ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΑΚΑΜΠΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Βασικές έννοιες: Κινητική κατάσταση συστήματος - Έργο δυνάμεων - Έργο ροπής - Κινητική, Δυναμική, Μηχανική Ενέργεια άκαμπτου σώματος - Διατηρήσιμα Μεγέθη - Συντηρητικές Δυνάμεις - Ορμή άκαμπτου σώματος - Ώθηση δύναμης

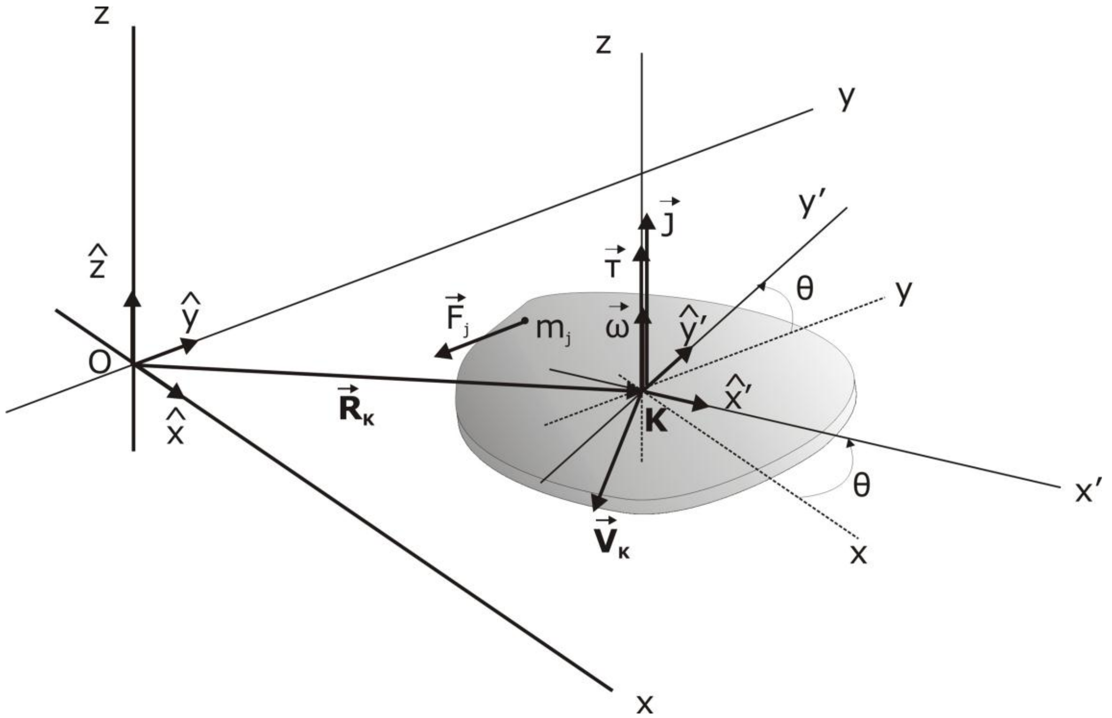
Κάθε πληροφορία που αφορά στην περιγραφή και στα χαρακτηριστικά της κίνησης του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, κρύβεται στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων 45 και 46 (κεφάλαιο 1, παράγραφος 1.3Β). Οι εξισώσεις αυτές προέκυψαν από την εφαρμογή των νόμων του Newton, στο πλαίσιο του μοντέλου του άκαμπτου σώματος (κεφάλαιο 1, παράγραφος 1.1Β). Από την επίλυσή τους μπορούμε να βρούμε την τροχιά του κέντρου μάζας του Σ και τη μεταβολή της γωνιακής ταχύτητάς του ω σε συνάρτηση με το χρόνο, εφόσον βέβαια μας είναι γνωστές οι εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν στο Σ και η αρχική του κατάσταση. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις εφαρμογών είναι πιθανόν να μη μας ενδιαφέρουν τόσο οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς των σημείων του Σ, όσο **τα φυσικά μεγέθη που διατηρούνται αμετάβλητα κατά την κίνηση του μηχανικού συστήματος**. *Πώς θα προσδιορίσουμε ποιά φυσικά μεγέθη διατηρούνται αναλλοίωτα κατά την κίνηση του άκαμπτου σώματος Σ, ή όπως αλλιώς λέγονται, τα «ολοκληρώματα της κίνησης» του Σ;*
Είναι φανερό ότι τα μεγέθη αυτά θα αναδυθούν από τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση των σωματιδίων του Σ. Επομένως πρέπει να ξεκινήσουμε από αυτές. Μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών και ορισμένων παραδοχών, από τις εξισώσεις κίνησης καταλήγουμε στη διατύπωση τριών θεωρημάτων διατήρησης: της μηχανικής ενέργειας, της ορμής και της στροφορμής άκαμπτου σώματος ή συστήματος δισδιάστατων άκαμπτων σωμάτων που κινούνται στο ίδιο επίπεδο.

Στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου 3 διατυπώνουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του άκαμπτου σώματος ως απόρροια των εξισώσεων κίνησης. Στη συνέχεια, διατυπώνουμε το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και διερευνούμε κάτω από ποιες συνθήκες ισχύει. Στην επόμενη ενότητα 3.2, διερευνούμε τη διατήρηση της ορμής συστήματος αλληλεπιδρώντων άκαμπτων σωμάτων και στην 3.3, τη διατήρηση της στροφορμής τους.

3.1 Το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας άκαμπτου σώματος - Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας άκαμπτου σώματος[6,8,9,12,13]

Θεωρούμε ένα δισδιάστατο άκαμπτο σώμα Σ, πάνω στο επίπεδο Οxy αδρανειακού συστήματος (O,x,y,z), όπως εικονίζεται στο σχήμα 3.1α.
Κάθε πρόταση που αφορά στην κίνηση του σώματος Σ, προκύπτει με παραγωγικούς συλλογισμούς από τις εξισώσεις του Newton, που περιγράφουν την κίνηση του Σ. Επομένως, για να διερευνήσουμε τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ορισμένα μεγέθη διατηρούνται αναλλοίωτα κατά την κίνηση του Σ, δεν έχουμε παρά να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις του Newton για το δισδιάστατο άκαμπτο σώμα και να τις μετασχηματίσουμε κατάλληλα. Οι κινήσεις των σωματιδίων του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z), περιγράφονται από τις εξισώσεις (εξισώσεις 1 της ενότητας 1.3):

$$m_j \cdot \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{f}_{jk} + \vec{F}_j \qquad (1)$$



Σχήμα 3.1α: Το άκαμπτο σώμα Σ κινείται πάνω στο επίπεδο Oxy του αδρανειακού συστήματος (O,x,y,z). Πάνω στο τυχαίο j-σωματίδιο j=1,2…N του Σ, ενεργεί η εξωτερική δύναμη $\vec{F}_j$. Οι δυνάμεις $\vec{F}_j$ βρίσκονται πάνω στο επίπεδο Oxy. Η στροφορμή του Σ και η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το κέντρο μάζας του K, καθώς και η γωνιακή ταχύτητα του Σ, είναι διανύσματα παράλληλα με τον άξονα Oz. Έχουν διευθύνσεις κάθετες στο επίπεδο Oxy.

