηθούμε και από το σχήμα 2.1γ όπου δείχνουμε πώς μεταβάλλεται η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο Σ, όταν υπολογίζεται ως προς διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς]

Πρόταση 2.1.1

Θεωρούμε άκαμπτο σώμα Σ, του οποίου την κίνηση ή την ισορροπία μελετάμε ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z)[1]. Υποθέτουμε ότι στο Σ ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις, των οποίων η συνισταμένη, καθώς και η ολική ροπή μηδενίζονται, όταν τις υπολογίζουμε ως προς το (O,x,y,z). Τότε, ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα (O′,x′,y′,z′), αληθεύουν οι προτάσεις:

Α) Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με το μηδέν.

Β) Η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με το μηδέν.

Απόδειξη

Α) Συμβολίζουμε με $\vec{F}_j$, j=1,2…N τις εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στα σωματίδια του Σ (σχήμα 2.1δ). Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, η συνισταμένη τους, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z) είναι ίση με το μηδέν:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j = 0 \qquad (6α)$$

Από το 2ο νόμο του Newton για το κέντρο μάζας K του Σ (σχέση 2), προκύπτει ότι:

$$\frac{d\vec{V}_K}{dt} = 0$$

[1] Ονοματίζουμε το σύστημα των αξόνων, ως προς τους οποίους προσδιορίζουμε τις συνιστώσες των διανυσματικών μεγεθών εναλλακτικά, είτε ως (O,x_1,x_2,x_3), οπότε τα διανύσματα βάσης συμβολίζονται με e_1, e_2, e_3, e_3, είτε ως (O,x,y,z), οπότε τα διανύσματα βάσης συμβολίζονται με $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$ (βλέπε κεφάλαιο 1).

Δηλαδή η ταχύτητα του Κ είναι σταθερή ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z). Τότε όμως, είναι σταθερή και ως προς οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, άρα και ως προς το (O′,x′,y′,z′). Ώστε, αν συμβολίσουμε με $\vec{V}'_K$ την ταχύτητα του Κ και με $\vec{F}'_j$ j=1,2…N τις εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στο Σ, ως προς το (O′,x′,y′,z′), έχουμε:

$$\frac{d\vec{V}'_K}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vec{V}'_K}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{N} \vec{F}'_j$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}'_j = 0 \qquad (6β)$$

Β) Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων, που δρουν στο Σ, ως προς το (O,x,y,z) είναι μηδέν:

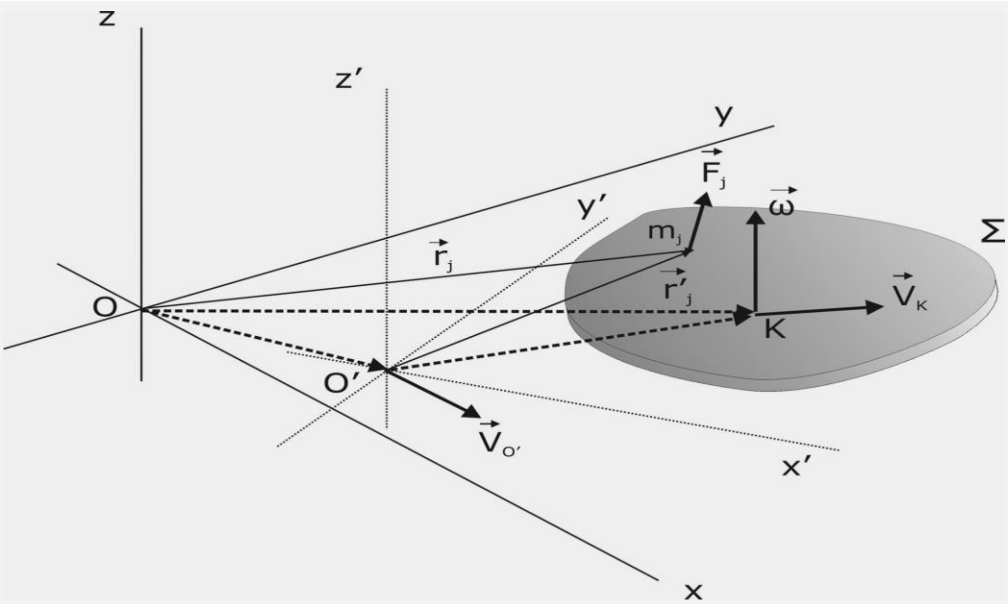
$$\vec{\tau}_{(O)} = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_j = 0 \qquad (7α)$$

Οπότε, από την εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = \vec{\tau}_{(O)} \qquad (8)$$

προκύπτει ότι:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = 0 \qquad (8α)$$



Σχήμα 2.1δ: Το Σ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Το κέντρο μάζας Κ του Σ κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{V}_K$ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z). Το (O′,x′,y′,z′) είναι αδρανειακό σύστημα που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{V}_{(O')}$, ως προς το (O,x,y,z). Αν οι συνθήκες ισορροπίας του Σ ισχύουν ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), τότε ισχύουν για κάθε αδρανειακό σύστημα.

Ως προς το αδρανειακό σύστημα (O′,x′,y′,z′), η εξίσωση κίνησης 8 γράφεται:

$$\frac{d\vec{J}_{(O')}}{dt} = \vec{\tau}_{(O')} \qquad (8\beta)$$

όπου $\vec{J}_{(O')}$ η στροφορμή και $\vec{\tau}_{(O')} = \sum_{\xi=1}^{N} \vec{r}_j' \times \vec{F}_j'$ η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων, ως προς το (O′,x′,y′,z′). Για να δείξουμε ότι $\vec{\tau}_{(O')} = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\frac{d\vec{J}_{(O')}}{dt} = 0 \qquad (8\gamma)$$

Από τον ορισμό της στροφορμής (παράγραφος 1.3B) και με τη βοήθεια του σχήματος 2.1δ, βρίσκουμε ότι:

$$\vec{J}_{(O)} = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j \times \vec{v}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \left(\overrightarrow{OO'} + \vec{r}_j'\right) \times \left(\vec{V}_{(O')} + \vec{v}_j'\right)$$

όπου $\vec{V}_{(O')}$ η σταθερή ταχύτητα της αρχής O′, του (O′,x′,y′,z′), ως προς το (O,x,y,z). Μετά από μερικές πράξεις η τελευταία σχέση γράφεται:

$$\vec{J}_{(O)} = M \cdot \overrightarrow{OO'} \times \vec{V}_{(O')} + M \cdot \overrightarrow{OO'} \times \vec{V}_K' + M \cdot \overrightarrow{O'K} \times \vec{V}_{(O')} + \vec{J}_{(O')} \qquad (9)$$

όπου $\vec{V}_K'$ η σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας K του Σ, ως προς το (O′,x′,y′,z′).

Παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο τα δύο μέρη της εξίσωσης 9. Με δεδομένο ότι η ταχύτητα τόσο του O′ όσο και του K είναι σταθερές ως προς το (O,x,y,z) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου, καταλήγουμε διαδοχικά στις σχέσεις:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = \frac{d\vec{J}_{(O')}}{dt} + M \cdot \vec{V}_{(O')} \times \vec{V}_K' + M \cdot \vec{V}_K' \times \vec{V}_{(O')}$$

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = \frac{d\vec{J}_{(O')}}{dt}$$

και αφού ισχύει ότι $\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = 0$ (σχέση 8), συνεπάγεται ότι για κάθε αδρανειακό σύστημα (O′,x′,y′,z′) ισχύει $\frac{d\vec{J}_{(O')}}{dt} = 0$ και, σύμφωνα με την 8β, $\vec{\tau}_{(O')} = 0$.

■

Σχόλιο: Αν ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με το μηδέν ($\vec{\tau}_{(O)} = 0$), αυτό δεν αρκεί για να μηδενίζεται η συνολική ροπή των ίδιων δυνάμεων ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Για να συμβαίνει αυτό απαιτείται και η συνθήκη: «η συνισταμένη των δυνάμεων να είναι ίση με το μηδέν» (βλέπε σχέση 3β, σε συνδυασμό με την πρόταση 2.1.1 και το σχήμα 2.1γ).

Με βάση την πρόταση 2.1.1, μπορούμε να μελετήσουμε την ισορροπία ενός δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, υπολογίζοντας τις ροπές των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν σε αυτό ως προς **οποιοδήποτε** αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Εάν ικανοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας:

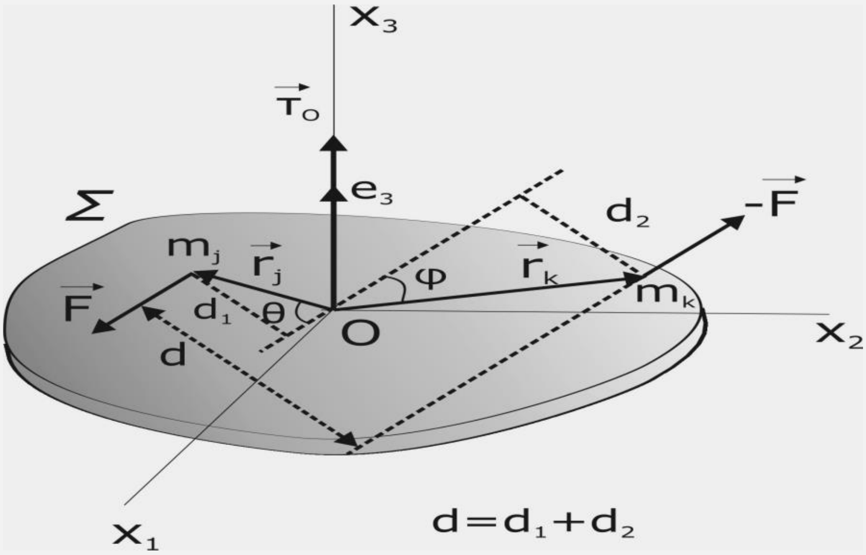
$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j = 0 \qquad (10\alpha)$$

$$\vec{\tau}_{(O)} = 0 \qquad (10\beta)$$

ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z), τότε ικανοποιούνται ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς
(βλέπε και άσκηση 2.1).

Ένθετο 2.1.2

Ζεύγος δυνάμεων



Ζεύγος δυνάμεων, ονομάζεται σύστημα δύο αντίθετων δυνάμεων ($\vec{F}$ και $-\vec{F}$) που ενεργούν σε δύο διαφορετικά σωματίδια του ίδιου άκαμπτου σώματος Σ.
Η συνισταμένη ενός ζεύγους δυνάμεων είναι ίση με το μηδέν και δεν συνεισφέρει στην μεταβολή της ταχύτητας του κέντρου μάζας του Σ. Το ζεύγος των δυνάμεων ασκεί στο Σ ροπή, η οποία είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3) και αν υπολογιστεί.

Ροπή ζεύγους δυνάμεων

Έστω ότι οι δυνάμεις $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ ενεργούν στα σωματίδια j και k του σώματος Σ αντίστοιχα. Η ροπή του ζεύγους των $\vec{F}$ και $-\vec{F}$, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x_1,x_2,x_3), υπολογίζεται από τις σχέσεις (Ένθετο 1 στο τέλος του κεφαλαίου 1):

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{(O)} &= \vec{r}_j \times \vec{F} - \vec{r}_k \times \vec{F} = \\ &= \left(F \cdot r_j \cdot \sin\theta - F \cdot r_k \cdot \sin\varphi\right) \cdot e_3 = \\ &= F \cdot \left(d_1 - d_2\right) \cdot e_3 = \\ &= F \cdot d \cdot e_3\end{aligned}$$

Η αλγεβρική τιμή της ροπής του ζεύγους είναι:

$$\tau_{(O)} = \pm F \cdot d$$

Η ροπή του ζεύγος είναι ανάλογη του μέτρου της δύναμης και της απόστασης των φορέων των δυνάμεων του ζεύγους. Επομένως δεν εξαρτάται από την επιλογή του αδρανειακού συστήματος (O,x_1,x_2,x_3) ως προς το οποίο την υπολογίζουμε.

2.2 Εφαρμογές

Στην εφαρμογή 1 αναλύουμε τις ιδιότητες της συνισταμένης πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων που ενεργούν πάνω σε άκαμπτο δισδιάστατο σώμα Σ. Στην εφαρμογή 2 δείχνουμε ότι το σημείο εφαρμογής του βάρους ενός άκαμπτου σώματος ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του. Στην εφαρμογή 3 υπολογίζουμε τη θέση του κέντρου μάζας ομοιογενών, δισδιάστατων άκαμπτων σωμάτων που έχουν συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα. Στην εφαρμογή 4 επιλύουμε προβλήματα ισορροπίας άκαμπτων δισδιάστατων σωμάτων.

Εφαρμογή 1: Ιδιότητες της μη μηδενικής συνισταμένης πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων που ενεργούν σε διαφορετικά σημεία άκαμπτου σώματος

Έστω ότι στο άκαμπτο σώμα Σ ενεργούν f ομοεπίπεδες δυνάμεις $\vec{F}_1,\vec{F}_2,...\vec{F}_f$. Οι δυνάμεις αυτές, ενεργούν σε διαφορετικά σωματίδια του Σ. Συμβολίζουμε με M_k, k=1,2,…f το σημείο εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}_k$. Το μέτρο και η κατεύθυνση της συνισταμένης $\vec{F}$ των δυνάμεων $\vec{F}_1,\vec{F}_2,...\vec{F}_f$ προσδιορίζεται από το διανυσματικό τους άθροισμα:

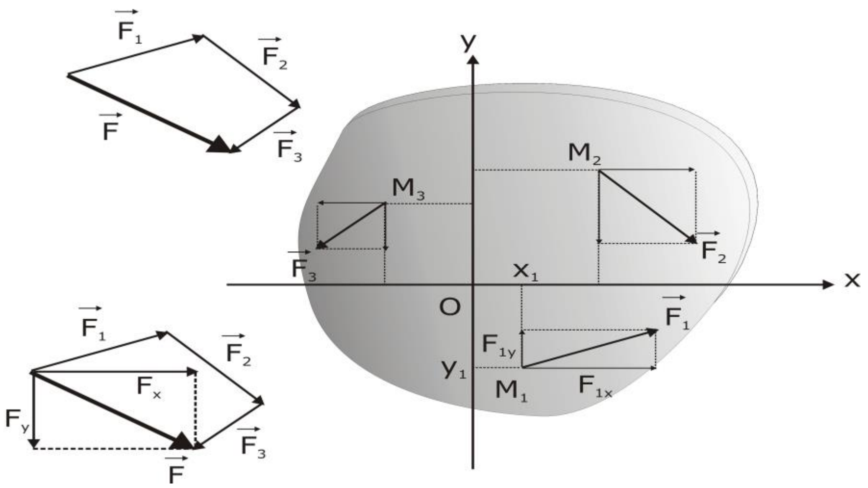
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_f \qquad (1\alpha)$$

Θεωρούμε αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z). [Το (O,x,y,z), μπορεί να είναι οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ή ένα στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς στερεωμένο στο Σ (σχήμα 2.2α)]

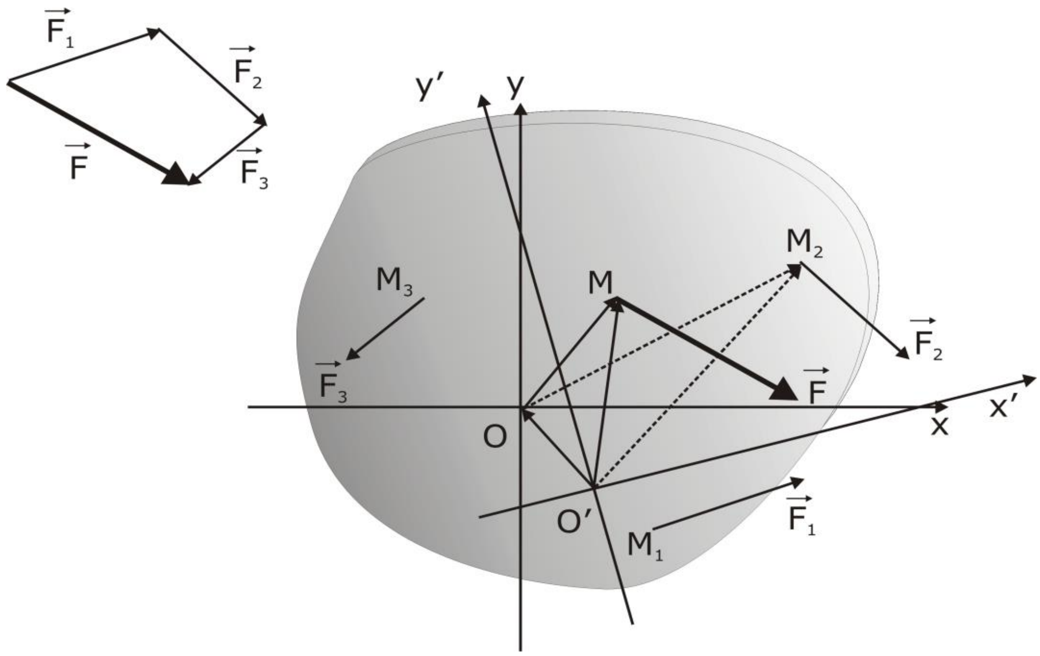
Οι συντεταγμένες F_x, F_y της $\vec{F}$ ως προς το (O,x,y,z) υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{1,x} + F_{2,x} + ... + F_{f,x} \\ F_y &= F_{1,y} + F_{2,y} + ... + F_{f,y} \end{aligned} \qquad (1\beta)$$

Με τις σχέσεις 1α,β μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο και την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{F}$, όχι όμως και το σημείο εφαρμογής του. Υπάρχει μια άπειρη κλάση ίσων διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου E_3 που έχουν συντεταγμένες ίσες με τις F_x, F_y, ίδια κατεύθυνση και μέτρο με το διάνυσμα $\vec{F}$, αλλά έχουν διαφορετικά σημεία εφαρμογής.



Σχήμα 2.2α: Οι δυνάμεις $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$ ενεργούν στα σημεία M_1, M_2, M_3 του σώματος Σ, αντίστοιχα. Η συνισταμένη τους $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ αντιστοιχεί σε μια άπειρη κλάση παράλληλων και ίσου μέτρου διανυσμάτων. Για να προσδιορίσουμε την $\vec{F}$ μονοσήμαντα, απαιτείται η θέση του σημείου εφαρμογής της. Η θέση του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης είναι τέτοια, ώστε η ροπή της $\vec{F}$ ως προς **οποιοδήποτε** στερεωμένο στο Σ σύστημα αξόνων (O,x,y,z) ισούται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών της, ως προς το ίδιο σύστημα αξόνων.



Σχήμα 2.2β: Τα συστήματα αξόνων (O,x,y,z) και (O′,x′,y′,z′) είναι στερεωμένα στο άκαμπτο σώμα Σ (οι άξονες Oz και O′z′ είναι κάθετοι στο επίπεδο του σχήματος και παράλληλοι μεταξύ τους). Η $\vec{F}$ είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν στο Σ. Αν Μ το σημείο εφαρμογής της, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k$$

$$\overrightarrow{O'M} \times \vec{F} = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{O'M_k} \times \vec{F}_k$$

Είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_f$*;*

Η σημασία της έννοιας της συνισταμένης δυνάμεων που δρουν σε σώμα, έγκειται στην υπόθεση ότι υπάρχει δύναμη μονοσήμαντα ορισμένη, η οποία αν δράσει μόνη αυτή στο σώμα, θα του προκαλέσει την ίδια κίνηση που προκαλούν όλες μαζί οι επιμέρους δυνάμεις. *Πώς εξειδικεύεται η απαίτηση αυτή στο δισδιάστατο άκαμπτο σώμα; Πέρα των σχέσεων 1α,β, ποιες άλλες μαθηματικές συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί η συνισταμένη πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων, ώστε να προσδιορίζεται μονοσήμαντα;*

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι εφόσον η συνισταμένη $\vec{F}$ πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων είναι διαφορετική από το μηδέν, κάθε χρονική στιγμή μπορεί να οριστεί με μονοσήμαντο τρόπο το μέτρο, η κατεύθυνση και το σημείο εφαρμογής της, έτσι ώστε ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, η ροπή της $\vec{F}$ να ισούται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών δυνάμεων.

Ξεκινάμε με τις εξισώσεις κίνησης του Σ. Για να τις γράψουμε, χρειαζόμαστε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Επιλέγουμε το στερεωμένο στο Σ σύστημα αξόνων (O,x,y,z) που φαίνεται στο σχήμα 2.2β. Το O είναι συγκεκριμένο σημείο του Σ, για παράδειγμα το κέντρο μάζας του. Ως προς το στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z), οι εξισώσεις 45 και 46 της παραγράφου 1.3Β λαμβάνουν τη μορφή:

$$\frac{d\vec{V}_K}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{f} \vec{F}_k \qquad (2)$$

$$I_O \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_{(O)} \qquad (3)$$

όπου I_O συμβολίζει τη ροπή αδράνειας του Σ ως προς τον άξονα Oz και $\vec{\tau}_{(O)} = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k$ το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_f$ που δρουν στο Σ, ως προς το στιγμιαία αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z).

Αν στο Σ ενεργεί μια και μόνο δύναμη $\vec{F}$ με σημείο εφαρμογής το M (σχήμα 2.2β), οι εξισώσεις κίνησής του Σ ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς, γράφονται:

$$\frac{d\vec{V}_K}{dt} = \frac{1}{M} \cdot \vec{F} \qquad (4)$$

και

$$I_O \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \overrightarrow{OM} \times \vec{F} \qquad (5)$$

Αν η $\vec{F}$ είναι συνισταμένη των $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_f$, οι εξισώσεις κίνησης 2 και 3 πρέπει να ταυτίζονται με τις 4 και 5 (για κάθε τιμή του χρόνου t). Που σημαίνει ότι η συνισταμένη $\vec{F}$ και το σημείο εφαρμογής της M πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_f \qquad (6)$$

$$\overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k \qquad (7)$$

Εφόσον το M είναι υπαρκτό σημείο του επιπέδου, οι συντεταγμένες του (X,Y) ως προς το σύστημα αξόνων (O,x,y,z), πρέπει να προκύπτουν ως λύση των εξισώσεων 6 και 7. Επιπλέον, αφού η επιλογή του στερεωμένου στο Σ συστήματος (O,x,y,z) είναι αυθαίρετη, το σημείο M πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση 7 ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς (σχήμα 2.2β). Η απόδειξη της ακόλουθης πρότασης εξασφαλίζει αυτή την απαίτηση:

Πρόταση 2.2.1

Αν τη χρονική στιγμή t, το σημείο M ικανοποιεί τη σχέση 7 ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), τότε την ίδια χρονική στιγμή, ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα (O′,x′,y′,z′) το M ικανοποιεί την

$$\overrightarrow{O'M} \times \vec{F}' = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{O'M_k} \times \vec{F}'_k$$

(σχήμα 2.2β)

όπου $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \ldots \vec{F}'_f$ οι εκφράσεις των δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \ldots \vec{F}_f$ ως προς το σύστημα (O′,x′,y′,z′) και $\vec{F}'$ η συνισταμένη τους.

<u>Απόδειξη</u>

Οι δυνάμεις, όπως και κάθε διανυσματικό μέγεθος που ορίζεται στα σημεία του Σ (μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση σωματιδίου κλπ) δεν εξαρτάται από την επιλογή του αδρανειακού συστήματος αναφοράς: Αν τη στιγμή t, θεωρήσουμε τα στιγμιαία αδρανειακά συστήματα αναφοράς (O,x,y,z), (O′,x′,y′,z′) του σχήματος 2.2β, οι **συντεταγμένες** των δυνάμεων μεταβάλλονται ως προς τα δύο συστήματα, έτσι ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{F}_k = F_{k,x} \cdot \hat{x} + F_{k,y} \cdot \hat{y} = F'_{k,x} \cdot \hat{x}' + F'_{k,y} \cdot \hat{y}' = \vec{F}'_k$$

Στην κατηγορία αυτή δεν ανήκουν τα διανύσματα θέσης των σημείων του σώματος, τα

οποία όπως προκύπτει αμέσως από το σχήμα 2.2β, εξαρτώνται από την επιλογή της αρχής κάθε συστήματος αξόνων.
Η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν στο Σ δεν μεταβάλλεται ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_f = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \ldots + \vec{F}'_f = \vec{F}'$$

Σύμφωνα με την υπόθεσή μας, το σημείο Μ, ως προς το (O,x,y,z) ικανοποιεί την 7. Το ίδιο σημείο, ως προς το (O′,x′,y′,z′) ικανοποιεί τις διαδοχικές ισότητες:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{O'M} \times \vec{F}' = \overrightarrow{O'M} \times \vec{F} = \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}\right) \times \vec{F} = \\
&= \overrightarrow{OM} \times \vec{F} - \overrightarrow{OO'} \times \vec{F} = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k - \overrightarrow{OO'} \times \sum_{k=1}^{f} \vec{F}_k = \\
&= \sum_{k=1}^{f} \left(\overrightarrow{OM_k} - \overrightarrow{OO'}\right) \times \vec{F}_k = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{O'M_k} \times \vec{F}_k = \\
&= \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{O'M_k} \times \vec{F}'_k
\end{aligned}$$

που αποδεικνύουν τη ζητούμενη σχέση.

■

Ώστε αν τη στιγμή t, μπορέσουμε να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα το σημείο εφαρμογής (Μ) της συνισταμένης των δυνάμεων που ενεργούν στο Σ ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z) έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη 7, τότε το Μ θα ικανοποιεί την ίδια συνθήκη ως προς οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα (O′,x′,y′,z′), την ίδια στιγμή t. Ας σημειωθεί ότι γενικά, οι δυνάμεις που ενεργούν στο Σ μεταβάλλονται με το χρόνο. Αν τα συστήματα αξόνων (O,x,y,z), (O′,x′,y′,z′) είναι στερεωμένα στο Σ, τότε τα αντίστοιχα στιγμιαία αδρανειακά συστήματα αναφοράς, ως προς τα οποία διατυπώνουμε τις παραπάνω σχέσεις, απεικονίζουν την κατάσταση του σώματος Σ τη χρονική στιγμή t.

Στη συνέχεια, επιχειρούμε να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες του Μ, ως προς ένα σύστημα αξόνων (O,x,y,z) στερεωμένο στο Σ.

Υπολογισμός των συντεταγμένων του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης ως προς σύστημα αξόνων στερεωμένο στο Σ.
Θεωρούμε το στερεωμένο στο Σ σύστημα αξόνων (O,x,y,z). Οι δυνάμεις που ενεργούν στο Σ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο (O,x,y). Άρα, σύμφωνα με τη σχέση 6, και η συνισταμένη τους $\vec{F}$ βρίσκεται πάνω στο επίπεδο (O,x,y).
Έστω X, Y οι συντεταγμένες του σημείου εφαρμογής (Μ) της συνισταμένης $\vec{F}$, ως προς τους άξονες Ox, Oy αντίστοιχα (σχήμα 2.2γ). Το Μ πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη 7, από την οποία προκύπτει η σχέση:

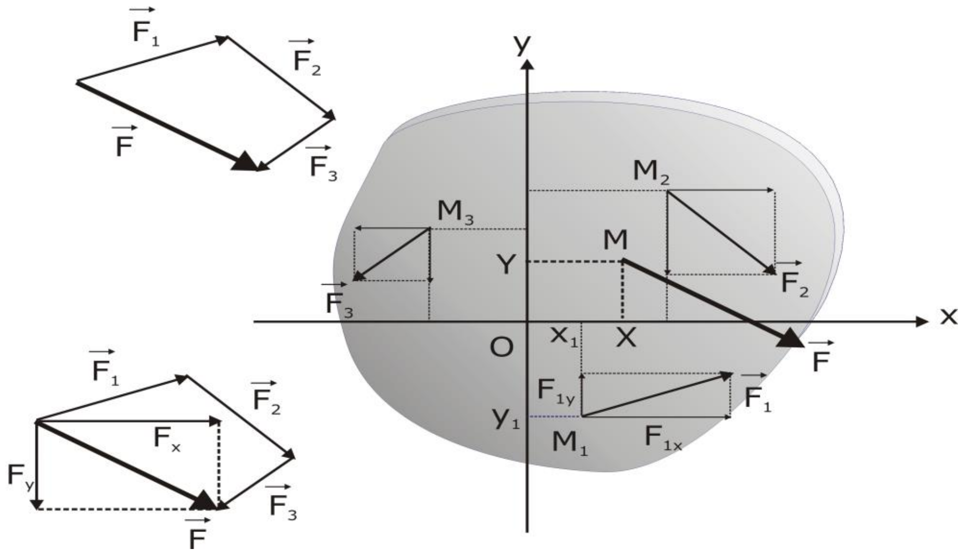
$$\left(X \cdot \hat{x} + Y \cdot \hat{y}\right) \times \left(F_x \cdot \hat{x} + F_y \cdot \hat{y}\right) = \sum_{k=1}^{f} \left[\left(x_k \cdot \hat{x} + y_k \cdot \hat{y}\right) \times \left(F_{k,x} \cdot \hat{x} + F_{k,y} \cdot \hat{y}\right)\right] \qquad (8)$$

όπου τα F_X, F_Y δίδονται από τις σχέσεις 1β και $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων Ox, Oy, Oz αντίστοιχα[1].
Εφαρμόζουμε τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου και μετά από μερικές πράξεις, καταλήγουμε στην εξίσωση:

---

[1] Τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ των αξόνων Ox, Oy, Oz ικανοποιούν τις σχέσεις (Ένθετο 1, στο τέλος του κεφαλαίου 1):

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z} \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x} \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$



Σχήμα 2.2γ: Το σύστημα αξόνων (O,x,y) είναι στερεωμένο στο σώμα Σ. $\vec{F}$ συμβολίζει τη συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν στο Σ. Έστω Μ το σημείο εφαρμογής της $\vec{F}$ και X, Y οι συντεταγμένες του ως προς το σύστημα (O,x,y).

$$X \cdot F_y - Y \cdot F_x = \sum_{k=1}^{f} \left(x_k \cdot F_{k,y} - y_k \cdot F_{k,x} \right) \tag{9}$$

Το δεξί μέρος της 9, καθώς και οι συντελεστές των αγνώστων συντεταγμένων X, Y του σημείου Μ, είναι γνωστές αλγεβρικές ποσότητες: Τα $F_{k,x}$, $F_{k,y}$ είναι οι συντεταγμένες των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στα σωματίδια του Σ. Τα x_k, y_k είναι οι συντεταγμένες του k-σωματιδίου του Σ ως προς το στερεωμένο στο Σ σύστημα αξόνων (O,x,y,z).

Σχόλιο 1: Η εξίσωση 9 είναι ισοδύναμη με την 7. Μας λέει ότι το σημείο Μ βρίσκεται πάνω σε μια συγκεκριμένη ευθεία του επιπέδου (O,x,y) η οποία είναι παράλληλη με τη συνισταμένη $\vec{F}$. Η 9 δεν αρκεί για να προσδιορίσουμε μονοσήμαντα τις συντεταγμένες του Μ. Επιπλέον πρέπει να επισημανθεί ότι η ύπαρξη του Μ προϋποθέτει το μη μηδενισμό της συνισταμένης $\vec{F}$. Αν η συνισταμένη είναι ίση με το μηδέν, τότε οι συντελεστές των X, Y στην 9 μηδενίζονται και η εξίσωση καθίσταται αδύνατη ή αόριστη.

Σχόλιο 2: Για να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες X, Y του σημείου Μ, χρειαζόμαστε άλλη μια εξίσωση, ανεξάρτητη της 9. Για να τη βρούμε, σκεφτόμαστε ως εξής: Αν περιστρέψουμε όλες τις δυνάμεις που ενεργούν στο σώμα γύρω από το σημείο εφαρμογής τους κατά την ίδια γωνία φ, χωρίς να αλλάξουμε το μέτρο τους, τότε σύμφωνα με τη σχέση 6, θα στραφεί και η συνισταμένη τους κατά την ίδια γωνία. Το σημείο εφαρμογής της νέας συνισταμένης $\vec{F}(\varphi)$ βρίσκεται πάνω σε ορισμένη ευθεία του επιπέδου (O,x,y) που, όπως είδαμε στο σχόλιο 1, είναι παράλληλη με τη $\vec{F}(\varphi)$ και ορίζεται από την εξίσωση:

$$\overrightarrow{OM_\varphi} \times \vec{F}(\varphi) = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k(\varphi) \tag{10}$$

Για κάθε τιμή του φ, από τη 10 προκύπτει και μια ευθεία του επιπέδου (O,x,y). Θα αποδείξουμε ότι οι ευθείες αυτές αποτελούν δέσμη. Δηλαδή, έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο Μ. **Ορίζουμε ως σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2 ... \vec{F}_f$ που ενεργούν στο Σ, το κοινό σημείο Μ της δέσμης των ευθειών 10**.