όπου ο δείκτης j=1,2…N απαριθμεί τα σωματίδια του Σ. Το m_j συμβολίζει τη μάζα του j-σωματιδίου και $\vec{v}_j$ την ταχύτητά του ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z). $\vec{f}_{jk}$ συμβολίζει τη δύναμη που δέχεται το j-σωματίδιο από το k-σωματίδιο του Σ και $\vec{F}_j$ τη συνολική (συνισταμένη) εξωτερική δύναμη που ασκείται στο j-σωματίδιο από το περιβάλλον του σώματος Σ. Οι δυνάμεις $\vec{f}_{jk}$ είναι **εσωτερικές** ως προς το άκαμπτο σώμα Σ και ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton (παράγραφος 1.1Γ):

$$\vec{f}_{jk} = -\vec{f}_{kj} \quad \vec{f}_{kk} = 0$$

Η κίνηση του Σ προσδιορίζεται από το περίπλοκο σύστημα των εξισώσεων 1. Ωστόσο, όπως δείξαμε στην ενότητα 1.3, αξιοποιώντας τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά του μοντέλου του άκαμπτου σώματος, οι εξισώσεις αυτές μπορούν να μετασχηματιστούν σε ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων που αρκούν για να περιγράψουν σε κάθε περίπτωση την κίνηση του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ (εξισώσεις 45 και 46, ενότητα 1.3).
Η πρώτη, προσδιορίζει την κίνηση του κέντρου μάζας K του Σ:

$$\frac{d\vec{V}_K}{dt} = \frac{1}{M}\cdot\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j \tag{2}$$

όπου $\vec{V}_K$ συμβολίζει την ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ του σώματος Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z) (σχήμα 3.1α). Η θέση $\overrightarrow{OK} \equiv \vec{R}_K$ του κέντρου μάζας ως προς το (O,x,y,z) ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{R}_K = \frac{1}{M} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j \right) \quad (2α)$$

Με το Μ συμβολίζουμε τη συνολική μάζα του Σ:

$$M = \sum_{j=1}^{N} m_j$$

Η ταχύτητα $\vec{V}_K$ και η θέση $\vec{R}_K$ του κέντρου μάζας, συνδέονται με τη σχέση:

$$\vec{V}_K = \frac{d\vec{R}_K}{dt} \quad (2β)$$

Το άθροισμα $\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j$ στο δεξί μέρος της 2 παριστάνει τη συνισταμένη των **εξωτερικών** δυνάμεων που ενεργούν στο Σ. $\vec{F}_j$, j=1,2…N συμβολίζει την ολική εξωτερική δύναμη που ενεργεί στο j-σωματίδιο του Σ (σχήμα 3.1α).

Δεδομένου ότι η κίνηση του Σ πραγματοποιείται στο επίπεδο Οxy του αδρανειακού συστήματος (O,x,y,z), η 2 αναλύεται σε δύο βαθμωτές εξισώσεις, ως προς τους άξονες Οx και Οy, αντίστοιχα. Η τρίτη εξίσωση που απαιτείται για την πλήρη περιγραφή της κίνησης του Σ, αφορά στην περιστροφή του ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z). Τη γράφουμε με τη διανυσματική της μορφή, αν και αναλύεται σε μια μόνο βαθμωτή εξίσωση, αφού και τα δύο μέρη της είναι διανύσματα κάθετα στο επίπεδο Οxy, παράλληλα με τον άξονα Οz:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = \vec{\tau}_{(O)} \quad (3)$$

Τα διανύσματα $\vec{J}_{(O)}$ και $\vec{\tau}_{(O)}$ παριστάνουν, αντίστοιχα, τη στροφορμή του Σ και τη συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z). Τα μεγέθη $\vec{J}_{(O)}$ και $\vec{\tau}_{(O)}$ ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\vec{J}_{(O)} \equiv \sum_{j=1}^{N} (m_j \cdot \vec{r}_j \times \vec{v}_j) \quad (3α)$$

$$\vec{\tau}_{(O)} \equiv \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_j \times \vec{F}_j) \quad (3β)$$

Στην παράγραφο 1.3Β (σχέση 29) έχουμε δείξει ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής $\vec{J}_{(O)}$ μπορεί να εκφραστεί με τη σχέση:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = \overrightarrow{OK} \times \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j + I_K \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (3γ)$$

όπου Κ το κέντρο μάζας του Σ, $\vec{\omega}$ η γωνιακή ταχύτητα του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z) (Ένθετο 1.3.2) και I_K η ροπή αδράνειας του Σ ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του, διερχόμενο από το κέντρο μάζας του Κ:

$$I_K = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j'^2 \qquad (3\delta)$$

Στην παράγραφο 1.3Β δείξαμε ότι από το συνδυασμό των σχέσεων 3-3γ και τις ιδιότητες του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος, προκύπτουν οι εξισώσεις 1.3.35-35α, που είναι μια μερική περίπτωση της γενικής εξίσωσης 3, αλλά ισχύουν πάντοτε για την επίπεδη κίνηση των δισδιάστατων άκαμπτων σωμάτων, που μελετάμε:

$$I_K \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_{(K)} \qquad (3\varepsilon)$$

όπου:

$$\vec{\tau}_{(K)} \equiv \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_j' \times \vec{F}_j) \qquad (3\zeta)$$

είναι η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο Σ, ως προς σύστημα αξόνων στερεωμένο στο Σ, που έχει αρχή το κέντρο μάζας του Κ (στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς με αρχή το Κ - Ένθετο 1.3.3).
Οι εξισώσεις 2 και 3ε, περιγράφουν πλήρως την κίνηση του δισδιάστατου σώματος Σ, στο επίπεδο Οxy του αδρανειακού συστήματος (O,x,y,z).

Ένθετο 3.1.1

Έργο δύναμης - Δυναμική ενέργεια

Έστω δύναμη $\vec{F}$ και Μ το σημείο εφαρμογής της. Αν το Μ μετατοπιστεί απειροστά κατά $d\vec{r}$, τότε ως απειροστό έργο της $\vec{F}$ ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο:

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (\alpha)$$

Παρατηρούμε ότι για ορισμένη θέση του Μ, το έργο δW της $\vec{F}$ είναι **γραμμική συνάρτηση** της στοιχειώδους μετατόπισης $d\vec{r}$. Λέμε ότι το στοιχειώδες έργο είναι μια **διαφορική μορφή**, ως προς το $d\vec{r}$.
[Πρέπει να σημειωθεί ότι από τον ορισμό (α), δεν προκύπτει κατ' ανάγκη ότι υπάρχει κάποια συνάρτηση W, της οποίας το διαφορικό είναι ίσο με διαφορική μορφή $\vec{F} \cdot d\vec{r}$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυτό συμβαίνει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Γι' αυτό, χρησιμοποιούμε το σύμβολο δW για το απειροστό έργο, αντί του dW που παραπέμπει σε διαφορικό συνάρτησης]

Αν το Μ μετατοπιστεί κατά μήκος μιας καμπύλης γ, από μια αρχική θέση Α σε μια άλλη Β, το έργο της δύναμης $\vec{F}$ κατά τη μετατόπιση αυτή, υπολογίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$W_{A\to B} = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (\beta)$$

Το έργο $W_{A\to B}$ της $\vec{F}$ εξαρτάται τόσο από τη συναρτησιακή έκφραση της $\vec{F}$, όσο και από τη διαδρομή (καμπύλη γ) που ακολουθεί το σημείο εφαρμογής Μ της $\vec{F}$. Το έργο $W_{A\to B}$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής γ του Μ τότε και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση της θέσης U, τέτοια ώστε η διαφορική μορφή $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ να ισούται με το διαφορικό της U σε κάθε θέση:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Η συνάρτηση U ορίζεται ως **δυναμική ενέργεια** που σχετίζεται με τη δύναμη $\vec{F}$. Οι δυνάμεις για τις οποίες μπορεί να οριστεί δυναμική ενέργεια, ονομάζονται συντηρητικές.