Λήμμα 2.2.1: Περιστροφή διανύσματος γύρω από το σημείο εφαρμογής του κατά απειροστή γωνία Δφ

Έστω διάνυσμα $\vec{f}$ που βρίσκεται στο επίπεδο (Ο,x,y) συστήματος ορθογωνίων αξόνων (Ο,x,y,z). Υποθέτουμε ότι το $\vec{f}$ περιστρέφεται γύρω από την αρχή του Α, πάνω στο επίπεδο (Ο,x,y) διατηρώντας το μήκος του (f) σταθερό. Συμβολίζουμε με $\vec{F}(\varphi)$ το διάνυσμα που προκύπτει από την περιστροφή του $\vec{f}$ κατά γωνία φ (σχήμα 2.2δ). Τότε, καθώς η γωνία φ μεταβάλλεται, ο ρυθμός μεταβολής του διανύσματος $\vec{F}(\varphi)$ ως προς τη φ, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\vec{F}(\varphi)}{d\varphi} = \hat{z} \times \vec{F}(\varphi) \tag{10α}$$

Ή, με ισοδύναμη διατύπωση:

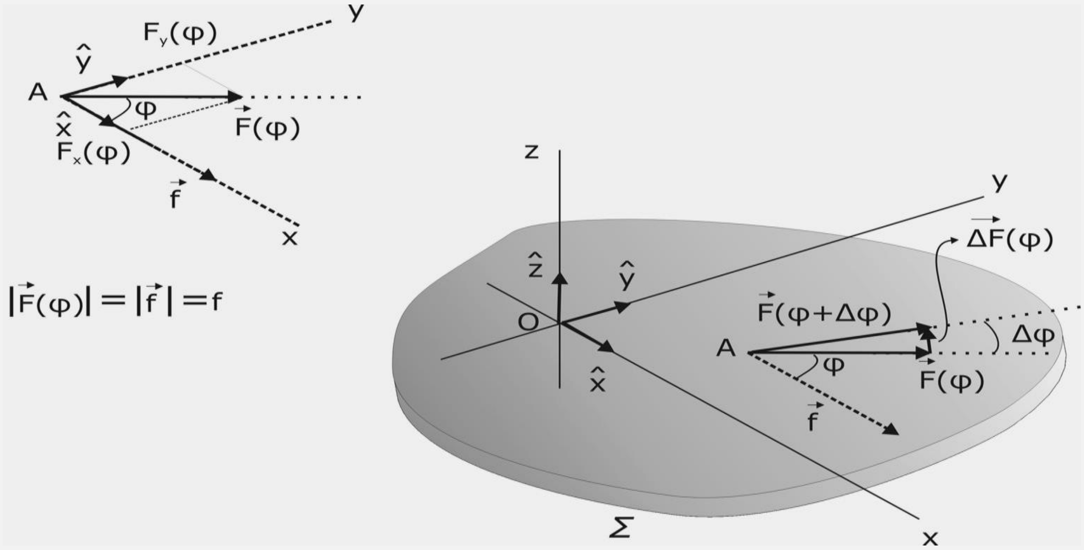
Όταν η γωνία φ μεταβάλλεται κατά την απειροστή ποσότητα Δφ, η αντίστοιχη μεταβολή $\Delta\vec{F}(\varphi)$ του $\vec{F}(\varphi)$, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta\vec{F}(\varphi) = \Delta\varphi \cdot \hat{z} \times \vec{F}(\varphi) \tag{10β}$$

Απόδειξη

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς (χωρίς ωστόσο να βλάψουμε τη γενικότητα της απόδειξης), επιλέγουμε τους άξονες Οx, Οy του στερεωμένου στο Σ ορθογωνίου συστήματος (Ο,x,y,z) έτσι ώστε ο άξονας Οx να είναι παράλληλος με το αρχικό διάνυσμα $\vec{f}$ (σχήμα 2.2δ).

Για μια τυχαία τιμή της γωνίας φ, το διάνυσμα $\vec{F}(\varphi)$ έχει μέτρο ίσο με το μέτρο του $\vec{f}$:



Σχήμα 2.2δ: Περιστροφή διανύσματος $\vec{F}(\varphi)$ του επιπέδου (Ο,x,y) κατά γωνία Δφ, γύρω από το σημείο εφαρμογής του. Οι άξονες έχουν επιλεγεί έτσι ώστε η αρχική θέση (για φ=0) $\vec{f}$ του $\vec{F}(\varphi)$ να είναι παράλληλη με τον άξονα Οx.

$$\left\|\vec{F}(\varphi)\right\| = \left\|\vec{f}\right\| = f$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2δ, το $\vec{F}(\varphi)$ αναλύεται ως προς τους άξονες Ox, Oy σύμφωνα με τη σχέση:

$$\vec{F}(\varphi) = f \cdot \cos(\varphi) \cdot \hat{x} + f \cdot \sin(\varphi) \cdot \hat{y} \tag{11}$$

Παραγωγίζουμε την 11 ως προς φ και δεδομένου ότι τα f, $\hat{x}$, $\hat{y}$ είναι σταθερά - ανεξάρτητα του φ- λαμβάνουμε:

$$\frac{d\vec{F}(\varphi)}{d\varphi} = f \cdot \left(-\sin(\varphi) \cdot \hat{x} + \cos(\varphi) \cdot \hat{y}\right) \tag{12α}$$

Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε εξωτερικά από αριστερά και τα δύο μέρη της σχέσης 11 με το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ και χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου (Ένθετο 1, στο τέλος του κεφαλαίου 1) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}\hat{z} \times \vec{F}(\varphi) &= f \cdot \hat{z} \times \left(\cos(\varphi) \cdot \hat{x} + \sin(\varphi) \cdot \hat{y}\right) = \\ &= f \cdot \left(\cos(\varphi) \cdot \hat{z} \times \hat{x} + \sin(\varphi) \cdot \hat{z} \times \hat{y}\right) \\ &= f \cdot \left(-\sin(\varphi) \cdot \hat{x} + \cos(\varphi) \cdot \hat{y}\right)\end{aligned}$$

από την οποία, σε συνδυασμό με τη 12 προκύπτει αμέσως η ζητούμενη:

$$\frac{d\vec{F}(\varphi)}{d\varphi} = \hat{z} \times \vec{F}(\varphi)$$

και από αυτή, για απειροστή μεταβολή της γωνίας Δφ, έπεται η[1,8]:

$$\Delta\vec{F}(\varphi) = \Delta\varphi \cdot \hat{z} \times \vec{F}(\varphi)$$

Η τιμή του $\vec{F}(\varphi + \Delta\varphi)$, δίδεται από την έκφραση:

$$\vec{F}(\varphi + \Delta\varphi) = \vec{F}(\varphi) + \Delta\vec{F}(\varphi) = \vec{F}(\varphi) + \Delta\varphi \cdot \hat{z} \times \vec{F}(\varphi) \tag{12β}$$

■

Πρόταση 2.2.2

Οι ευθείες του επιπέδου που προκύπτουν από την εξίσωση:

$$\overrightarrow{OM_\varphi} \times \vec{F}(\varphi) = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k(\varphi)$$

για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου $\varphi \in \mathrm{R}$, έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο M, το οποίο είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων:

$$\overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM} \times \vec{F}_k \tag{13α}$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{F} = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \cdot \vec{F}_k \tag{13β}$$

όπου:

$\vec{F} = \vec{F}(0)$, $\vec{F}_k = \vec{F}_k(0)$, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_f \neq 0$

Τα διανύσματα $\vec{F}(\varphi)$, $\vec{F}_k(\varphi)$, $\vec{F}(\varphi) = \sum_{k=1}^{f} \vec{F}_k(\varphi)$, προκύπτουν από τη δράση ενός πίνακα στροφής επί των $\vec{F}_k$, $\vec{F}$: $\begin{cases} F_{k,x}(\varphi) = F_{k,x} \cdot \cos(\varphi) - F_{k,y} \cdot \sin(\varphi) \\ F_{k,y}(\varphi) = F_{k,x} \cdot \sin(\varphi) + F_{k,y} \cdot \cos(\varphi) \end{cases}$, κλπ.

(Ένθετο 2, στο τέλος του κεφαλαίου 1)

<u>Απόδειξη</u>
Α) Δείχνουμε ότι αν Μ είναι λύση του συστήματος

$$\overrightarrow{OM} \times \vec{F}(\varphi) = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k(\varphi) \qquad (14α)$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{F}(\varphi) = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \cdot \vec{F}_k(\varphi) \qquad (14β)$$

για μια τιμή φ της γωνίας στροφής, τότε το Μ είναι λύση του συστήματος των 14α,β για κάθε τιμή της γωνίας φ. Προς τούτο, αρκεί να δείξουμε ότι οι 14 ισχύουν για κάθε απειροστή μεταβολή Δφ της γωνίας φ. Δηλαδή ότι το Μ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\overrightarrow{OM} \times \vec{F}(\varphi + \Delta\varphi) = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k(\varphi + \Delta\varphi) \qquad (14γ)$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{F}(\varphi + \Delta\varphi) = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \cdot \vec{F}_k(\varphi + \Delta\varphi) \qquad (14δ)$$

Σύμφωνα με τις 14α,β και το λήμμα 2.2.1 έχουμε:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \times \vec{F}(\varphi + \Delta\varphi) &= \overrightarrow{OM} \times \left(\vec{F}(\varphi) + \Delta\varphi \cdot \hat{z} \times \vec{F}(\varphi)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k(\varphi) + \Delta\varphi \cdot \overrightarrow{OM} \times \left(\hat{z} \times \vec{F}(\varphi)\right)\end{aligned} \qquad (15)$$

Από τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου (Ένθετο 1 στο τέλος του κεφαλαίου 1), και δεδομένου ότι τόσο οι δυνάμεις, όσο και τα διανύσματα θέσης των σωματιδίων του Σ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο (Ο,x,y) που είναι κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ του άξονα Oz, βρίσκουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\overrightarrow{OM} \times \left(\hat{z} \times \vec{F}(\varphi)\right) = \left(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{F}(\varphi)\right) \cdot \hat{z} - \left(\overrightarrow{OM} \cdot \hat{z}\right) \cdot \vec{F}(\varphi) = \left(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{F}(\varphi)\right) \cdot \hat{z} \qquad (16α)$$

και:

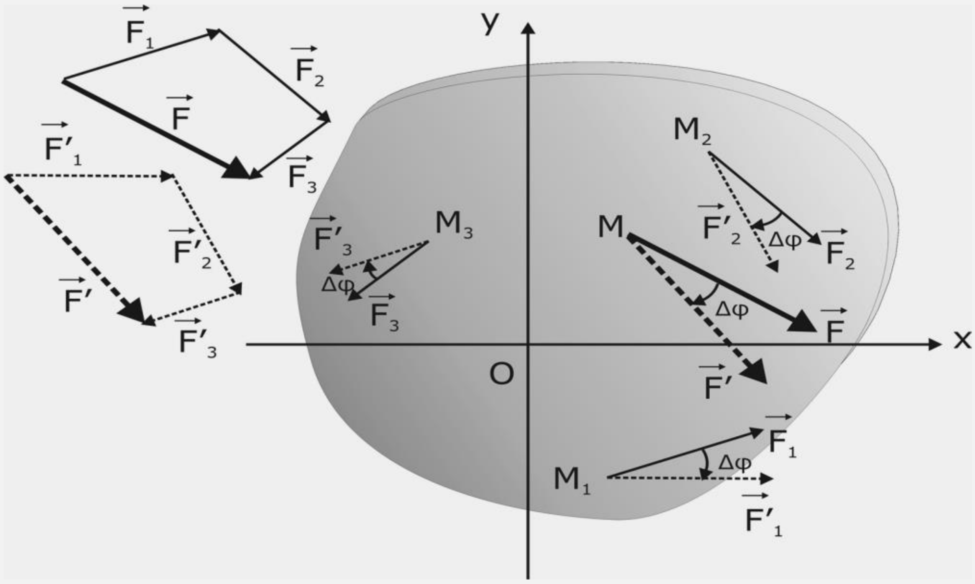
$$\overrightarrow{OM_k} \times \left(\hat{z} \times \vec{F}_k(\varphi)\right) = \left(\overrightarrow{OM_k} \cdot \vec{F}_k(\varphi)\right) \cdot \hat{z} \qquad (16β)$$

οπότε, από τη 15 προκύπτουν οι ισότητες:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \times \vec{F}(\varphi + \Delta\varphi) &= \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k(\varphi) + \Delta\varphi \cdot \left(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{F}(\varphi)\right) \cdot \hat{z} = \\ &= \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k(\varphi) + \Delta\varphi \cdot \sum_{k=1}^{f} \left(\overrightarrow{OM_k} \cdot \vec{F}_k(\varphi)\right) \cdot \hat{z} = \\ &= \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k(\varphi) + \Delta\varphi \cdot \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \left(\hat{z} \times \vec{F}_k(\varphi)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \left(\vec{F}_k(\varphi) + \Delta\varphi \cdot \left(\hat{z} \times \vec{F}_k(\varphi)\right)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k(\varphi + \Delta\varphi)\end{aligned}$$

που αποδεικνύουν τη 14γ. Αντίστοιχα αποδεικνύεται και η 14δ (κάντε την απόδειξη).

Β) Στο βήμα Α δείξαμε ότι αν για μια τιμή του φ υπάρχει το κοινό σημείο Μ των ευθειών 14α, 14β, τότε το Μ είναι κοινό σημείο των 14α, 14β για κάθε τιμή του φ. Έτσι, αν λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων 13α, 13β (που προκύπτουν από τις 14α, 14β για



Σχήμα 2.2ε: Έστω ότι η συνισταμένη $\vec{F}$ των $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ έχει σημείο εφαρμογής το Μ. Αν κάθε δύναμη στραφεί γύρω από το σημείο εφαρμογής της κατά την **ίδια** γωνία Δφ, τότε και η συνισταμένη τους θα στραφεί γύρω από το σημείο Μ κατά γωνία Δφ.

φ=0) και βρούμε το σημείο Μ που τις αληθεύει, το Μ θα είναι κοινό σημείο των 14α, 14β για κάθε τιμή του φ. Επομένως το Μ θα είναι κοινό σημείο όλων των ευθειών με εξισώσεις:

$$\overrightarrow{OM_\varphi} \times \vec{F}(\varphi) = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k(\varphi) \tag{17α}$$

και:

$$\overrightarrow{OM_\varphi} \cdot \vec{F}(\varphi) = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \cdot \vec{F}_k(\varphi) \tag{17β}$$

ώστε όλες αυτές οι ευθείες έχουν το Μ κοινό σημείο: Αποτελούν δέσμη ευθειών.

■

Σχόλιο 3: Με την πρόταση 2.2.2 δείξαμε ότι το κοινό σημείο Μ των εξισώσεων (εφόσον υπάρχει):

$$\overrightarrow{OM} \times \vec{F} = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM} \times \vec{F}_k \tag{13α}$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{F} = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \cdot \vec{F}_k \tag{13β}$$

ανήκει στις ευθείες:

$$\overrightarrow{OM_\varphi} \times \vec{F}(\varphi) = \sum_{k=1}^{f} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{F}_k(\varphi)$$

για κάθε τιμή της γωνίας φ. Επομένως το Μ, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στο «Σχόλιο 2», είναι το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης των ομοεπίπεδων δυνάμεων $\vec{F}_k$ k=1,2…f, που ενεργούν στο δισδιάστατο άκαμπτο σώμα Σ. Οι συντεταγμένες του Μ θα προκύψουν από την αναλυτική έκφραση των 13α, 13β, ως προς το σύστημα αξόνων (O,x,y) (σχήμα 2.2ε). Μετά από μερικές πράξεις, βρίσκουμε ότι οι ισοδύναμες αναλυτικές εκφράσεις των 13α και β είναι:

$$X \cdot F_y - Y \cdot F_x = \sum_{k=1}^{f}\left(x_k \cdot F_{k,y} - y_k \cdot F_{k,x}\right) \quad (18α)$$

$$X \cdot F_x + Y \cdot F_y = \sum_{k=1}^{f}(x_k \cdot F_{k,x} + y_k \cdot F_{k,y}) \quad (18β)$$

Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων 18α και β, λαμβάνουμε (άσκηση 3):

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{F^2} \cdot \left(F_x \cdot \sum_{k=1}^{f}(\vec{r}_k \cdot \vec{F}_k) + F_y \cdot \sum_{k=1}^{f}\tau_k\right) \\ Y &= \frac{1}{F^2} \cdot \left(F_y \cdot \sum_{k=1}^{f}(\vec{r}_k \cdot \vec{F}_k) - F_x \cdot \sum_{k=1}^{f}\tau_k\right) \end{aligned} \quad (18γ)$$

όπου:

$F = \sqrt{F_X{}^2 + F_Y{}^2}$ είναι το μέτρο της συνισταμένης των δυνάμεων $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_f$ (βλέπε και σχέση 1),

$\vec{r}_k \cdot \vec{F}_k = x_k \cdot F_{k,x} + y_k \cdot F_{k,y}$ είναι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης $\vec{r}_k$ του k-σωματιδίου με την εξωτερική δύναμη $\vec{F}_k$, που ενεργεί σε αυτό και,

$\tau_k = \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k\right) \cdot \hat{z} = \vec{\tau}_k \cdot \hat{z}$, η αλγεβρική τιμή της ροπής της δύναμης $\vec{F}_k$: $\vec{\tau}_k = \tau_k \cdot \hat{z}$.

Σχόλιο 4: Οι συντεταγμένες X,Y του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης $\vec{F}$ των εξωτερικών δυνάμεων $\vec{F}_k$ k=1,2…f, που ενεργούν στα αντίστοιχα σωματίδια του άκαμπτου σώματος, υπολογίζονται από τις σχέσεις 18γ. Γενικά, οι δυνάμεις $\vec{F}_k$ k=1,2…f, έχουν διαφορετικά σημεία εφαρμογής και διαφορετικές κατευθύνσεις. Συνοψίζουμε μερικές ιδιότητες της συνισταμένης τους $\vec{F}$ που προκύπτουν από την προηγούμενη ανάλυση:

α) Το σημείο εφαρμογής της $\vec{F}$ δεν μετατοπίζεται αν όλες οι δυνάμεις περιστραφούν γύρω από το σημείο εφαρμογής τους κατά την ίδια γωνία φ. Η διεύθυνση της $\vec{F}$ θα στραφεί γύρω από το σημείο εφαρμογής της κατά την ίδια γωνία φ.

β) Η θέση του σημείου εφαρμογής της $\vec{F}$ είναι τέτοια, ώστε η ροπή της $\vec{F}$ ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z), με τον άξονα Oz κάθετο στο επίπεδο κίνησης του σώματος, ισούται με το άθροισμα των ροπών των συνιστωσών δυνάμεων.

γ) Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία του επιπέδου του σώματος, που είναι παράλληλη με τη συνισταμένη δύναμη και έχει αναλυτική έκφραση την εξίσωση 13α ή 18α. Αν περιστρέψουμε όλες τις δυνάμεις κατά την ίδια γωνία, η ευθεία επί της οποίας βρίσκεται το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης, στρέφεται επίσης κατά την ίδια γωνία. Συμπεραίνουμε ότι όλες αυτές οι ευθείες που προκύπτουν όταν αλλάζουμε τη γωνία στροφής, συντρέχουν στο κοινό τους σημείο, που δεν είναι άλλο από το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης. Με βάση την παρατήρηση αυτή μπορούμε να βρούμε γεωμετρικά το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης πολλών ομοεπίπεδων δυνάμεων, αρκεί να γνωρίζουμε δύο από τις ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκεται (Εφαρμογή 2).

δ) Αν στο σημείο εφαρμογής της συνισταμένης ασκήσουμε μια δύναμη αντίθετη της συνισταμένης, τότε το σώμα θα ισορροπήσει. Επιπλέον, θα συνεχίσει να βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, αν όλες οι δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό περιστραφούν γύρω από τα σημεία εφαρμογής τους κατά την ίδια γωνία.

Παράδειγμα 1.1: Στα άκρα Α και Β άκαμπτης ράβδου μήκους L ενεργούν οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2η. Να υπολογιστεί η συνισταμένη των $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ και να βρεθεί το σημείο εφαρμογής της. [Δίνονται: L=1m, F_1=2N, F_2=3N, Οι γωνίες των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ με τον άξονα Αy είναι -π/3 και +π/3 rads, αντίστοιχα]

Λύση

Οι συνιστώσες της συνισταμένης $\vec{F}$, ως προς το σύστημα αξόνων (Α,x,y) είναι:

$$\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} = -\sqrt{3} + 1{,}5 \cdot \sqrt{3} = 0{,}5 \cdot \sqrt{3}\ \text{(N)} \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} = 1 + 1{,}5 = 2{,}5\ \text{(N)} \end{aligned} \tag{19}$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες (Χ,Υ) του σημείου εφαρμογής Σ της συνισταμένης, επιλύουμε το γραμμικό σύστημα των εξισώσεων 18α και β:

$$X \cdot F_Y - Y \cdot F_X = \sum_{k=1}^{f} (x_k \cdot F_{k,y} - y_k \cdot F_{k,x}) \tag{20}$$

$$X \cdot F_X + Y \cdot F_Y = \sum_{k=1}^{f} (x_k \cdot F_{k,x} + y_k \cdot F_{k,y}) \tag{21}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα της εφαρμογής, οι εξισώσεις 20 και 21 λαμβάνουν τη μορφή:

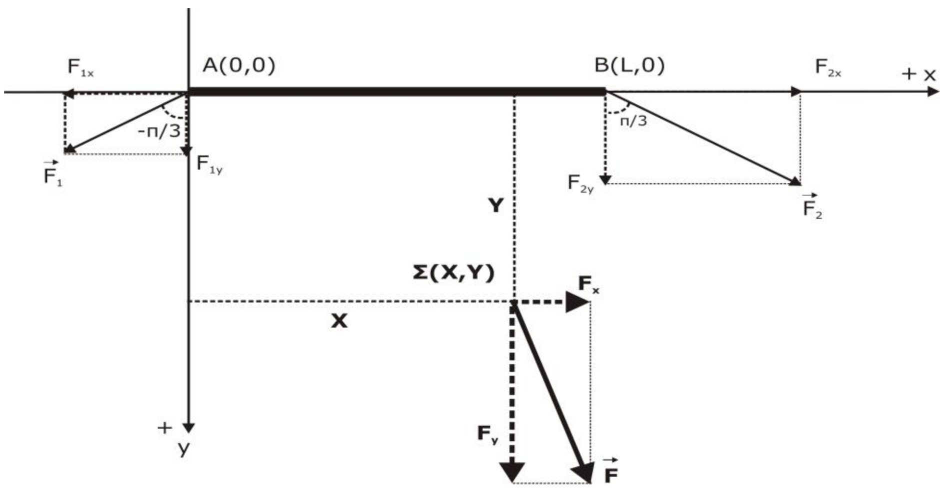
$$\begin{aligned} 2{,}5 \cdot X - 0{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot Y &= 1{,}5 \\ 0{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot X + 2{,}5 \cdot Y &= 1{,}5 \cdot \sqrt{3} \end{aligned}$$

ή:

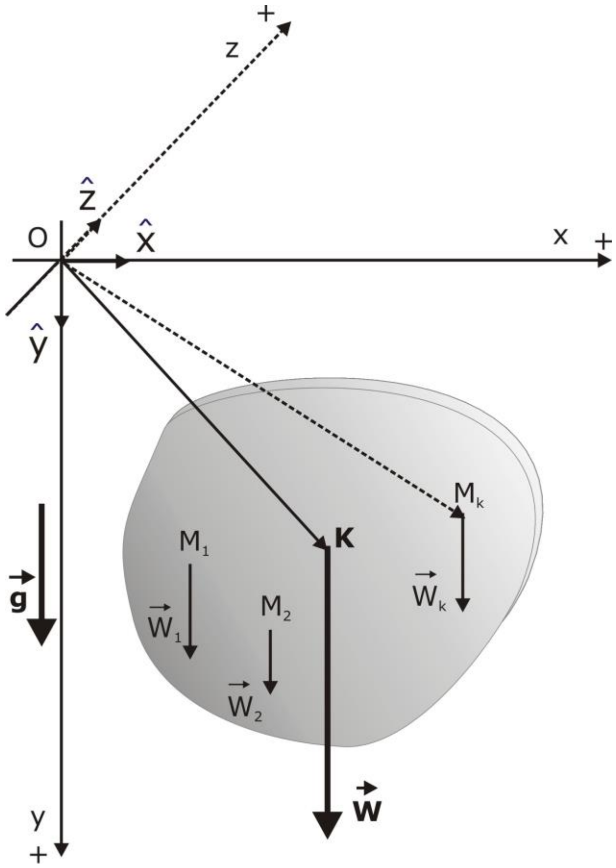
$$\begin{aligned} 5 \cdot X - \sqrt{3} \cdot Y &= 3 \\ \sqrt{3} \cdot X + 5 \cdot Y &= 3 \cdot \sqrt{3} \end{aligned} \tag{22}$$

Η λύση του συστήματος 22 είναι: $X = 6/7 \simeq 0{,}86$ (m) $Y = 3 \cdot \sqrt{3}/7 \simeq 0{,}74$ (m).

Εφαρμογή 2: Κέντρο μάζας και σημείο εφαρμογής του βάρους άκαμπτου σώματος



Σχήμα 2.2η: Η άκαμπτη ράβδος ΑΒ έχει μήκος L=1m. Στα άκρα της ενεργούν οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, που έχουν μέτρα F_1=2N και F_2=3N, και οι κατευθύνσεις τους σχηματίζουν γωνίες -π/3 και +π/3 rads, με το θετικό ημιάξονα Αy, αντίστοιχα. Ονομάζουμε Χ, Υ τις συντεταγμένες του σημείου Σ εφαρμογής της συνισταμένης τους $\vec{F}$, ως προς το εικονιζόμενο σύστημα αξόνων (Α,x,y), που είναι στερεωμένο στη ράβδο και έχει αρχή το άκρο της Α. Η ράβδος και οι δυνάμεις βρίσκονται στο επίπεδο (Α,x,y).



Σχήμα 2.2θ: Το σημείο εφαρμογής του βάρους $\vec{W}$, του άκαμπτου σώματος Σ ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του K.

Στην εφαρμογή 1 βρήκαμε τον τρόπο υπολογισμού της συνισταμένης πολλών δυνάμεων που ενεργούν πάνω σε ένα άκαμπτο σώμα. Στην παρούσα παράγραφο, θα εφαρμόσουμε τις τεχνικές αυτές για τον υπολογισμό της θέσης του σημείου εφαρμογής του βάρους ενός δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, που βρίσκεται εντός ομοιογενούς πεδίου βαρύτητας $\vec{g}$, με το επίπεδό του παράλληλο προς αυτό (σχήμα 2.2θ). Θα δείξουμε ότι **το σημείο εφαρμογής του βάρους του σώματος ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του** (όπως αυτό ορίστηκε στην παράγραφο 1.3Α).

Απόδειξη

Σύμφωνα με το μοντέλο που αναπτύξαμε στην Ενότητα 1.1, το άκαμπτο σώμα Σ αποτελείται από ένα σύνολο N σωματιδίων. Εάν τοποθετήσουμε το Σ εντός ομοιογενούς βαρυτικού πεδίου $\vec{g}$, σε κάθε σωματίδιο του Σ δρα βαρυτική δύναμη. Το k-σωματίδιο του Σ έχει μάζα m_k, k=1,2…N και επομένως δέχεται από το βαρυτικό πεδίο δύναμη

$$\vec{W}_k = m_k \cdot \vec{g} \qquad (1)$$

Αφού το πεδίο είναι ομοιογενές, όλα τα $\vec{W}_k$ είναι παράλληλα με το $\vec{g}$ και μεταξύ τους.

Θεωρούμε ένα σύστημα αξόνων (O,x,y,z), στερεωμένο στο Σ. Το επίπεδο Oxy ταυτίζεται με το επίπεδο του Σ και ο άξονας Oy είναι παράλληλος με το $\vec{g}$ (σχήμα 2.2θ).

Το βάρος $\vec{W}$ του Σ είναι ίσο με τη συνισταμένη των $\vec{W}_k$ k=1,2…N:

$$\vec{W} = \sum_{k=1}^{N} \vec{W}_k = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \vec{g} = \\ = M \cdot \vec{g} \tag{2}$$

όπου $M = \sum_{k=1}^{N} m_k$ είναι η μάζα του σώματος Σ.

Ονομάζουμε K το σημείο εφαρμογής του βάρους $\vec{W}$ του Σ. Η θέση του K ως προς το σύστημα (O,x,y,z), προσδιορίζεται από τις εξισώσεις 13α και β (ή τις ισοδύναμές τους 18α και β) της Εφαρμογής 1:

$$\overrightarrow{OK} \times \vec{W} = \sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{W}_k \tag{3}$$

και

$$\overrightarrow{OK} \cdot \vec{W} = \sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{OM_k} \cdot \vec{W}_k \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας τα $\vec{W}_k$ και $\vec{W}$ σύμφωνα με τις 1 και 2, από τις 3 και 4 προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\left(M \cdot \overrightarrow{OK} - \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \overrightarrow{OM_k} \right) \times \vec{g} = 0 \tag{5}$$

και

$$\left(M \cdot \overrightarrow{OK} - \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \overrightarrow{OM_k} \right) \cdot \vec{g} = 0 \tag{6}$$

Θα δείξουμε ότι από τις 5 και 6 έπεται ότι το διάνυσμα

$$\vec{S} \equiv M \cdot \overrightarrow{OK} - \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \overrightarrow{OM_k} \tag{7}$$

ισούται με το μηδενικό διάνυσμα:

Δεδομένου ότι το $\vec{g}$ είναι παράλληλο στον άξονα Oy, έχουμε ότι $\vec{g} = g \cdot \hat{y}$ (όπου $\hat{y}$ το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα Oy). Εξ άλλου, τα διανύσματα $\overrightarrow{OM_k}$ k=1,2…N και $\overrightarrow{OM}$ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο (O,x,y), επομένως και το διάνυσμα $\vec{S}$ βρίσκεται πάνω στο ίδιο επίπεδο. Αν συμβολίσουμε με S_x, S_y τις συνιστώσες του $\vec{S}$ ως προς τους άξονες Ox, Oy, έχουμε:

$$\vec{S} = S_x \cdot \hat{x} + S_y \cdot \hat{y}$$

Από τη σχέση 5 και τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου, βρίσκουμε:

$$\left(S_x \cdot \hat{x} + S_y \cdot \hat{y}\right) \times \hat{y} = 0$$

$$S_x \cdot \hat{x} \times \hat{y} + S_y \cdot \hat{y} \times \hat{y} = 0$$

$$S_x \cdot \hat{z} = 0$$

$$S_x = 0$$

Αντίστοιχα, από την 6:

$$\left(S_x \cdot \hat{x} + S_y \cdot \hat{y}\right) \cdot \hat{y} = 0$$

$$S_x \cdot \left(\hat{x} \cdot \hat{y}\right) + S_y \cdot \left(\hat{y} \cdot \hat{y}\right) = 0$$

$$S_y = 0$$

Ώστε οι συνιστώσες του $\vec{S}$ είναι ίσες με το μηδέν, άρα το $\vec{S}$ είναι ίσο με το μηδενικό διάνυσμα:

$$\vec{S} = M \cdot \overrightarrow{OK} - \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \overrightarrow{OM_k} = 0$$

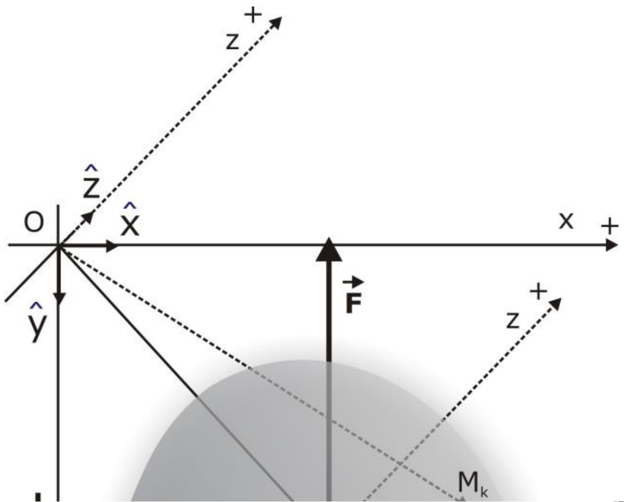
ή:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \overrightarrow{OM_k} \tag{8}$$

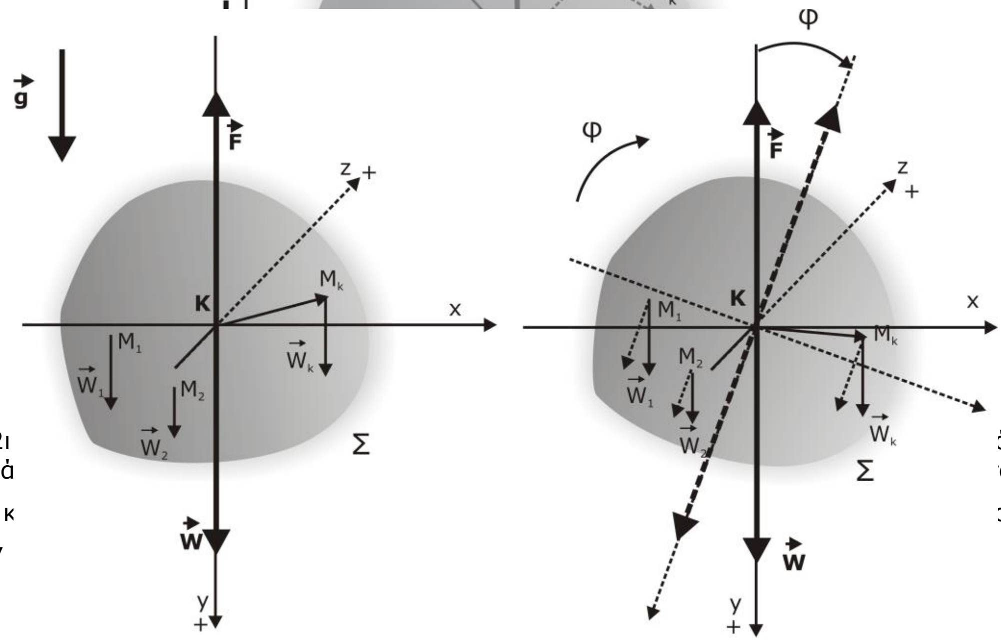
Η τελευταία εξίσωση δηλώνει ότι το σημείο Κ ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του Σ (παράγραφος 1.3Α).