3.1Α Από το 2ο νόμο του Newton, στο θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του άκαμπτου σώματος

Ξεκινάμε με τις εξισώσεις 1, που περιγράφουν την κίνηση κάθε j-σωματιδίου j=1,2…N του άκαμπτου σώματος Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z) και τις μετασχηματίζουμε επιχειρώντας -όπως κάναμε και στην ενότητα 1.3- να εξαλείψουμε τις άγνωστες εσωτερικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης $\vec{f}_{jn}$, j,n=1,2…N. Σκεφτόμαστε ότι οι δυνάμεις $\vec{f}_{jn}$ είναι δυνάμεις «συνδέσμων», δηλαδή δυνάμεις που προσδιορίζουν τους περιορισμούς της κίνησης των σωματιδίων του άκαμπτου σώματος. Οι $\vec{f}_{jn}$ είναι ανάλογες, για παράδειγμα, με τις δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σωματίδιο εξαναγκασμένο να κινείται πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια. Το κοινό χαρακτηριστικό των δυνάμεων «συνδέσμων» είναι ότι το έργο τους σε μια «δυνατή μετατόπιση» του συστήματος (δηλαδή μετατόπιση που επιτρέπεται από τους συνδέσμους) είναι ίσο με το μηδέν[6,8]. Με αυτήν την ιδέα κατά νου, αποδεικνύουμε την ακόλουθη πρόταση:

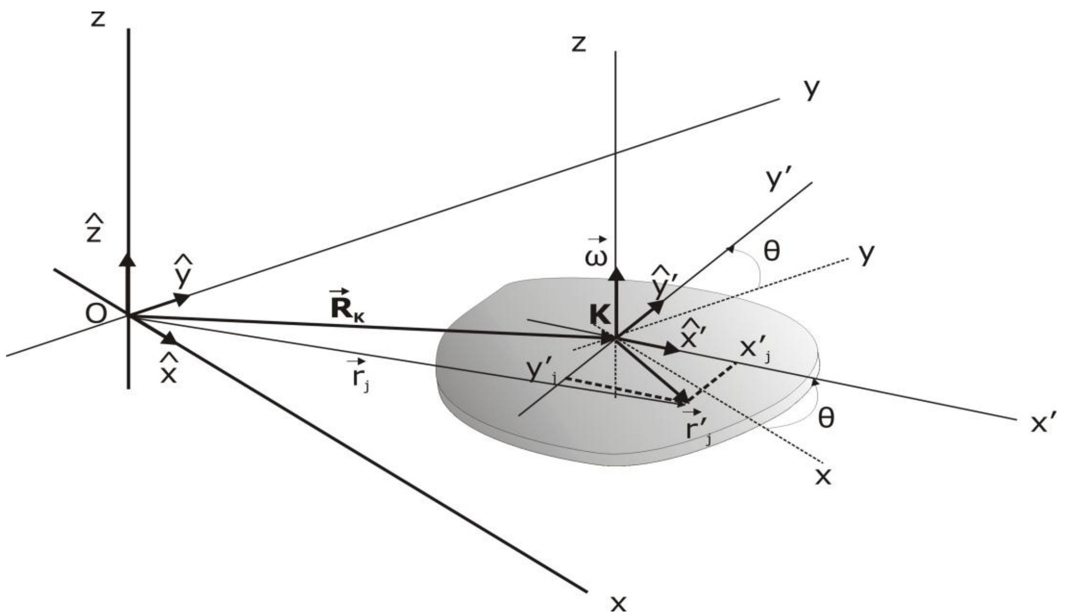
Πρόταση 3.1.1
Έστω ότι κατά την κίνηση του άκαμπτου σώματος Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), στο χρονικό διάστημα [t, t+dt] τα σωματίδια του Σ μετατοπίζονται κατά $d\vec{r}_j$, j=1,2…N. Τότε ισχύει η σχέση:

$$\sum_{n,j=1}^{N} \vec{f}_{jn} \cdot d\vec{r}_j = 0 \tag{4}$$

Απόδειξη
Στην παράγραφο 1.2Α έχουμε εκφράσει την ταχύτητα $\vec{v}_j$ του j-σωματιδίου του Σ ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z), σε συνάρτηση με τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του Σ. Σύμφωνα με την εξίσωση 1.2.19, ισχύει:

$$\vec{v}_j = \frac{d\vec{R}_K}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}_j' \tag{5α}$$

όπου $\vec{r}_j'$ συμβολίζει τη θέση του j-σωματιδίου ως προς σύστημα αξόνων (K,x′,y′,z′) στερεωμένο στο Σ και $\vec{R}_K$ το διάνυσμα θέσης της αρχής Κ του (K,x′,y′,z′) ως προς το



Σχήμα 3.1β: Το άκαμπτο σώμα Σ κινείται πάνω στο επίπεδο Oxy του αδρανειακού συστήματος (O,x,y,z). Το σύστημα αξόνων (K,x′,y′,z′) είναι στερεωμένο στο Σ. Η αρχή του Κ, είναι το κέντρο μάζας του Σ και ο άξονας Kz′ διατηρείται παράλληλος με τον Oz. Τη χρονική στιγμή t, η θέση του j-σωματιδίου του Σ, ως προς το (K,x′,y′,z′) προσδιορίζεται από το διάνυσμα $\vec{r}_j' = x_j' \cdot \hat{x}' + y_j' \cdot \hat{y}'$

$\hat{x}'$, $\hat{y}'$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων Kx′ και Ky′ αντίστοιχα.
Την ίδια χρονική στιγμή, οι άξονες Kx′, Ox και Ky′, Oy σχηματίζουν γωνία θ.

αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z) (σχήμα 3.1β).

Δεδομένου ότι η ταχύτητα $\vec{v}_j$ του j-σωματιδίου του Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), είναι $\vec{v}_j = \frac{d\vec{r}_j}{dt}$, από την 5α βρίσκουμε ότι στο χρονικό διάστημα [t, t+dt] το j-σωματίδιο μετατοπίζεται ως προς το (O,x,y,z) κατά $d\vec{r}_j$:

$$d\vec{r}_j = d\vec{R}_K + dt \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_j' \tag{5β}$$

όπου $d\vec{R}_K$ παριστάνει τη μετατόπιση του κέντρου μάζας K του Σ ως προς το (O,x,y,z), στο χρονικό διάστημα [t, t+dt] και $\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{z}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του Σ τη χρονική στιγμή t.

Για να διαχειριστούμε το αριστερό σκέλος της προς απόδειξη σχέσης 4, χρειάζεται να θυμηθούμε και μερικές ιδιότητες των δυνάμεων αλληλεπίδρασης. Στην πρόταση 1.1.1 του κεφαλαίου 1 έχουν αποδειχθεί οι σχέσεις:

$$\sum_{j,n=1}^{N} \vec{f}_{jn} = 0 \tag{6α}$$

$$\sum_{j,n=1}^{N} \vec{f}_{jn} \times \vec{r}_j = 0 \tag{6β}$$

Το αριστερό μέλος της αποδεικτέας σχέσης γράφεται:

$$\sum_{n,j=1}^{N} \vec{f}_{jn} \cdot d\vec{r}_j = \sum_{n,j=1}^{N} \vec{f}_{jn} \cdot \left(d\vec{R}_K + dt \cdot \vec{\omega} \times \vec{r}_j'\right) =$$

$$= \left(\sum_{n,j=1}^{N} \vec{f}_{jn}\right) \cdot d\vec{R}_K - dt \cdot \vec{\omega} \cdot \left(\sum_{n,j=1}^{N} \vec{f}_{jn} \times \vec{r}_j'\right) = 0$$

όπου έχουμε κάνει χρήση των ιδιοτήτων του εξωτερικού γινομένου (Ένθετο 1 του κεφαλαίου 1).