■

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν στο κέντρο μάζας Κ του σώματος Σ εφαρμόσουμε μια δύναμη αντίθετη του βάρους του, τότε οι συνθήκες ισορροπίας για το δισδιάστατο σώμα Σ ικανοποιούνται (σχέσεις 4 και 5 της παραγράφου 2.1Β): Η συνισταμένη όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο Σ είναι ίση με το μηδέν και το άθροισμα των ροπών των δυνάμεων αυτών ως προς οποιοδήποτε στερεωμένο στο Σ σύστημα αξόνων (O,x,y,z) είναι ίσο με το μηδέν.
Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι αναρτούμε το σώμα Σ στον οριζόντιο, σταθερό ως προς το



Σχήμα 2.2ι ... ό σύστημα (O,x,y,z), ά... ου Κ. Το Σ ισορροπεί κ... ου ασκεί ο άξονας Kz,



Σχήμα 2.2κ: Το Σ είναι αναρτημένο σε οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του Κ, και βρίσκεται σε στατική ισορροπία. Αν το Σ περιστραφεί γύρω από τον άξονα Kz κατά γωνία φ, ως προς το σύστημα (K,x,y,z), τότε όλες οι εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στο Σ περιστρέφονται ως προς το (K,x,y,z) κατά γωνία -φ και το Σ ισορροπεί και στη νέα θέση.

αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z) άξονα Kz, που διέρχεται από το κέντρο μάζας K του Σ, γύρω από τον οποίο μπορεί να στρέφεται ελεύθερα (σχήμα 2.2ι). Αφού το K διατηρείται ακίνητο ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), ο άξονας Kz ασκεί στο Σ μια δύναμη $\vec{F}$, τέτοια ώστε:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{W}_k + \vec{F} = 0 \tag{9}$$

ή

$$\vec{F} = -\vec{W} \tag{10}$$

όπου $\vec{W}$ το βάρος του Σ.
Επιπλέον, σύμφωνα με τη σχέση 3, ισχύει:

$$\overrightarrow{OK} \times \vec{W} = \sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{W}_k$$

η οποία, σε συνδυασμό με τη 10 μας οδηγεί στη σχέση:

$$\sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{W}_k + \overrightarrow{OK} \times \vec{F} = 0 \tag{11}$$

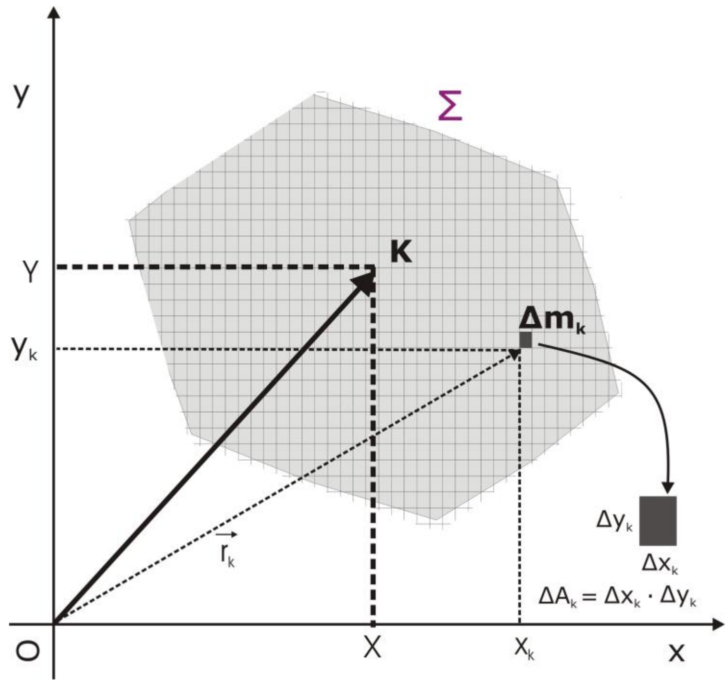
Οι σχέσεις 9 και 11 εκφράζουν τις συνθήκες ισορροπίας δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ εντός ομοιογενούς πεδίου βαρύτητας, που μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό (ως προς αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z)) άξονα Kz που διέρχεται από το κέντρο μάζας του K και είναι κάθετος στο επίπεδο του Σ.

Υποθέτουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα του Σ ως προς το (O,x,y,z) είναι μηδέν. Δηλαδή, το Σ βρίσκεται σε στατική ισορροπία. Αν επιλέξουμε την αρχή O του (O,x,y,z), να ταυτίζεται με το K, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{OK}$ μηδενίζεται και από τη συνθήκη 11 προκύπτει ότι:

$$\sum_{k=1}^{N} \overrightarrow{OM_k} \times \vec{W}_k = 0$$

δηλαδή, το άθροισμα των ροπών των βαρών των σωματιδίων του, ως προς το αδρανειακό σύστημα (K,x,y,z) είναι ίσο με το μηδέν.

Αν περιστρέψουμε το Σ γύρω από τον άξονα Kz κατά γωνία φ, ως προς το σύστημα αξόνων (K,x,y,z), τότε οι βαρυτικές δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια του Σ, περιστρέφονται όλες κατά την ίδια γωνία φ (σχήμα 2.2κ). Σύμφωνα με τις ιδιότητες του σημείου εφαρμογής της συνισταμένης (Εφαρμογή 1), το σημείο εφαρμογής του βάρους δεν μετατοπίζεται. Το διάνυσμα $\vec{W}$ και η αντίδραση $\vec{F}$ του άξονα περιστροφής περιστρέφονται γύρω από το K κατά την ίδια γωνία φ και το σώμα ισορροπεί και στη νέα θέση του. Η κατάσταση ισορροπίας του σώματος δεν μεταβάλλεται, μολονότι για την περιστροφή του έδρασε μια εξωτερική διαταραχή. Η ισορροπία του τύπου αυτού, ονομάζεται «αδιάφορη ισορροπία». Μπορούμε να διακρίνουμε άλλα δύο είδη ισορροπίας: την «ευσταθή» και την «ασταθή» (άσκηση 4). Στην πρώτη, αν εκτρέψουμε κατά μικρή γωνία Δφ το σώμα από τη θέση της ισορροπίας του και το αφήσουμε ελεύθερο, θα αναπτυχθεί μια ροπή που τείνει να το επαναφέρει στην αρχική θέση ισορροπίας. Αντίθετα, στη δεύτερη μετά την εκτροπή από τη θέση της ισορροπίας, αναπτύσσεται ροπή που τείνει να απομακρύνει το σώμα ακόμα περισσότερο από την αρχική θέση της ισορροπίας του.



Σχήμα 2.2λ: Ανάλυση του σώματος Σ σε σύνολο στοιχειωδών ορθογωνίων. Οι διαστάσεις του k-ορθογωνίου είναι απειροστές: Δx_k, Δy_k.

Εφαρμογή 3: Υπολογισμός της θέσης του κέντρου μάζας δισδιάστατου άκαμπτου σώματος

Σύμφωνα με τους ορισμούς της παραγράφου 1.3Α, η θέση του κέντρου μάζας Κ ενός άκαμπτου σώματος Σ, ως προς ένα σύστημα αναφοράς (O,x,y,z) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \overrightarrow{OM_k} \tag{1}$$

όπου m_k είναι η μάζα του k-σωματιδίου (k=1,2…N) και

$$M = \sum_{k=1}^{N} m_k \tag{2}$$

η συνολική μάζα του σώματος.
Στην περίπτωση όπου το άκαμπτο σώμα δεν μπορεί να αναλυθεί σε σύνολο πεπερασμένου αριθμού (N) διακριτών σωματιδίων, αλλά εμφανίζεται ως μια συνεχής κατανομή μάζας, τότε οι αθροίσεις που εμφανίζονται στις σχέσεις 1 και 2, πρέπει να αντικατασταθούν με ολοκληρώσεις ως προς την κατανομή αυτή.

Πώς θα μεταβούμε από τα αθροίσματα ως προς τα διακριτά σωματίδια που χαρακτηρίζονται με το δείκτη k=1,2…N και η θέση τους προσδιορίζεται από τα διανύσματα θέσης $\overrightarrow{OM_k}$*, σε υπολογισμούς ως προς συνεχείς κατανομές σημείων; Με τι θα αντικαταστήσουμε την έννοια του k-σωματιδίου;*

Ας αναλύσουμε την επιφάνεια του σώματος Σ σε ένα πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο σύνολο N μικρών –στοιχειωδών- ορθογωνίων, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2λ. Αν φανταστούμε τα ορθογώνια αυτά όσο θέλουμε μικρά, τότε καθένα από αυτά, οριακά προσεγγίζει ένα συγκεκριμένο σωματίδιο του Σ. Αφού το σύνολο των ορθογωνίων είναι πεπερασμένο, μπορούμε να τα αριθμήσουμε με τους αριθμούς 1,2,…N.
Το k-στοιχειώδες ορθογώνιο έχει εμβαδόν:

$$\Delta A_\kappa = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$$

και η θέση του, ως προς το στερεωμένο στο Σ σύστημα αξόνων (Ο,x,y), προσδιορίζεται από το διάνυσμα:

$$\vec{r}_k = (x_k, y_k) = x_k \cdot \hat{x} + y_k \cdot \hat{y}$$

Καθένα από τα στοιχειώδη k-ορθογώνια (k=1,2…N), στα οποία αναλύσαμε το σώμα Σ, έχει μια μάζα Δm_k, που είναι ανάλογη της απειροστής επιφάνειας ΔA_k:

$$\Delta m_k = \sigma(x_k, y_k) \cdot \Delta A_\kappa \tag{3}$$

Ο συντελεστής αναλογίας $\sigma(x_k,y_k)$ είναι συνάρτηση της θέσης του k-ορθογωνίου και ονομάζεται «επιφανειακή πυκνότητα» του δισδιάστατου σώματος Σ.
Στην περίπτωση που η επιφανειακή πυκνότητα έχει την ίδια τιμή σ σε κάθε σημείο του σώματος Σ, τότε το Σ λέμε ότι είναι ένα **ομοιογενές** σώμα.
Με τη βοήθεια της έννοιας της επιφανειακής πυκνότητας, οι σχέσεις 1 και 2, από τις οποίες προσδιορίζονται η μάζα και η θέση του κέντρου μάζας του Σ, μετασχηματίζονται ως εξής:

$$M = \sum_{k=1}^{N} \Delta m_k = \sum_{k=1}^{N} \sigma(x_k, y_k) \cdot \Delta A_\kappa =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sigma(x_k, y_k) \cdot \Delta x_\kappa \cdot \Delta y_k$$

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{N} \Delta m_k \cdot \vec{r}_k =$$

$$= \left(\frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{N} \sigma(x_k, y_k) \cdot \Delta A_\kappa \cdot x_k \right) \cdot \hat{x} + \left(\frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{N} \sigma(x_k, y_k) \cdot \Delta A_\kappa \cdot y_k \right) \cdot \hat{y}$$

ή:

$$X = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot \sigma(x_k, y_k) \cdot \Delta x_\kappa \cdot \Delta y_k$$

$$Y = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{N} y_k \cdot \sigma(x_k, y_k) \cdot \Delta x_\kappa \cdot \Delta y_k$$

όπου X, Y οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας K του Σ (σχήμα 2.2λ).
Στο όριο, όπου η διαμέριση του Σ γίνεται τόσο πυκνή, ώστε όλα τα Δx_k, Δy_k συγκλίνουν στο μηδέν, οι παραπάνω σχέσεις συγκλίνουν στα αντίστοιχα επιφανειακά ολοκληρώματα πάνω στην επιφάνεια S του Σ:

$$M = \int_S \sigma(x, y) \cdot dxdy \tag{4}$$

και

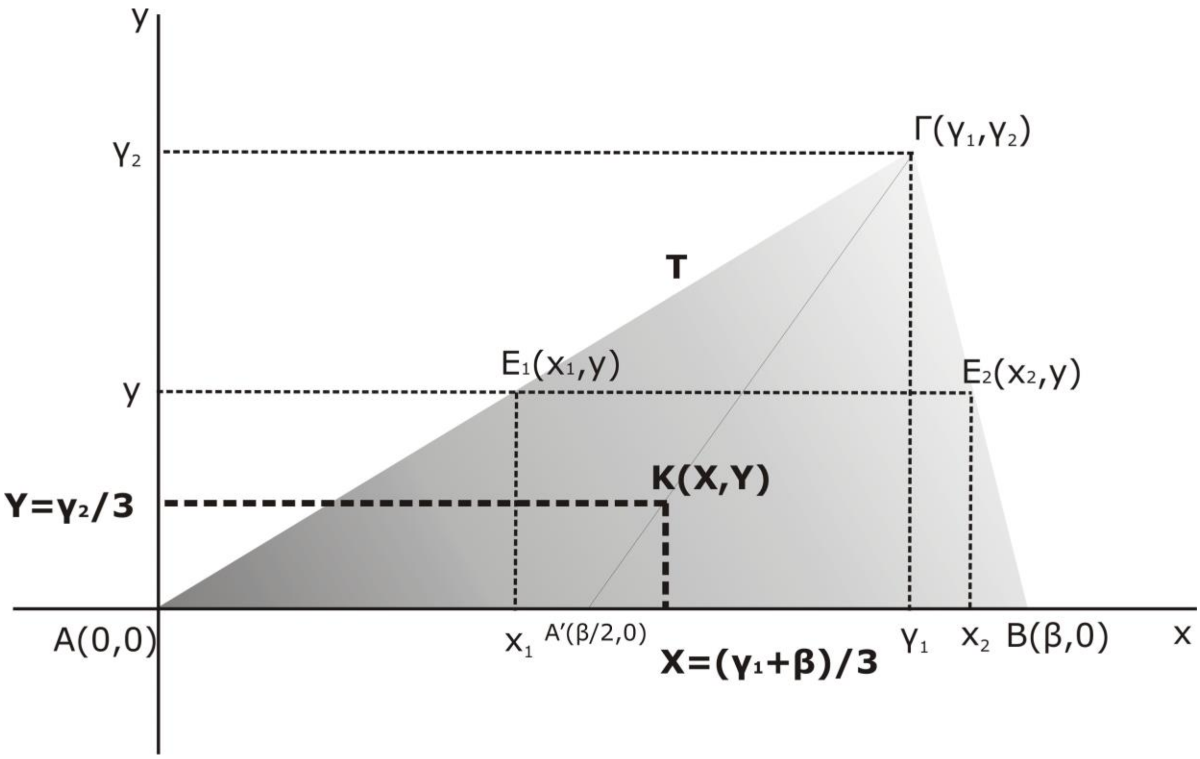
$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \cdot \int_S x \cdot \sigma(x, y) \cdot dxdy \\ Y &= \frac{1}{M} \cdot \int_S y \cdot \sigma(x, y) \cdot dxdy \end{aligned} \tag{5}$$

Στη περίπτωση που το δισδιάστατο σώμα Σ είναι ομοιογενές, δηλαδή έχει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ σε όλη του την έκταση, οι σχέσεις 4 και 5 απλοποιούνται στις:

$$M = \sigma \cdot \int_S dxdy \tag{6α}$$

$$X = \frac{\sigma}{M} \cdot \int_S x \cdot dxdy \tag{6β}$$

$$Y = \frac{\sigma}{M} \cdot \int_S y \cdot dxdy \tag{6γ}$$



Σχήμα 2.2μ: Υπολογισμός των συντεταγμένων του κέντρου μάζας K, ομοιογενούς τριγωνικού άκαμπτου σώματος.

Οι ολοκληρώσεις πραγματοποιούνται πάνω στην επιφάνεια του άκαμπτου σώματος. Στην περίπτωση που το σώμα έχει ακανόνιστο σχήμα, μόνον αριθμητικός -προσεγγιστικός- υπολογισμός είναι δυνατός. Αν όμως το σώμα έχει συγκεκριμένο γεωμετρικό σχήμα και είναι ομοιογενές, τότε μπορεί να γίνει αναλυτικός υπολογισμός, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 3.1: Να βρεθούν οι συντεταγμένες X,Y του κέντρου μάζας δεδομένου ομοιογενούς τριγώνου T, μάζας M, ως προς σύστημα συντεταγμένων (O,x,y), στερεωμένο στο T.

Θεωρούμε το ομοιογενές τριγωνικό σώμα T με κορυφές τα σημεία A, B, Γ. Επιλέγουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων (O,x,y,z), στερεωμένο στο T, έτσι ώστε το T να βρίσκεται στο επίπεδο (O,x,y): η κορυφή του A ταυτίζεται με την αρχή O του συστήματος και η πλευρά AB βρίσκεται πάνω στον άξονα Ox. Με την επιλογή αυτή, οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου, είναι: $A\equiv(0,0)$, $B\equiv(\beta,0)$ και $\Gamma\equiv(\gamma_1,\gamma_2)$ (σχήμα 2.2ι).

A) Υπολογίζουμε την επιφανειακή πυκνότητα σ του T, συναρτήσει της μάζας του M και των γεωμετρικών δεδομένων του T:

Από τη σχέση 6α και το σχήμα 2.2μ, έχουμε:

$$M=\sigma\cdot\int_T dx\cdot dy=\sigma\cdot\int_0^{\gamma_2}dy\int_{x_1}^{x_2}dx \qquad (7)$$

Αν και το αποτέλεσμα είναι γνωστό από τη στοιχειώδη Γεωμετρία, για δείξουμε τον γενικό τρόπο εργασίας, κάνουμε σχολαστικό υπολογισμό του ολοκληρώματος της σχέσης 7. Πραγματοποιούμε πρώτα την ολοκλήρωση κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος E_1E_2, όπου $E_1\equiv(x_1,y)$, $E_2\equiv(x_2,y)$. Κατά μήκος του E_1E_2, το y διατηρείται σταθερό. Οι τιμές των x_1 και x_2 είναι αντίστοιχα:

$$x_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot y$$

$$x_2 = \beta + \frac{\gamma_1 - \beta}{\gamma_2} \cdot y$$

Οπότε, από τη σχέση 7, προκύπτει:

$$M = \sigma \cdot \int_0^{\gamma_2} dy \left(\beta + \frac{\gamma_1 - \beta}{\gamma_2} \cdot y - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot y \right)$$

και από αυτήν, το αναμενόμενο αποτέλεσμα:

$$M = \sigma \cdot \frac{\beta \cdot \gamma_2}{2}$$

από το οποίο, υπολογίζουμε την επιφανειακή πυκνότητα σ του Τ:

$$\sigma = \frac{2 \cdot M}{\beta \cdot \gamma_2} \tag{8}$$

Β) Εφαρμόζουμε τις σχέσεις 6β και 6γ, για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες Χ και Υ, του κέντρου μάζας του Τ. Ακολουθούμε την ίδια τεχνική υπολογισμού και λαμβάνουμε:

$$X = \frac{\sigma}{M} \cdot \int_0^{\gamma_2} dy \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx = \frac{\sigma}{M} \cdot \int_0^{\gamma_2} dy \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right)$$

$$Y = \frac{\sigma}{M} \cdot \int_0^{\gamma_2} y \cdot dy \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{\sigma}{M} \cdot \int_0^{\gamma_2} dy \cdot y \cdot (x_2 - x_1)$$

τελικά:

$$X = \frac{\gamma_1 + \beta}{3}, \quad Y = \frac{\gamma_2}{3} \tag{9}$$

Με χρήση λίγης αναλυτικής γεωμετρίας (σχήμα 2.2μ), μπορεί κανείς να δείξει ότι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των διαμέσων (Θ) του τριγώνου Τ είναι επίσης $\Theta \equiv \left(\frac{\gamma_1 + \beta}{3}, \frac{\gamma_2}{3} \right)$: Το κέντρο μάζας ομοιογενούς τριγώνου ταυτίζεται με το σημείο τομής των διαμέσων του.

<u>Πειραματικός έλεγχος</u>

Τα θεωρητικά αποτελέσματα του παραδείγματος 3.1, σε συνδυασμό με τα συμπεράσματα της εφαρμογής 2, μπορούν να ελεγχθούν πειραματικά. Δηλαδή, στηριζόμενοι στα πορίσματα των εφαρμογών 1, 2 και 3 του θεωρητικού μοντέλου του άκαμπτου σώματος, μπορούμε να σχεδιάσουμε πειραματικές δραστηριότητες με τις οποίες είναι δυνατόν να ελεγχθούν συγκεκριμένες προβλέψεις του μοντέλου.

Μερικά παραδείγματα «ελέγξιμων» προβλέψεων είναι τα ακόλουθα:

a. Αν στο άκαμπτο σώμα Σ ασκήσουμε δύναμη αντίθετη του βάρους του, με σημείο εφαρμογής το κέντρο μάζας του Σ, τότε το Σ θα ισορροπήσει.
b. Αν στερεώσουμε το Σ σε οριζόντιο, σταθερό άξονα, γύρω από τον οποίο μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα, τότε το σώμα μπορεί να ισορροπήσει σε τέτοια θέση ώστε ο άξονας περιστροφής και το κέντρο μάζας του να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφη.

c. Αν ο άξονας στήριξης διέρχεται από το κέντρο μάζας του σώματος, τότε το σώμα ισορροπεί οποιαδήποτε γωνία και αν το περιστρέψουμε γύρω από τον άξονα περιστροφής.
d. Σε κάθε άλλη περίπτωση, αν εκτρέψουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας του, τότε παύει να ισορροπεί και είτε απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του, είτε επανέρχεται προς αυτή (άσκηση 4).
e. Το κέντρο μάζας ενός ομοιογενούς τριγώνου ταυτίζεται με το σημείο τομής των διαμέσων του. Το κέντρο μάζας ενός ομοιογενούς δίσκου ταυτίζεται με το κέντρο του.

Ο πειραματικός έλεγχος του μοντέλου που μπορεί να πραγματοποιηθεί στο πλαίσιο των προτάσεων a-e, συνίσταται στο σχεδιασμό πειραματικών δραστηριοτήτων με τις οποίες είναι δυνατό να αποφανθούμε για την αλήθεια ή το ψεύδος των προτάσεων αυτών, όπως εξειδικεύονται σε συγκεκριμένες συνθήκες του φυσικού (natural) κόσμου. Για παράδειγμα:

- Κατασκευάζουμε ένα τρίγωνο από ένα λεπτό φύλλο ομοιογενούς στερεού υλικού (για παράδειγμα από λεπτό φύλλο σιδήρου). Θεωρούμε ότι το τρίγωνό μας, στις συνθήκες των πειραμάτων που διεξάγουμε με αυτό, συμπεριφέρεται ως άκαμπτο σώμα.
- Σχεδιάζουμε τις διαμέσους του τριγώνου μας και βρίσκουμε το σημείο τομής τους Θ.
- Στερεώνουμε το τρίγωνο σε λεπτό, οριζόντιο άξονα Ο που διέρχεται από το Θ, έτσι ώστε το τρίγωνο να μπορεί να περιστρέφεται με τις ελάχιστες δυνατές τριβές γύρω από αυτόν.
- Αφήνουμε το τρίγωνο να ισορροπήσει.
- Περιστρέφουμε το τρίγωνο γύρω από τον άξονα περιστροφής και ελέγχουμε αν μπορεί να ισορροπήσει στη νέα θέση.
- Τοποθετούμε τον άξονα περιστροφής σε σημείο του τριγώνου, διαφορετικό από το κέντρο μάζας του και ελέγχουμε κατά πόσον οι καταστάσεις ισορροπίας του συμφωνούν, ή όχι, με τις προβλέψεις του θεωρητικού μοντέλου.
- Αξιολογούμε τις πειραματικές δραστηριότητες σε συνδυασμό με τις προϋποθέσεις και τους περιορισμούς που θέτει το μοντέλο. Για παράδειγμα: α) κατά πόσον τεκμηριώνεται η υπόθεσή μας ότι το πραγματικό σώμα συμπεριφέρεται όπως το θεωρητικό άκαμπτο σώμα; β) υπήρξαν παράγοντες που μπορεί να επηρεάζουν τα αποτελέσματα των πειραμάτων, αλλά αγνοήθηκαν κατά την πειραματική διαδικασία; γ) η συμφωνία των πειραματικών δεδομένων με τις θεωρητικές προβλέψεις, βρίσκονται στην περιοχή του σφάλματος που εισάγει η ακρίβεια των συσκευών που χρησιμοποιήσαμε; κλπ.

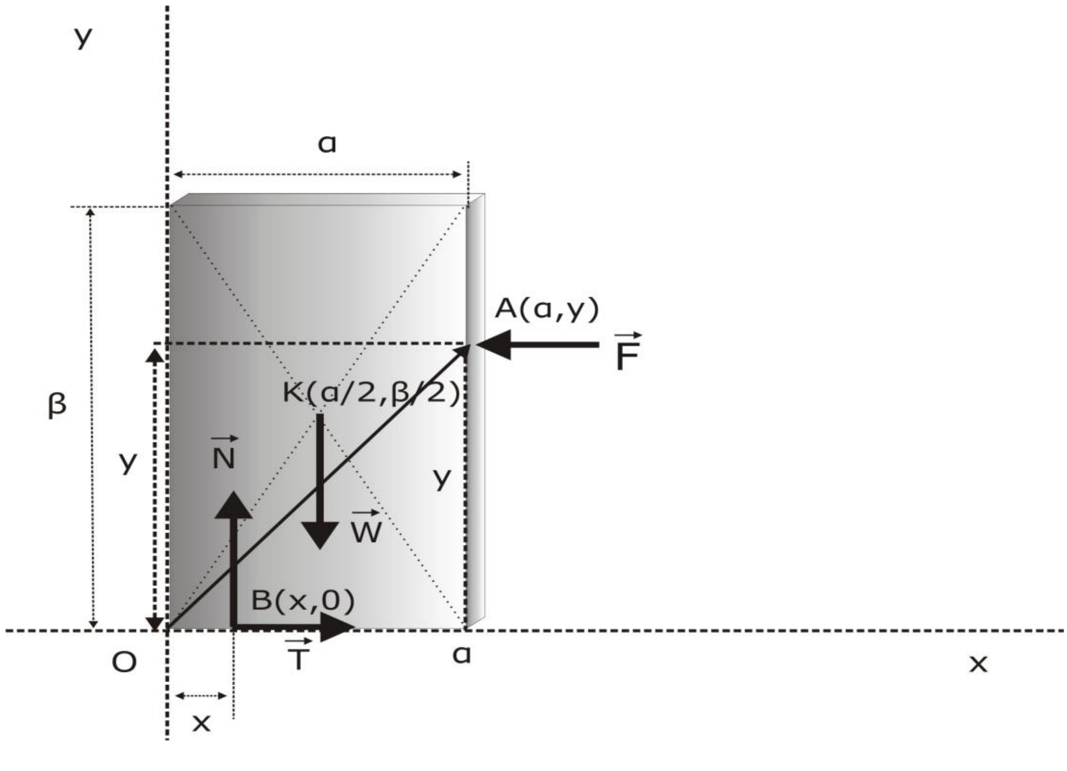
Σχόλιο: Πρέπει να σημειωθούν εδώ μερικά χαρακτηριστικά που είναι κοινά σε κάθε εμπειρικό έλεγχο ενός θεωρητικού μοντέλου:
Α) Τα αντικείμενα του φυσικού κόσμου που απαρτίζουν την πειραματική διάταξη αντιστοιχίζονται με έννοιες και νοητικά αντικείμενα, που έχουν οριστεί στο πλαίσιο του μοντέλου και αντλούν το νόημά τους από αυτό.
Β) Η πειραματική διάταξη σχεδιάζεται στο πλαίσιο του μοντέλου που επιδιώκουμε να ελέγξουμε. Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία της πειραματικής διάταξης συμπεριφέρονται σύμφωνα με τα νοητικά αντικείμενα του μοντέλου.
Γ) Η ενδεχόμενη συμφωνία θεωρητικών προβλέψεων και πειραματικών δεδομένων δεν αποτελεί σε καμιά περίπτωση οριστική και γενική επιβεβαίωση του θεωρητικού πλαισίου. Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι το μοντέλο «επικυρώνεται». Που σημαίνει ότι κάτω από τις συνθήκες του συγκεκριμένου πειράματος, η πειραματική διάταξη και τα φυσικά αντικείμενα που χρησιμοποιήσαμε, μαζί με το συνολικό θεωρητικό πλαίσιο, δεν εμφανίζουν αντιφατικά αποτελέσματα.

Δ) Σε ενδεχόμενη ασυμφωνία θεωρητικών πορισμάτων και πειραματικών δεδομένων, η αιτία μπορεί να βρίσκεται σε οποιαδήποτε συνιστώσα του συνολικού εγχειρήματος[5]: Από τις συνθήκες κάτω από τις οποίες διεξήχθη η πειραματική διαδικασία, μέχρι το θεωρητικό μοντέλο και τη θεωρία στην οποία στηρίζεται (Εισαγωγή).

Εφαρμογή 4: Στατική ισορροπία δισδιάστατων άκαμπτων σωμάτων σε ομοιογενές πεδίο βαρύτητας

Οι δυνάμεις που ασκούνται στα δισδιάστατα σώματα, που μελετάμε είναι ομοεπίπεδες. Επομένως από την πρώτη συνθήκη ισορροπίας (εξίσωση 4 της παραγράφου 2.1Β) προκύπτουν δύο ανεξάρτητες αλγεβρικές εξισώσεις. Από τη δεύτερη συνθήκη ισορροπίας (εξίσωση 5 της 2.1Β) προκύπτει άλλη μια αλγεβρική εξίσωση, αφού οι ροπές ομοεπίπεδων δυνάμεων που βρίσκονται επί του επιπέδου (O,x,y) αδρανειακού συστήματος (O,x,y,z) είναι ομοαξονικά διανύσματα, παράλληλα με τον άξονα Oz, (Ένθετο 1 κεφαλαίου 1). Στα επόμενα δύο παραδείγματα εφαρμόζουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν από τις συνθήκες ισορροπίας δισδιάστατων άκαμπτων σωμάτων, ή τρισδιάστατων σωμάτων που ανάγονται στη δισδιάστατη περίπτωση, για να επιλύσουμε προβλήματα ισορροπίας. Τα σώματα βρίσκονται εντός ομοιογενούς, κατακόρυφου πεδίου βαρύτητας και οι θέσεις τους προσδιορίζονται ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

Παράδειγμα 4.1: Ομοιογενής, ορθογώνια σανίδα βάρους W, ισορροπεί με το επίπεδό της κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2ν. Το ύψος της είναι α και το πλάτος της β. Στο σημείο Α της σανίδας, σε ύψος y από το έδαφος, ασκείται οριζόντια δύναμη F. Ο συντελεστής στατικής τριβής της σανίδας ως προς το έδαφος είναι μ. α) Αν η σανίδα βρίσκεται σε στατική ισορροπία, να υπολογιστεί η θέση του σημείου εφαρμογής της κάθετης αντίδρασης N, που ασκεί το οριζόντιο επίπεδο στη σανίδα. β) Αν το μέτρο της δύναμης F είναι ίσο



Σχήμα 2.2ν: Ισορροπία ορθογώνιας σανίδας, επί του εδάφους, με το επίπεδό της κατακόρυφο.