■

Με δεδομένη τη σχέση 4, μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις εξισώσεις 1 του Newton, ως εξής:

α) Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά τα δύο μέρη της 1 με τη μετατόπιση $d\vec{r}_j$ του j-σωματιδίου στο χρονικό διάστημα [t, t+dt] και αθροίζουμε ως προς το σύνολο των σωματιδίων του άκαμπτου σώματος Σ (δηλαδή ως προς το δείκτη j=1,2…N):

$$\sum_{j=1}^{N} \left(m_j \cdot \frac{d\vec{v}_j}{dt} \cdot d\vec{r}_j\right) = \sum_{k,j=1}^{N} \vec{f}_{jk} \cdot d\vec{r}_j + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_j \tag{7}$$

β) Σύμφωνα με την 4, ο πρώτος όρος του δεξιού σκέλους της 7 μηδενίζεται. Ο δεύτερος όρος είναι, εξ ορισμού, το άθροισμα των έργων των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο Σ, κατά την μετατόπισή του στο απειροστό διάστημα [t, t+dt]. Συμβολίζουμε:

$$\sum \delta W_{\varepsilon\xi} \equiv \sum_{j=1}^{N} \delta W_j = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_j \tag{8}$$

Η μετατόπιση του j-σωματιδίου του Σ, σε συνάρτηση με την ταχύτητά του, γράφεται:

$$d\vec{r}_j = \vec{v}_j \cdot dt$$

οπότε, η 7 λαμβάνει τη μορφή:

Ένθετο 3.1.2

Η έννοια της «κατάστασης» ενός συστήματος

Στο Ένθετο 2.1.1 ορίσαμε την έννοια της «κινητικής κατάστασης» ή απλά «κατάστασης» ενός άκαμπτου σώματος. Με την έννοια της «κατάστασης» ενός σώματος ή συστήματος, εννοούμε τη μέγιστη δυνατή πληροφορία που μπορούμε να έχουμε για το σύστημα αυτό, στο πλαίσιο του μοντέλου με το οποίο το περιγράφουμε (παράγραφος 1.1Β). Η κατάσταση ενός σώματος -συστήματος, γενικά, μεταβάλλεται με το χρόνο και ταυτόχρονα, προσδιορίζεται μονοσήμαντα κάθε χρονική στιγμή. Θα χρησιμοποιούμε γράμματα για να συμβολίζουμε τις διαφορετικές καταστάσεις ενός συστήματος και δείκτες για τις αντίστοιχες χρονικές στιγμές. Για παράδειγμα θα λέμε ότι τη χρονική στιγμή t_α το σώμα Σ βρίσκεται στην κατάσταση α, ενώ τη χρονική στιγμή t_β στην κατάσταση β.

$$\sum_{j=1}^{N}\left(m_j \cdot \vec{v}_j \cdot d\vec{v}_j\right) = \sum \delta W_{\varepsilon\xi} \tag{9}$$

ή, ισοδύναμα:

$$d\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\cdot m_j \cdot v_j^2\right)\right) = \sum \delta W_{\varepsilon\xi} \tag{10}$$

Ολοκληρώνουμε τη 10 από μια αρχική χρονική στιγμή t_α μέχρι μια -οποιαδήποτε- μεταγενέστερη t_τ και λαμβάνουμε τη σχέση:

$$T_\tau - T_\alpha = \sum W^{\varepsilon\xi}_{\alpha\to\tau} \equiv \sum \int_\alpha^\tau \delta W_{\varepsilon\xi} \tag{11}$$

όπου:

$$T \equiv \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\cdot m_j \cdot v_j^2\right) \tag{12}$$

Το φυσικό μέγεθος Τ ορίζεται ως η **κινητική ενέργεια** του σώματος Σ. Όπως φαίνεται από τον ορισμό της, η κινητική ενέργεια ισούται με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των σωματιδίων του Σ. Είναι μια συνάρτηση των ταχυτήτων των σωματιδίων του Σ -εξαρτάται από την «κινητική κατάσταση» του Σ (Ένθετο 3.1.2).

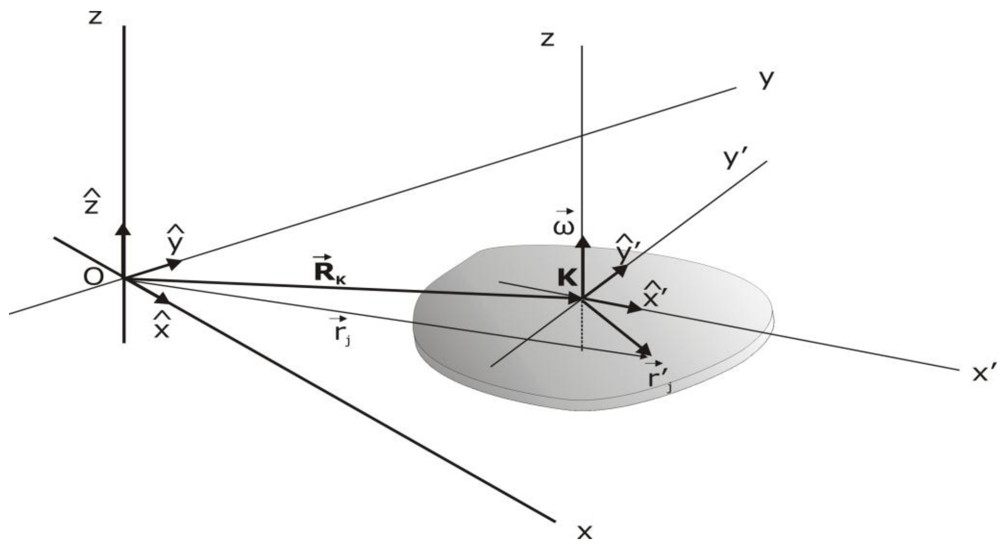
Το δεξί μέρος της 3.11 συμβολίζει το έργο όλων των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο Σ, κατά την κίνησή του από την κατάσταση α, στην οποία βρίσκεται τη χρονική στιγμή t_α, έως την κατάσταση τ, στην οποία βρίσκεται τη χρονική στιγμή t_τ. Επισημαίνεται ότι έργο των εξωτερικών δυνάμεων, στο δεξί μέρος της 11, εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολούθησε το σύστημα για να μεταβεί από την κατάσταση α στην τ. Είναι ανεξάρτητο της διαδρομής, όταν οι δυνάμεις είναι συντηρητικές (Ένθετο 3.1.1).

Η σχέση 11 είναι γνωστή ως το **θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας**. Δηλώνει ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός άκαμπτου σώματος από μια κατάσταση α σε μια μεταγενέστερη τ, ισούται με το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων, που ενεργούν στο Σ, κατά την κίνησή του από την κατάσταση α στην τ.

3.1Β Υπολογισμός της κινητικής ενέργειας του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος

Ο υπολογισμός της κινητικής ενέργειας του άκαμπτου σώματος Σ από τον ορισμό της (σχέση 12), φαίνεται δύσκολος διότι προϋποθέτει τη γνώση των ταχυτήτων όλων των σωματιδίων του Σ. Θα δείξουμε ότι η κινητική ενέργεια του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z), είναι μια συνάρτηση της ταχύτητας $\vec{V}_K$ του κέντρου μάζας του Σ και της γωνιακής ταχύτητάς του ω.

Θεωρούμε το στερεωμένο στο Σ σύστημα αξόνων (K,x′,y′,z′), όπου K το κέντρο μάζας του Σ, και μετασχηματίζουμε τη σχέση 12, μέσω της οποίας ορίζεται η κινητική ενέργεια του Σ (σχήμα 3.1γ).



Σχήμα 3.1γ: Το Σ κινείται με το επίπεδό του να ταυτίζεται με το επίπεδο (O,x,y) του αδρανειακού συστήματος (O,x,y,z). Το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας είναι κάθετο στο επίπεδο (O,x,y) (παράγραφος 1.3Α). Το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{\omega}$ με οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου (O,x,y) είναι ίσο με το μηδέν.

Η ταχύτητα $\vec{v}_j$ του j-σωματιδίου του Σ εκφράζεται συναρτήσει του $\vec{V}_K$ και της $\vec{\omega}$, μέσω της σχέση 5α. Αντικαθιστούμε τα $\vec{v}_j$ στη 12. Προκύπτουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\cdot m_j\cdot v_j^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N}\left(m_j\cdot\vec{v}_j\cdot\vec{v}_j\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N} m_j\cdot\left(\vec{V}_K+\vec{\omega}\times\vec{r}'_j\right)\cdot\left(\vec{V}_K+\vec{\omega}\times\vec{r}'_j\right) = \\ &= \frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2 + \vec{V}_K\cdot\left(\vec{\omega}\times\sum_{j=1}^{N} m_j\cdot\vec{r}'_j\right) + \frac{1}{2}\cdot\sum_{j=1}^{N} m_j\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'_j\right)\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'_j\right) \end{aligned}$$

όπου $M=\sum_{j=1}^{N} m_j$ είναι η μάζα του σώματος Σ.

Ο όρος $\sum_{j=1}^{N} m_j\cdot\vec{r}'_j$ προσδιορίζει τη θέση του κέντρου μάζας ως προς το σύστημα (K,x′,y′,z′), που έχει αρχή το κέντρο μάζας K του Σ, επομένως είναι ίσος με το μηδέν (Ένθετο 4, στο τέλος του κεφαλαίου 1, πρόταση 2). Για τον υπολογισμό του τελευταίου όρου, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου, που αναφέρονται στα Ένθετα 1 και 4, στο τέλος του του κεφαλαίου 1 και έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\vec{\omega}\times\vec{r}'_j\right)\cdot\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'_j\right) &= \vec{\omega}\cdot\left(\vec{r}'_j\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'_j\right)\right) = \\ &= \vec{\omega}\cdot\left(r'^2_j\cdot\vec{\omega}-\left(\vec{r}'_j\cdot\vec{\omega}\right)\cdot\vec{r}'_j\right) \end{aligned} \qquad (13)$$

Στην περίπτωση της επίπεδης κίνησης του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος που μελετάμε, η γωνιακή ταχύτητα του σώματος είναι κάθετη στο επίπεδό του (σχήμα 3.1γ). Επομένως το εσωτερικό γινόμενο $\vec{r}'_j\cdot\vec{\omega}$, στη 13, μηδενίζεται και η κινητική ενέργεια λαμβάνει τη μορφή:

$$T = \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_K^2 + \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j'^2 \qquad (14)$$

Η ποσότητα $\sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j'^2$, που εμφανίζεται στο δεύτερο μέρος της 14, είναι η ροπή αδράνειας του Σ ως προς τον άξονα Kz', που διέρχεται από το κέντρο μάζας του Κ και είναι κάθετος στο επίπεδο του Σ. Όπως έχουμε δει η ροπή αδράνειας I_K εξαρτάται αποκλειστικά από τη γεωμετρική μορφή του Σ και από τον τρόπο κατανομής της μάζας στο χώρο που καταλαμβάνει το σώμα. Η σχέση 14 λαμβάνει τελικά τη μορφή:

$$T = \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_K^2 + \frac{1}{2} \cdot I_K \cdot \omega^2 \qquad (15)$$

όπου

$$I_K = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j'^2 \qquad (16)$$

Παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια κάθε επίπεδου άκαμπτου σώματος Σ, που κινείται διατηρώντας το επίπεδό του σταθερό, είναι ένα άθροισμα δύο διακριτών όρων:

Ο όρος $T_K \equiv \frac{1}{2} \cdot M \cdot V_K^2$ αφορά την κινητική ενέργεια του Σ λόγω της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας του Κ. Ο όρος $T_{περιστροφής} \equiv \frac{1}{2} \cdot I_K \cdot \omega^2$ εκφράζει την κινητική ενέργεια λόγω της περιστροφής του Σ γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του Κ και είναι κάθετος στο επίπεδο του Σ.

3.1Γ Εκφράσεις του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας του άκαμπτου σώματος

Σύμφωνα με την έκφραση 15 για την κινητική ενέργεια του Σ, το θεώρημα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας, (εξίσωση 11), λαμβάνει την ακόλουθη μορφή, που είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στις εφαρμογές:

Έστω ότι α και τ συμβολίζουν δύο καταστάσεις του σώματος Σ (η τ είναι μεταγενέστερη της α), τότε ικανοποιείται η εξίσωση:

$$\left[\frac{1}{2} \cdot M \cdot V_K^2 + \frac{1}{2} \cdot I_K \cdot \omega^2\right]_τ - \left[\frac{1}{2} \cdot M \cdot V_K^2 + \frac{1}{2} \cdot I_K \cdot \omega^2\right]_α = \sum W^{εξ}_{α\to τ} \qquad (17)$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι που αφορούν στην κινητική ενέργεια λόγω της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας, διαχωρίζονται σαφώς από εκείνους που αφορούν στη στροφική κίνηση. Είναι αναμενόμενο να μας γεννηθεί η υποψία ότι ενδεχομένως η εξίσωση 17 μπορεί να προκύπτει από δύο ανεξάρτητες εξισώσεις: Μια που θα αναφέρεται στη μεταβολή του όρου της κινητικής ενέργειας λόγω μεταφοράς και μια άλλη, στη μεταβολή του όρου της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής.

Για να ελέγξουμε την υποψία μας, ξεκινάμε από τις σχέσεις που έχουμε ήδη αποδείξει και μέσα από μια σειρά μετασχηματισμών και λογικών συνεπαγωγών επιδιώκουμε να καταλήξουμε σε κάποια πρόταση που θα επιβεβαιώνει είτε θα διαψεύδει την αρχική μας υπόθεση:

Για δύο απειροστά γειτονικές καταστάσεις του Σ, το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, γράφεται:

$$dT = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_j \qquad (18α)$$

ή:

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2+\frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2\right)=\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\cdot d\vec{r}_j \qquad (18β)$$

Στο δεξί μέλος της 18β, οι μετατοπίσεις $d\vec{r}_j$ των σωματιδίων, υπολογίζονται από τη θεμελιώδη σχέση 5β (σχήμα 3.1γ):

$$d\vec{r}_j = d\vec{R}_K + dt\cdot\vec{\omega}\times\vec{r}_j'$$

Στο αριστερό μέλος της 18β κάνουμε χρήση των ιδιοτήτων του διαφορικού τελεστή d και των ιδιοτήτων του εξωτερικού γινομένου, οπότε προκύπτει η σχέση:

$$M\cdot\vec{V}_K\cdot d\vec{V}_K + d\left(\frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2\right)=\left(\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\right)\cdot d\vec{R}_K + dt\cdot\vec{\omega}\cdot\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j'\times\vec{F}_j \qquad (18γ)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση 2, που περιγράφει την κίνηση του κέντρου μάζας Κ του Σ, έχουμε:

$$\frac{d\vec{V}_K}{dt}=\frac{1}{M}\cdot\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά και τα δύο μέλη με $\vec{V}_K$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση $d\vec{R}_K=\vec{V}_K\cdot dt$ βρίσκουμε:

$$M\cdot\vec{V}_K\cdot d\vec{V}_K = dt\cdot\vec{V}_K\cdot\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j = d\vec{R}_K\cdot\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j \qquad (19)$$

οπότε, ο πρώτος όρος του αριστερού μέρους και ο πρώτος όρος του δεξιού της 18γ απαλείφονται. Στον τελευταίο όρο του δεξιού μέρους της 18γ έχει εμφανιστεί η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο Σ, ως προς το στερεωμένο στο Σ στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αξόνων (Κ,x′,y′,z′) που έχει αρχή το κέντρο μάζας Κ του Σ:

$$\vec{\tau}_{(K)}\equiv\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_j'\times\vec{F}_j)$$