με τη μέγιστη στατική τριβή που μπορεί να ασκήσει το έδαφος στη σανίδα, πιο είναι η μέγιστη τιμή του y, ώστε η σανίδα να μην ανατρέπεται;

Λύση

α) Η σανίδα βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας. Επομένως ισχύουν οι συνθήκες ισορροπίας 4 και 5 της παραγράφου 2.1Β. Επιλέγουμε ως σύστημα αναφοράς το (O,x,y,z) (σχήμα 2.2ν). Τα διανύσματα των ροπών των δυνάμεων βρίσκονται πάνω στον άξονα Oz, που είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος. Η κατεύθυνση του άξονα Oz μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα. Επιλέγουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{z}$ του Oz, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

Από τις συνθήκες ισορροπίας, έχουμε:

$$\vec{F} + \vec{W} + \vec{T} + \vec{N} = 0$$

$$\overrightarrow{OA} \times \vec{F} + \overrightarrow{OK} \times \vec{W} + \overrightarrow{OB} \times \vec{T} + \overrightarrow{OB} \times \vec{N} = 0$$

από τις οποίες, αναλύοντας όλα τα διανύσματα ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), προκύπτουν οι αλγεβρικές εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} N - W &= 0 \\ T - F &= 0 \\ F \cdot y - W \cdot \frac{\beta}{2} + N \cdot x &= 0 \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων 1 και βρίσκουμε:

$$x = \frac{\beta}{2} - \frac{F}{W} \cdot y \qquad (2)$$

β) Για $F = T = \mu \cdot N = \mu \cdot W$, η συνθήκη μη ανατροπής της σανίδας είναι το σημείο εφαρμογής της κάθετης αντίδρασης N και της τριβής T, να βρίσκεται στο διάστημα (0,α). Για τη διάταξη του σχήματος 2.2ν, αρκεί να ισχύει: $x \geq 0$. Ώστε:

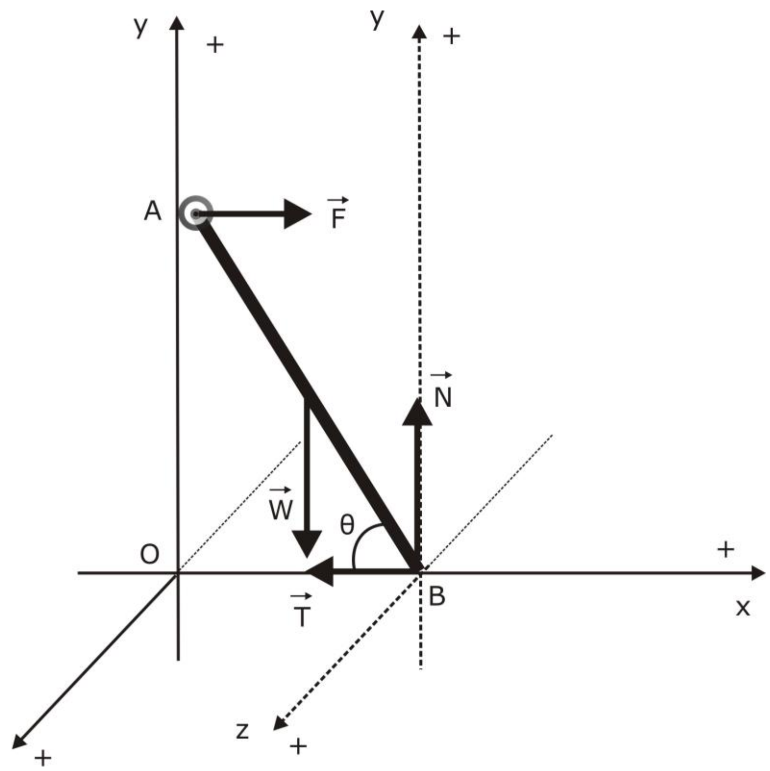
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\beta}{2} - \mu \cdot y \geq 0 \\ y &\leq \frac{\beta}{2\mu} \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

■

Παράδειγμα 4.2: Ομοιογενής δοκός ΑΒ βάρους W, φέρει στο άκρο της Α στερεωμένη ελαφριά (σε σχέση με το βάρος της δοκού) τροχαλία. Η δοκός τοποθετείται σε κατακόρυφο επίπεδο, με το άκρο της Α να εφάπτεται, μέσω της τροχαλίας, σε κατακόρυφο τοίχο, ενώ το άκρο Β εφάπτεται στο οριζόντιο επίπεδο (σχήμα 2.2ξ). Ο συντελεστής στατικής τριβής, μεταξύ δοκού και οριζόντιου επιπέδου είναι μ, ενώ η τριβή που αναπτύσσεται στην τροχαλία είναι αμελητέα. Να υπολογιστεί η περιοχή τιμών της γωνίας θ, που πρέπει να σχηματίζει η δοκός με το οριζόντιο επίπεδο, ώστε να εξασφαλίζεται η στατική ισορροπία της δοκού.

Λύση

Η δοκός βρίσκεται σε στατική ισορροπία ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z) ή/και ως προς το (B,x,y,z) (σχήμα 2.2ξ). Ως προς το σύστημα (B,x,y,z), οι συνθήκες ισορροπίας λαμβάνουν τη μορφή:



Σχήμα 2.2ξ: Η δοκός AB βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο (O,x,y) και σχηματίζει γωνία (π-θ)rads με τον άξονα Ox. Τα συστήματα αξόνων (O,x,y,z) και (B,x,y,z) είναι αδρανειακά. Η δοκός AB ισορροπεί ως προς καθένα από αυτά.

$$F - T = 0 \tag{4α}$$
$$N - W = 0 \tag{4β}$$
$$\tau_{(B)} = W \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\theta - F \cdot L \cdot \sin\theta = 0 \tag{4γ}$$

όπου L το μήκος της δοκού.
Εξάλλου, αν μ είναι ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ των επιφανειών επαφής δοκού και οριζόντιου επιπέδου, ισχύει:

$$T \leq \mu \cdot N \tag{5}$$

Από τις σχέσεις 4-5 και δεδομένου ότι 0<θ<π/2, λαμβάνουμε:

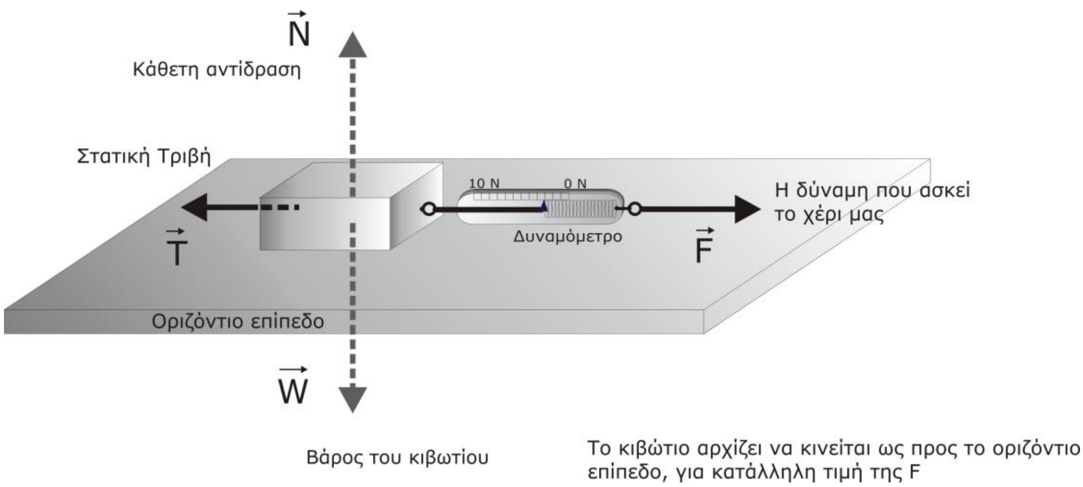
$$\tan\theta \geq \frac{1}{2\mu}$$

ή:

$$\theta \geq \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\mu}\right) \tag{6}$$

■

Πειραματικός έλεγχος Με βάση το σχήμα 2.2ξ μπορούμε να συνθέσουμε μια πειραματική διάταξη, με σκοπό τον πειραματικό υπολογισμό του συντελεστή στατικής τριβής μ μεταξύ της δοκού και της οριζόντιας επιφάνειας. Από τη μέτρηση της οριακής τιμής της γωνίας θ, για την οποία η δοκός παύει να ισορροπεί, υπολογίζουμε το μ εφαρμόζοντας τη σχέση 6.



Σχήμα 2.2ο: Το ορθογώνιο σώμα (κιβώτιο) ισορροπεί πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Η οριζόντια δύναμη F έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή, που εξασφαλίζει στατική ισορροπία στο σώμα. Η δύναμη F μετρείται με τη βοήθεια δυναμόμετρου και από τη σχέση $F = \mu \cdot N$, υπολογίζουμε πειραματικά την τιμή του μ. Το κιβώτιο και η οριζόντια επιφάνεια αποτελούνται από τα ίδια υλικά με εκείνα της δοκού και του οριζόντιου επιπέδου του παραδείγματος 4.2.

Ωστόσο, η τιμή του μ μπορεί να υπολογιστεί και με διαφορετική πειραματική διάταξη. Για παράδειγμα, με τη μέτρηση της μέγιστης οριζόντιας δύναμης που μπορεί να ασκηθεί σε σώμα από το ίδιο με τη σανίδα υλικό, χωρίς να προκληθεί κίνησή του κατά μήκος του ίδιου οριζόντιου επιπέδου (σχήμα 2.2ο). Από τη σύγκριση των δύο τιμών ελέγχουμε την ισχύ του νόμου της στατικής τριβής:

$$T = \mu \cdot N$$

όπου Τ η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής και Ν το μέτρο της κάθετης αντίδρασης, που ασκεί επιφάνεια σε σώμα εφαπτόμενο σε αυτή.
Ο έλεγχος της σχέσεις 6 μπορεί να πραγματοποιηθεί και στο εικονικό περιβάλλον του εκπαιδευτικού λογισμικού Interactive Physics.

Παράδειγμα 4.3: Δύο ομοιογενείς δοκοί ΑΒ και ΒΓ, ίσου βάρους W, συνδέονται στο κοινό άκρο τους Β μέσω λείας άρθρωσης, γύρω από την οποία μπορούν να περιστρέφονται. Το άκρο Α της πρώτης δοκού συνδέεται σε σταθερή οριζόντια, λεία άρθρωση, γύρω από την οποία μπορεί να περιστρέφεται. Στο άκρο Γ της δεύτερης δοκού, είναι δεμένο νήμα, του οποίου το άλλο άκρο στερεώνεται σε σταθερό σημείο Δ (σχήμα 2.2π). Το σύστημα ισορροπεί σε κατακόρυφο επίπεδο, με τη δοκό ΒΓ σε οριζόντια θέση και τη γωνία φ μεταξύ νήματος και δοκού ΒΓ δεδομένη. Να υπολογιστούν: (α) η γωνία θ που σχηματίζει η δοκός ΑΒ με την οριζόντια, (β) οι δυνάμεις που ασκεί κάθε άρθρωση στις δοκούς και (γ) η δύναμη που ασκεί το νήμα στη δοκό ΒΓ.

Λύση
Το μηχανικό μας σύστημα αποτελείται από δύο άκαμπτα σώματα: τις δοκούς ΑΒ και ΒΓ, που ισορροπούν. Θεωρούμε ότι οι δοκοί και το νήμα βρίσκονται στο επίπεδο (Ο,x,y) του αδρανειακού συστήματος αναφοράς (Ο,x,y,z) του εργαστηρίου.
Οι δοκοί αλληλεπιδρούν στο κοινό τους σημείο Β, μέσω λείας άρθρωσης. Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton: Αν $\vec{F}_B$ είναι η δύναμη που ασκεί η δοκός ΒΓ στην ΑΒ, τότε, η δύναμη που ασκεί η ΑΒ στη ΒΓ είναι η $-\vec{F}_B$. Στο

σχήμα 2.2π έχουν σχεδιαστεί οι συνιστώσες F_{Bx}, F_{By} της $\vec{F}_B$, ως προς το ορθογώνιο σύστημα αξόνων (O,x,y), ενώ οι αντίστοιχες συνιστώσες της $-\vec{F}_B$, έχουν σχεδιαστεί με διακεκομμένες γραμμές.

Καθεμιά από τις δοκούς βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας. Επομένως, εκφράζουμε τις συνθήκες ισορροπίας για κάθε δοκό χωριστά (σχήμα 2.2π). Προς τούτο επιλέγουμε συστήματα αξόνων στερεωμένα στις δοκούς.

Συνθήκες ισορροπίας δοκού AB, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A,x,y,z)
Ισορροπία δυνάμεων:

$$\begin{aligned} F_{Ay} - F_{By} - W &= 0 \\ -F_{Ax} + F_{Bx} &= 0 \end{aligned} \qquad (7\alpha,\beta)$$

Ισορροπία ροπών:

$$-F_{By}\cdot(AB)\cdot\cos\theta - W\cdot\frac{(AB)}{2}\cdot\cos\theta + F_{Bx}\cdot(AB)\cdot\sin\theta = 0$$

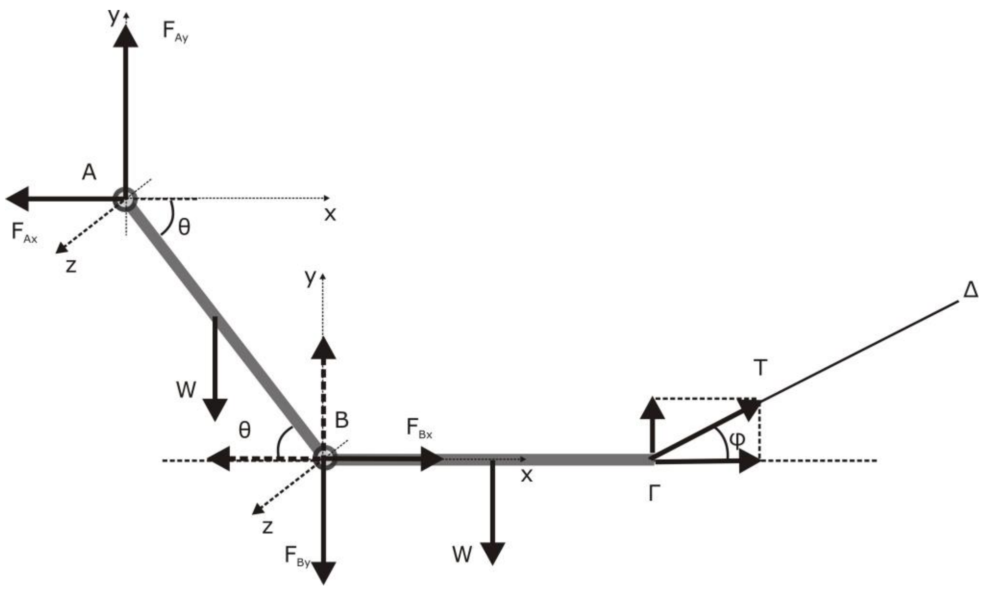
ή:

$$F_{Bx}\cdot\tan\theta = F_{By} + \frac{W}{2} \qquad (7\gamma)$$

Συνθήκες ισορροπίας δοκού ΒΓ ως προς το αδρανειακό σύστημα (B,x,y,z)
Ισορροπία δυνάμεων:

$$\begin{aligned} F_{By} + T\cdot\sin\varphi - W &= 0 \\ -F_{Bx} + T\cdot\cos\varphi &= 0 \end{aligned} \qquad (8\alpha,\beta)$$

όπου T παριστάνει η δύναμη που ασκεί το νήμα στη δοκό ΒΓ.
Ισορροπία ροπών:



Σχήμα 2.2π: Οι δοκοί ΑΒ και ΒΓ βρίσκονται σε στατική ισορροπία. Στο κοινό τους σημείο Β αλληλεπιδρούν με δυνάμεις επαφής, που ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton.

$$T \cdot (B\Gamma) \cdot \sin\varphi - W \cdot \frac{(B\Gamma)}{2} = 0$$

ή:

$$T \cdot \sin\varphi = \frac{W}{2} \qquad (8\gamma)$$

Από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων 7α,β,γ και 8α,β,γ, προκύπτει:

$$T = \frac{W}{2 \cdot \sin\varphi} \qquad (9\alpha)$$

$$F_{Bx} = \frac{W}{2} \cdot \cot\varphi\,,\; F_{By} = \frac{W}{2} \qquad (9\beta)$$

$$F_{Ax} = F_{Bx}\,,\; F_{Ay} = \frac{3 \cdot W}{2} \qquad (9\gamma)$$

$$\tan\theta = 2 \cdot \tan\varphi \qquad (9\delta)$$

■

Πειραματικός έλεγχος

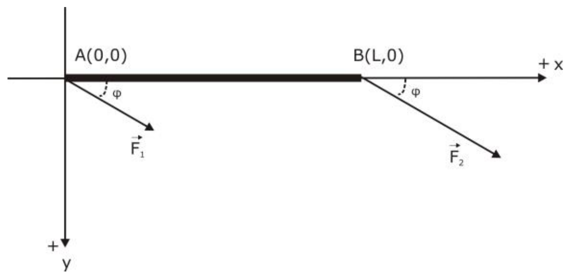
Η διάταξη που εικονίζεται στο σχήμα 2.2π μπορεί να πραγματοποιηθεί στο εργαστήριο, ή στο εικονικό περιβάλλον του Interactive Physics. Οι γωνίες θ και φ μπορούν να μετρηθούν με πραγματικά γωνιόμετρα ή με τα εικονικά όργανα μέτρησης του λογισμικού και να ελεγχθεί η σχέση τους στην κατάσταση ισορροπίας του συστήματος, που εκφράζεται με την εξίσωση 9δ. Αξίζει να σημειωθεί ότι το μοντέλο του άκαμπτου σώματος, εφαρμοζόμενο σε ένα σχετικά απλό σύστημα δύο δοκών που ισορροπούν, οδηγεί σε μια αρκετά περίπλοκη σχέση γωνιών, που μπορεί εύκολα να επικυρωθεί (ή να διαψευστεί) πειραματικά. [Βλέπε και άσκηση 5]

Ασκήσεις Κεφαλαίου 2

[Σημείωση: Όπου δεν αναφέρεται ρητά, οι θέσεις των σωμάτων και των άλλων αντικειμένων προσδιορίζονται ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.]