Τελικά, από την 18γ και την 19, προκύπτει η σχέση[1]:

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2\right)=dt\cdot\vec{\omega}\cdot\vec{\tau}_K \qquad (20α)$$

Οι εξωτερικές δυνάμεις, στην περίπτωση των κινήσεων των δισδιάστατων σωμάτων που εξετάζουμε, βρίσκονται επί του επιπέδου του σώματος. Επομένως, η ροπή τους $\vec{\tau}_K$, είναι παράλληλη με τον άξονα Kz (σχήμα 3.1α) και με τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και η σχέση 20α λαμβάνει την απλούστερη μορφή:

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2\right)=dt\cdot\omega\cdot\tau_K \qquad (20β)$$

ή:

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2\right)=\tau_K\cdot d\theta \qquad (20γ)$$

όπου dθ=ωdt η γωνία περιστροφής του Σ, σε χρόνο dt, ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z), ως προς το οποίο μελετάμε την κίνηση του Σ.

---

[1] Μπορείτε να αποδείξετε απευθείας την εξίσωση 20α, ξεκινώντας από την εξίσωση κίνησης $I_K\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{\tau}_{(K)}$ που περιγράφει την περιστροφή του δισδιάστατου σώματος Σ.

Οι εξισώσεις 20α,β,γ εκφράζουν το θεώρημα της μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω της περιστροφής του Σ. Το μέρος του έργου των εξωτερικών δυνάμεων που είναι υπεύθυνο για τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω της περιστροφής, οφείλεται αποκλειστικά στη ροπή τους τ_K. Το έργο αυτό θα το ονομάζουμε «έργο ροπής». Για απειροστή περιστροφή του σώματος, το έργο ροπής $\delta W_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho}$, είναι μια διαφορική μορφή και ορίζεται από τη σχέση:

$$\delta W_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho} \equiv \tau_K \cdot d\theta \qquad (21)$$

όπου τ_K το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων, που ενεργούν στο Σ, ως προς σύστημα αξόνων στερεωμένο στο Σ, που έχει αρχή το κέντρο μάζας του Κ (στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς).

Για δύο τυχαίες καταστάσεις του Σ α και τ, η μεταβολή της κινητικής του ενέργειας λόγω περιστροφής βρίσκεται με ολοκλήρωση της 20γ:

$$\left[\frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2\right]_\tau - \left[\frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2\right]_\alpha = \sum \delta W^{\alpha\to\tau}_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho} = \int_\alpha^\tau \tau_K\cdot d\theta \qquad (22)$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να διατυπώσουμε ανάλογες εξισώσεις που αφορούν στη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του Σ λόγω της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας του. Από την εξίσωση κίνησης του κέντρου μάζας (19), προκύπτει η σχέση:

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2\right) = \left(\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\right)\cdot d\vec{R}_K \qquad (23\alpha)$$

και ολοκληρώνοντάς τη μεταξύ των καταστάσεων α και τ του Σ, βρίσκουμε:

$$\left[\frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2\right]_\tau - \left[\frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2\right]_\alpha = \int_\alpha^\tau\left(\sum\vec{F}\right)\cdot d\vec{R}_K \qquad (23\beta)$$

Η 23β θυμίζει το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας σωματιδίου, με μάζα ίση με τη μάζα του σώματος Σ, τοποθετημένου στο κέντρο μάζας Κ του Σ πάνω στο οποίο ενεργεί η συνισταμένη $\sum\vec{F}$ όλων των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο Σ.

Συμπεράσματα:

1. Από τις γενικές εξισώσεις κίνησης του άκαμπτου σώματος Σ στο επίπεδο, παρήχθησαν δύο ανεξάρτητες εξισώσεις που αφορούν στη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του Σ:
   α) Για την περιστροφική κίνηση του Σ η εξίσωση 22, που αντιστοιχεί στην εξίσωση κίνησης $I_K\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_{(K)}$.
   β) Για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του Σ η εξίσωση 23β, που αντιστοιχεί στην εξίσωση κίνησης $\frac{d\vec{V}_K}{dt} = \frac{1}{M}\cdot\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j$.
2. Το θεώρημα μεταβολής της συνολικής κινητικής ενέργειας του Σ προκύπτει από το συνδυασμό των δύο ανεξάρτητων εξισώσεων 22 και 23β. Αθροίζοντάς τις κατά μέλη, βρίσκουμε τη σχέση:

$$T_\tau - T_\alpha = \int_\alpha^\tau\left(\sum\vec{F}\right)\cdot d\vec{R}_K + \int_\alpha^\tau \tau_K\cdot d\theta \qquad (24\alpha)$$

Ωστόσο, σύμφωνα με την εξίσωση 11, το δεξί μέρος της 24α ισούται με το συνολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο Σ, από την αρχική κατάσταση α έως την τελική τ:

$$\sum W^{\varepsilon\xi}_{\alpha\to\tau} = \int_{\alpha}^{\tau}\left(\sum \vec{F}\right)\cdot d\vec{R}_K + \int_{\alpha}^{\tau} \tau_K \cdot d\theta \qquad (24\beta)$$

Συμπεραίνουμε ότι το ολικό έργο των εξωτερικών δυνάμεων αναλύεται σε δύο όρους: Ο πρώτος ισούται με το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων που ενεργούν στο Σ, θεωρώντας ότι το σημείο εφαρμογής της ταυτίζεται με το κέντρο μάζας του Σ. Ο δεύτερος αφορά στην περιστροφή του σώματος και ισούται με το έργο της συνολικής ροπής των εξωτερικών δυνάμεων, ως προς σύστημα αξόνων στερεωμένο στο Σ (στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς) που έχει αρχή το κέντρο μάζας του Κ.

3. Το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για απειροστή μετατόπιση του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος Σ, εκφράζεται με τις ακόλουθες τρεις εξισώσεις, εκ των οποίων δύο μόνο είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (η τρίτη προκύπτει από την άθροιση κατά μέλη των δύο άλλων):

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2\right) = \left(\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\right)\cdot d\vec{R}_K \qquad (25\alpha)$$

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot I_K\cdot \omega^2\right) = \tau_K\cdot d\theta \qquad (25\beta)$$

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2 + \frac{1}{2}\cdot I_K\cdot \omega^2\right) = \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\cdot d\vec{r}_j \qquad (25\gamma)$$

Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο Σ, κατά την απειροστή μετατόπισή του, αναλύεται στο άθροισμα των όρων που εμφανίζονται στα δεξιά μέρη των 25α και β:

$$\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\cdot d\vec{r}_j = \left(\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j\right)\cdot d\vec{R}_K + \tau_K\cdot d\theta \qquad (25\delta)$$

3.1Δ Το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας άκαμπτου σώματος

Στο Ένθετο 3.1.1, είδαμε ότι αν το έργο μιας δύναμης $\vec{F}(\vec{r})$ εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του σημείου εφαρμογής της και όχι από τη διαδρομή που συνδέει τα δύο σημεία, τότε είναι δυνατό να οριστεί συνάρτηση της θέσης $U(\vec{r})$, της οποίας η μεταβολή είναι ίση με το έργο της δύναμης:

$$dU(\vec{r}) = -\delta W = -\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \qquad (26)$$

Στην περίπτωση αυτή, η δύναμη ονομάζεται **συντηρητική** και η συνάρτηση $U(\vec{r})$ **δυναμική ενέργεια** του Σ, ως προς τη δύναμη $\vec{F}(\vec{r})$.

Σχετικά με τον ορισμό της δυναμικής ενέργειας $U(\vec{r})$, μέσω της σχέσης 26, πρέπει να κάνουμε δύο επισημάνσεις:

α) Το πρόσημο «-» δεν έχει παρά συμβατικό χαρακτήρα.

β) Η συνάρτηση $U(\vec{r})$ δεν ορίζεται μονοσήμαντα μέσω της 26. Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις $U(\vec{r})$ και $U(\vec{r})+C$, όπου C σταθερά -ανεξάρτητη της θέσης $\vec{r}$- ικανοποιούν την 26. Ώστε για να ορίσουμε μονοσήμαντα τη δυναμική ενέργεια, χρειάζεται να επιλέξουμε (αυθαίρετα) κάποιο σημείο του χώρου όπου η τιμή της είναι ίση με το μηδέν (ή κάποιος άλλος αυθαίρετος αριθμός). Για παράδειγμα, στην περίπτωση των κεντρικών δυνάμεων, όπου το μέτρο της δύναμης είναι αντιστρόφως ανάλογο με το τετράγωνο της απόστασης από το κέντρο έλξης ή άπωσης, ο μηδενισμός της δυναμικής ενέργειας επιλέγεται στο άπειρο.

Υποθέτουμε ότι όλες οι εξωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_j$, j=1,2…N, που ενεργούν πάνω στο άκαμπτο σώμα Σ είναι συντηρητικές. Τότε, υπάρχει μια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(\vec{r})$, τέτοια ώστε για κάθε απειροστή μετατόπιση του Σ, ισχύει:

$$dU(\vec{r}_j) = -\vec{F}(\vec{r}_j)\cdot d\vec{r}_j \quad j=1,2\ldots N$$

Στην περίπτωση αυτή, το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (σχέση 25γ), γράφεται:

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2 + \frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2\right) = -d\left(\sum_{j=1}^{N} U(\vec{r}_j)\right)$$

ή:

$$d\left(\frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2 + \frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2 + \sum_{j=1}^{N} U(\vec{r}_j)\right) = 0 \qquad (27)$$

Από τη σχέση 27 συμπεραίνουμε ότι η μεταβολή της ποσότητας:

$$E_M = \frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2 + \frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2 + \sum_{j=1}^{N} U(\vec{r}_j) \qquad (28)$$

σε κάθε απειροστή -άρα και σε κάθε πεπερασμένη- μετατόπιση του σώματος Σ από μια αρχική κατάσταση α σε μια άλλη τ, είναι ίση με το μηδέν. Ή αλλιώς **η τιμή της ποσότητας E_M διατηρείται σταθερή κατά την κίνηση του Σ**.
Το φυσικό μέγεθος E_M ονομάζεται **μηχανική ενέργεια** του Σ.
Εφόσον οι δυνάμεις που ενεργούν στο Σ είναι συντηρητικές, η μηχανική ενέργεια διατηρείται αναλλοίωτη κατά τη κίνηση του Σ. Λέμε ότι η μηχανική ενέργεια είναι ένα ολοκλήρωμα της κίνησης του Σ. Μεταξύ δύο καταστάσεων α και τ του Σ, η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας εκφράζεται με την εξίσωση:

$$\left[\frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2 + \frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2 + \sum_{j=1}^{N} U(\vec{r}_j)\right]_\alpha = \left[\frac{1}{2}\cdot M\cdot V_K^2 + \frac{1}{2}\cdot I_K\cdot\omega^2 + \sum_{j=1}^{N} U(\vec{r}_j)\right]_\tau \qquad (29)$$

Σχόλια:

1. Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας άκαμπτου σώματος εξασφαλίζεται τότε και μόνον αν οι εξωτερικές δυνάμεις που ενεργούν σε αυτό είναι συντηρητικές. Κάτω από αυτή την προϋπόθεση, το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας προκύπτει ως ειδική περίπτωση του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας.
2. Η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, καθώς και το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, αφορούν αθροιστικές σχέσεις μεγεθών τα οποία είναι βαθμωτές αθροιστικές ποσότητες (όπως είναι το έργο, η κινητική ενέργεια και η δυναμική ενέργεια). Ως εκ τούτου, η εφαρμογή τους μπορεί να επεκταθεί και σε συστήματα αλληλεπιδρώντων άκαμπτων σωμάτων.

3.2 Διατήρηση της ορμής συστήματος άκαμπτων σωμάτων

Στην παρούσα παράγραφο μελετάμε τη διατήρηση της ορμής, κατά την επίπεδη κίνηση ενός ή περισσότερων δισδιάστατων άκαμπτων σωμάτων. Η ορμή ενός συστήματος είναι διανυσματικό μέγεθος και ορίζεται ως το άθροισμα των ορμών των μερών του. Έτσι, η ορμή ενός άκαμπτου σώματος ορίζεται ως το άθροισμα των ορμών των σωματιδίων που το απαρτίζουν και η ορμή ενός συστήματος άκαμπτων σωμάτων ισούται με το άθροισμα των ορμών τους. Η διατήρηση της ορμής, όπως και η διατήρηση της ενέργειας μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων που αφορούν στην αλληλεπίδραση άκαμπτων σωμάτων.

3.2Α Κίνηση του κέντρου μάζας - Ορμή άκαμπτου σώματος

Η ορμή ενός σωματιδίου ορίζεται ως το διανυσματικό μέγεθος $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, όπου m η μάζα και $\vec{v}$ η ταχύτητα του σωματιδίου, ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z). Η ορμή είναι ένα αθροιστικό μέγεθος. Δηλαδή, η ορμή ενός συστήματος σωματιδίων ορίζεται ως το άθροισμα των ορμών των σωματιδίων που το αποτελούν.
Ένα άκαμπτο σώμα αποτελείται από ένα σύνολο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Επομένως, η ορμή $\vec{P}$ του άκαμπτου σώματος Σ ισούται με το άθροισμα των ορμών των σωματιδίων του και ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z), υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{v}_j \qquad (1)$$

Όπως είδαμε και στην παράγραφο 1.3Α, η ορμή του Σ σχετίζεται με την κίνηση του κέντρου μάζας του (Κ) (εξισώσεις 1.3.12, 13). Από τον ορισμό του κέντρου μάζας ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), έχουμε:

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{r}_j \qquad (2)$$

όπου $M = \sum_{j=1}^{N} m_j$ η μάζα του Σ.

Παραγωγίζουμε τη 2 ως προς το χρόνο, οπότε στο αριστερό μέρος της εμφανίζεται η ταχύτητα $\vec{V}_K$ του κέντρου μάζας του Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z). Σε συνδυασμό με την 1, προκύπτει ότι:

$$M \cdot \vec{V}_K = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot \vec{v}_j = \vec{P} \qquad (3)$$

Δηλαδή, η ορμή του Σ είναι ίση με το γινόμενο της μάζας του επί την ταχύτητα του κέντρου μάζας του Κ.
Με βάση τη σχέση 3, ο 2ος νόμος του Newton, που προσδιορίζει την κίνηση του κέντρου μάζας (εξίσωση 3.1.2), γράφεται:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \qquad (4)$$

Παρατηρούμε ότι αν το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο Σ είναι ίσο με μηδέν, τότε ισχύει:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad (5)$$

που σημαίνει ότι η ορμή του Σ διατηρείται σταθερή: Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ενεργούν στο Σ είναι μηδενική, η ορμή του Σ είναι ένα ολοκλήρωμα της κίνησης. Μεταξύ δύο καταστάσεων α και τ του Σ, ισχύει:

$$\vec{P}_{\alpha} = \vec{P}_{\tau} \tag{6}$$

Ώστε όταν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στο άκαμπτο σώμα είναι μηδέν, τότε η ορμή του διατηρείται σταθερή και το κέντρο μάζας του K κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{V}_K$ (σχέση 3).