1) Δείξτε ότι αν το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν σε δισδιάστατο σώμα Σ ισούται με το μηδέν ως προς οποιοδήποτε σύστημα αξόνων στερεωμένο στο Σ, τότε η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών ισούται με το μηδέν και το σώμα ισορροπεί.

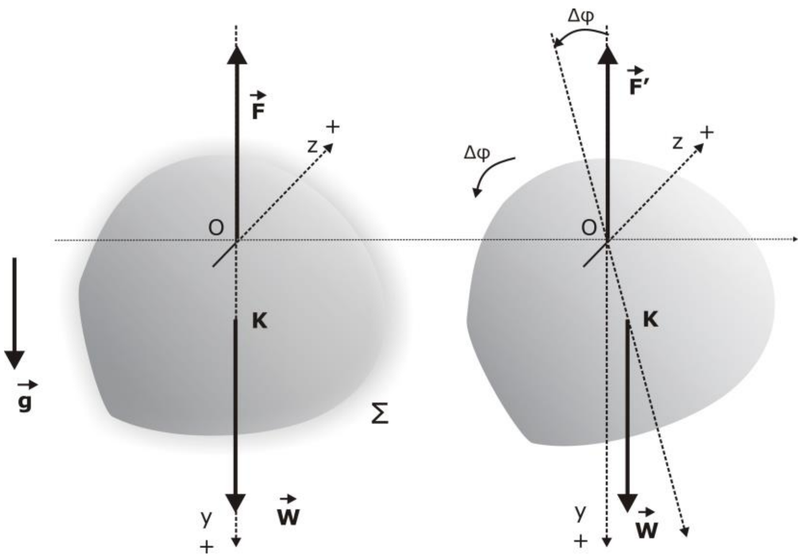
2) Στα άκρα A και B άκαμπτης ράβδου μήκους L ενεργούν οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$, αντίστοιχα (σχήμα A1). Οι $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι παράλληλες μεταξύ τους και σχηματίζουν με τη ράβδο γωνία φ. Δείξτε ότι το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης $\vec{F}$ των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι ανεξάρτητο της γωνίας φ και βρίσκεται πάνω στην ράβδο, στο σημείο με συντεταγμένες $X = 0,\ Y = L \cdot \dfrac{F_2}{F_1 + F_2}$ ως προς το σύστημα αξόνων (A,x,y) που εικονίζεται στο σχήμα της άσκησης. [Εφαρμόστε τις σχέσεις 18α και β της Εφαρμογής 1]



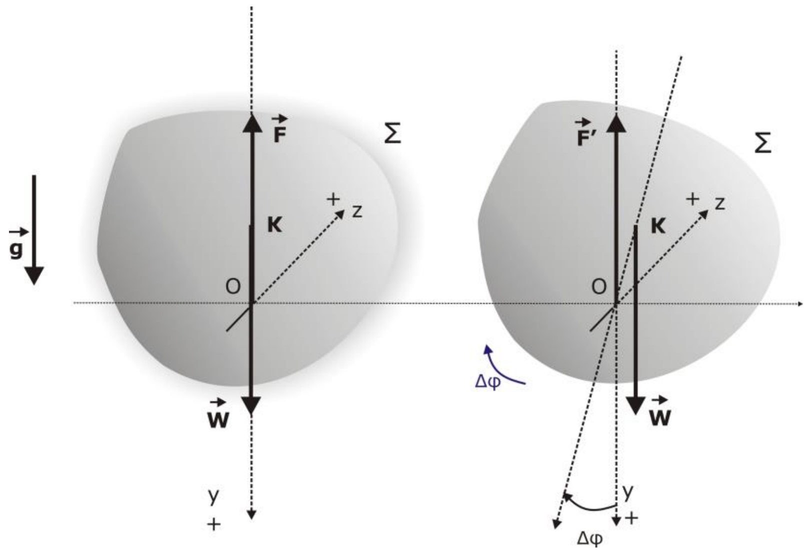
Σχήμα άσκησης 2: Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ενεργούν στα άκρα της ράβδου AB, είναι παράλληλες μεταξύ τους και σχηματίζουν με τη ράβδο γωνία φ. Ονομάζουμε Σ το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης τους ως προς το στερεωμένο στη ράβδο σύστημα αξόνων (A,x,y)

3) Αποδείξτε τη σχέση 14δ της Πρότασης 2.2.2. Αποδείξτε τις σχέσεις 18α και β και βρείτε τη λύση του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος.

4) Ευσταθής και ασταθής ισορροπία: Δισδιάστατο σώμα Σ βρίσκεται σε κατακόρυφο ομοιογενές πεδίο βαρύτητας $\vec{g}$. Το Σ μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα Oz, (ως προς το αδρανειακό σύστημα του εργαστηρίου, σχήματα 1 και 2 της άσκησης 4). Δείξτε ότι αν ο άξονας Oz δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας (K) του Σ, τότε το σώμα μπορεί να ισορροπεί μόνο σε δύο θέσεις I1 και I2, στις οποίες το K βρίσκεται πάνω στην κατακόρυφο που διέρχεται από τον άξονα περιστροφής O. Στη θέση I1 το διάνυσμα $\overrightarrow{OK}$ είναι ομόρροπο του $\vec{g}$, ενώ στη I2 τα $\overrightarrow{OK}$ και $\vec{g}$ είναι αντίρροπα. Δείξτε ότι αν το Σ εκτραπεί κατά μικρή γωνία Δφ από την κατάσταση ισορροπίας I1, τότε τείνει να επανέλθει προς αυτή. Αν όμως εκτραπεί από τη I2, τείνει να απομακρυνθεί από αυτή. Η κατάσταση ισορροπίας I1 ονομάζεται **ευσταθής**, ενώ η I2 **ασταθής**.

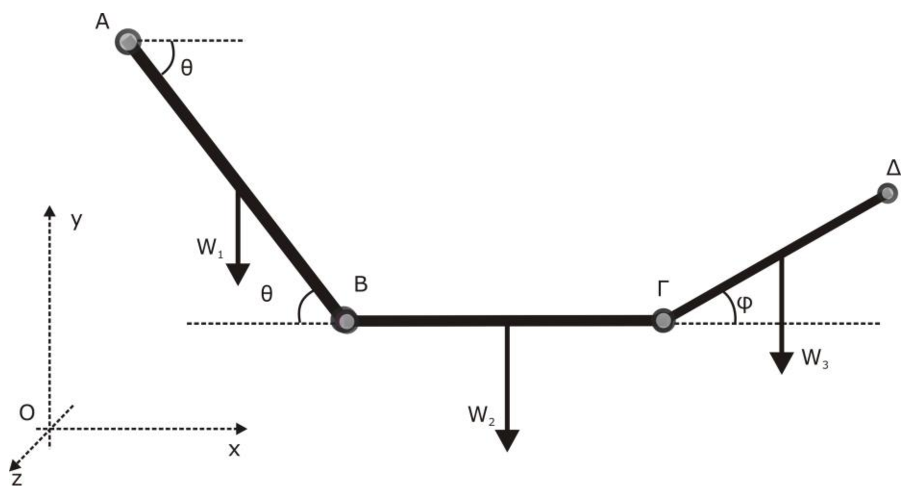


Σχήμα 1 Άσκησης 4: Ευσταθής ισορροπία δισδιάστατου άκαμπτου σώματος, εντός ομοιογενούς πεδίου βαρύτητας, στρεπτού γύρω από οριζόντιο άξονα (κατάσταση Ι1).



Σχήμα 2 Άσκησης 4: Ασταθής ισορροπία δισδιάστατου άκαμπτου σώματος, εντός ομοιογενούς πεδίου βαρύτητας, στρεπτού γύρω από οριζόντιο άξονα (κατάσταση Ι2).

5) Στο σχήμα της άσκησης εικονίζεται σύστημα τριών δοκών ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ, που ισορροπούν σε κατακόρυφο επίπεδο. Οι δοκοί είναι ομοιογενείς και τα βάρη τους είναι W_1, W_2 και W_3, αντίστοιχα. Στα κοινά σημεία των δοκών υπάρχουν οριζόντιες, κινητές και λείες αρθρώσεις, μέσω των οποίων οι δοκοί αλληλεπιδρούν και μπορούν να περιστρέφονται ελεύθερα. Τα ελεύθερα άκρα Α και Δ των δοκών ΑΒ και ΓΔ, στερεώνονται σε οριζόντιες σταθερές αρθρώσεις, γύρω από τις οποίες μπορούν να περιστρέφονται ελεύθερα. Οι θέσεις των αρθρώσεων Α και Δ είναι τέτοια ώστε το σύστημα να ισορροπεί με τη δοκό ΒΓ οριζόντια και τη γωνία φ που σχηματίζει η



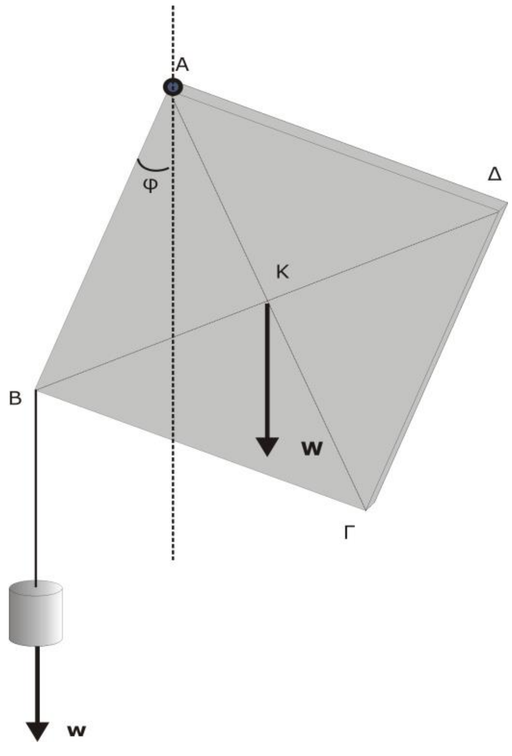
Σχήμα Άσκησης 5: Ισορροπία τριών δοκών που αλληλεπιδρούν μέσω λείων αρθρώσεων.

δοκός ΓΔ με τον οριζόντιο άξονα Ox, δεδομένη (για παράδειγμα, φ=π/4, σε ακτίνια).
α) Να υπολογιστούν οι δυνάμεις που ασκούν οι αρθρώσεις στις δοκούς.
β) Αν θ είναι η οξεία γωνία που σχηματίζει η δοκός AB με την οριζόντια, να δειχθεί η σχέση:

$$\tan\theta = \tan\varphi \cdot \frac{W_1 + W_2}{W_2 + W_3}$$

γ) Ελέγξτε την παραπάνω συνθήκη ισορροπίας στο περιβάλλον του εκπαιδευτικού λογισμικού Interactive Physics.

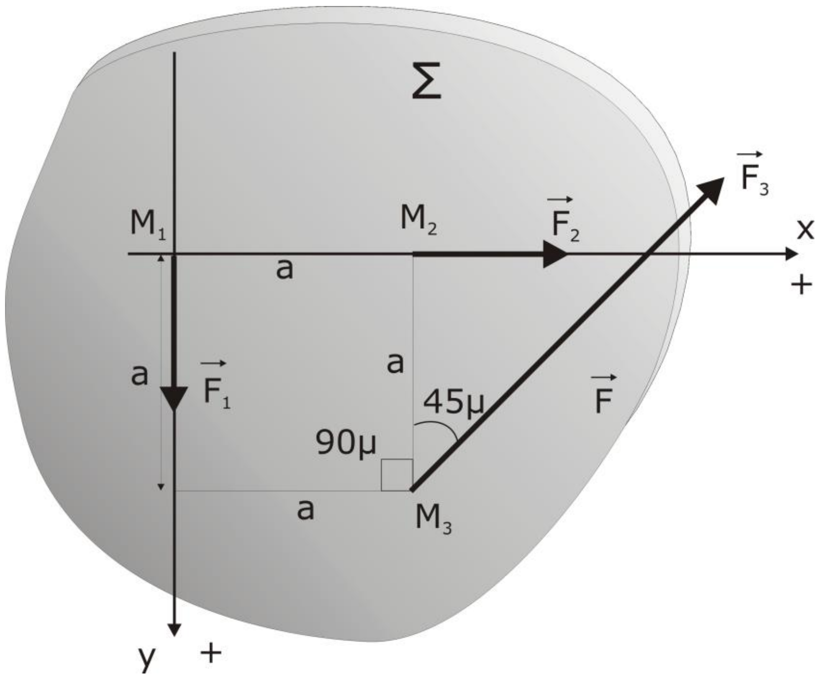
6) Ομοιογενές άκαμπτο σώμα Σ, βάρους W και σχήματος τετραγώνου πλευράς α, μπορεί να περιστρέφεται γύρω από λείο οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο του Σ, που διέρχεται από την κορυφή του Α. Το Σ βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας. Στην κορυφή Β κρεμάμε, μέσω νήματος, σώμα σ βάρους w και αφήνουμε το σύστημα να ισορροπήσει. Στη νέα κατάσταση ισορροπίας, να βρεθεί η γωνία φ που σχηματίζει η πλευρά ΑΒ του Σ με την κατακόρυφη που διέρχεται από το Α (σχήμα άσκησης). Αν χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη ως ζυγό, για να μετράμε το βάρος w του σώματος που αναρτούμε, δείξτε ότι το ελάχιστο σχετικό σφάλμα της μέτρησης |Δw/w| επιτυγχάνεται όταν το w βρίσκεται σε μια περιοχή του 0,707W. Ο ζυγός μας είναι αξιόπιστος για τη μέτρηση σωμάτων βάρους πολύ μεγαλύτερου ή πολύ μικρότερου του W; [Υπόδειξη: α) Δείξτε ότι ένα σφάλμα Δφ στη μέτρηση της γωνίας φ, προκαλεί σφάλμα Δw, στη μέτρηση του w: $\Delta w = -\frac{W}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2\varphi} \cdot \Delta\varphi$. β) Υπολογίστε το σχετικό σφάλμα |Δw/w| και δείξτε ότι στην περιοχή γωνιών 0<φ<π/4, λαμβάνει ελάχιστη τιμή για φ=π/8]



Σχήμα Άσκησης 6.

7) Ομοιογενής άκαμπτος φλοιός Σ, βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στο Σ ενεργούν τρεις δυνάμεις, όπως φαίνεται στο σχήμα της άσκησης.

   a. Να υπολογιστεί το μέτρο και η κατεύθυνση δύναμης $\vec{F}$ που πρέπει να εφαρμοστεί στο φλοιό Σ, ώστε να βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας.
   b. Σε ποια ευθεία του επιπέδου πρέπει να βρίσκεται το σημείο εφαρμογής M της $\vec{F}$;
   c. Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του M, ώστε η επιφάνεια Σ να εξακολουθήσει να βρίσκεται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας, αν όλες οι δυνάμεις που εφαρμόζουμε σε αυτή στραφούν κατά την ίδια γωνία φ.



Σχήμα Άσκησης 7: Τα μέτρα των εικονιζόμενων δυνάμεων είναι: F_1=1N, F_2=1N, $F_3=2\sqrt{2}\mathrm{N} \cong 2{,}83\mathrm{N}$. Τα σημεία εφαρμογής M_1, M_2, M_3, των αντίστοιχων δυνάμεων βρίσκονται στις κορυφές τετραγώνου πλευράς a=2m.

8) Έστω δισδιάστατο άκαμπτο σώμα Σ κινούμενο στο επίπεδο (O,x,y) αδρανειακού συστήματος (O,x,y,z). Στα σημεία M_1, M_2… M_f του Σ δρουν εξωτερικές δυνάμεις, με φορείς πάνω στο επίπεδο (O,x,y), των οποίων το μέτρο και η κατεύθυνση μεταβάλλονται με το χρόνο και η συνισταμένη τους είναι διαφορετική από το μηδέν για κάθε χρονική στιγμή.

   a. Δείξτε ότι κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να βρεθεί σημείο O_t τέτοιο ώστε ως προς το στιγμιαία αδρανειακό σύστημα (O_t,x,y,z) η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με το μηδέν.
   b. Δεδομένου ότι το O_t δεν είναι σταθερό σημείο του Σ, η ροπή αδράνειας I_{Ot} του Σ ως προς τον άξονα $O_t z$ μεταβάλλεται με το χρόνο. Γράψτε την εξίσωση μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του Σ ως προς το στιγμιαία αδρανειακό σύστημα (O_t,x,y,z) συναρτήσει της I_{Ot} και του ρυθμού μεταβολής της. [Ξεκινήστε από την εξίσωση $\frac{d\vec{J}_{(O_t)}}{dt} = \vec{\tau}_{(O_t)}$]