Αξίζει να επισημανθεί ότι ο μηδενισμός του αθροίσματος των εξωτερικών δυνάμεων, δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη και το μηδενισμό των ροπών τους (Ένθετο 2.1.2, «Ζεύγος δυνάμεων»). Επομένως είναι δυνατό το κέντρο μάζας ενός άκαμπτου σώματος να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς, αλλά η γωνιακή του επιτάχυνση να είναι διαφορετική από το μηδέν.

3.2B Θεώρημα ώθησης - ορμής

Έστω ότι στο σώμα Σ ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις, των οποίων η συνισταμένη είναι διαφορετική από το μηδέν:

$$\vec{F} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \neq 0$$

Τότε, η κίνηση του κέντρου μάζας K του Σ, προσδιορίζεται από την εξίσωση:

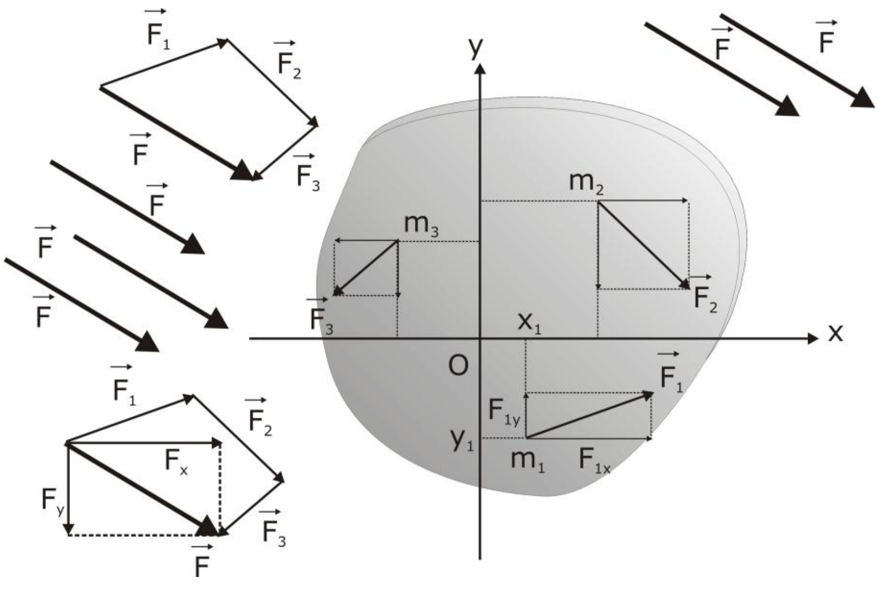
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{7}$$

Από την 7, προκύπτει ότι η ορμή του Σ μεταβάλλεται κάτω από τη δράση των εξωτερικών δυνάμεων, σύμφωνα με τη σχέση:

$$d\vec{P} = \vec{F} \cdot dt \tag{8}$$

Μεταξύ δύο καταστάσεων α και τ του Σ, η μεταβολή της ορμής του είναι:

$$\vec{P}_{\tau} - \vec{P}_{\alpha} = \int_{\alpha}^{\tau} \vec{F} \cdot dt \tag{9}$$



Σχήμα 3.2α: Οι δυνάμεις και οι ορμές των σωματιδίων αντιστοιχούν σε κλάσεις ίσων διανυσμάτων. Για τον υπολογισμό του μέτρου και της κατεύθυνσης της συνισταμένης κάθε κλάσης, θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα -εκπρόσωπο- της κλάσης και υπολογίζουμε τις συνιστώσες του, ως προς ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων.

Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξί μέρος της 9 ονομάζεται **ώθηση** της δύναμης $\vec{F}$, μεταξύ των καταστάσεων α και τ του Σ. Συμβολίζουμε:

$$\vec{\Omega} \equiv \int_{\alpha}^{\tau} \vec{F} \cdot dt \qquad (10)$$

Σύμφωνα με την ορολογία αυτή, η μεταβολή της ορμής του Σ μεταξύ δύο καταστάσεών του α και τ είναι ίση με την ώθηση της συνισταμένης των δυνάμεων που ενεργούν στο Σ, από την κατάσταση α, μέχρι την τ.

3.2Γ Ορμή συστήματος άκαμπτων σωμάτων - Διατήρηση της ορμής του συστήματος

Ας θεωρήσουμε δύο δισδιάστατα άκαμπτα σώματα Σ1 και Σ2, κινούμενα πάνω στο κοινό τους επίπεδο, το οποίο ταυτίζεται με το επίπεδο Οxy αδρανειακού συστήματος (Ο,x,y,z) (σχήμα 3.2β). Υποθέτουμε ότι τα δύο σώματα αλληλεπιδρούν με δυνάμεις «Νευτωνικού» τύπου, δράσης - αντίδρασης και ότι δεν ασκείται πάνω τους καμιά άλλη εξωτερική δύναμη. Ένα τέτοιο σύστημα, όπου δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις σε κανένα μέρος του, ονομάζεται **απομονωμένο** (ενότητα 1.1).

Συμβολίζουμε με $\vec{F}_{12}$ τη δύναμη που ασκεί το Σ2 στο Σ1 και με $\vec{F}_{21}$ τη δύναμη που ασκεί το Σ1 στο Σ2. Αφού οι $\vec{F}_{12}$ και $\vec{F}_{21}$ υπακούουν στον τρίτο νόμο του Newton, έπεται ότι **κάθε χρονική στιγμή** ικανοποιούν τη σχέση:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (11)$$

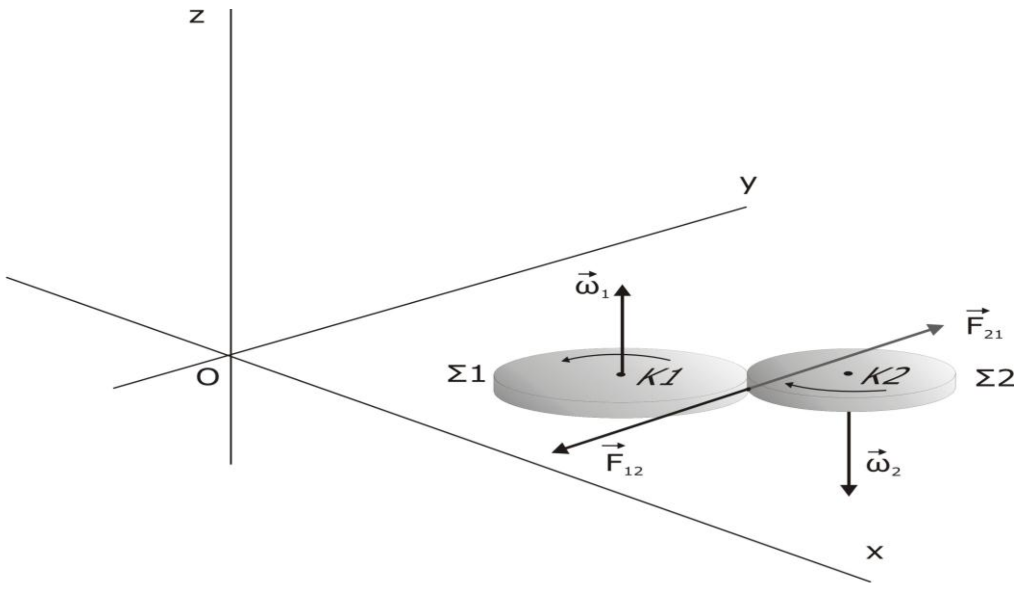
Στο απειροστό χρονικό διάστημα [t, t+dt], η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος είναι αντίστοιχα:

$$d\vec{P}_1 = \vec{F}_{12} \cdot dt \text{ για το Σ1}$$

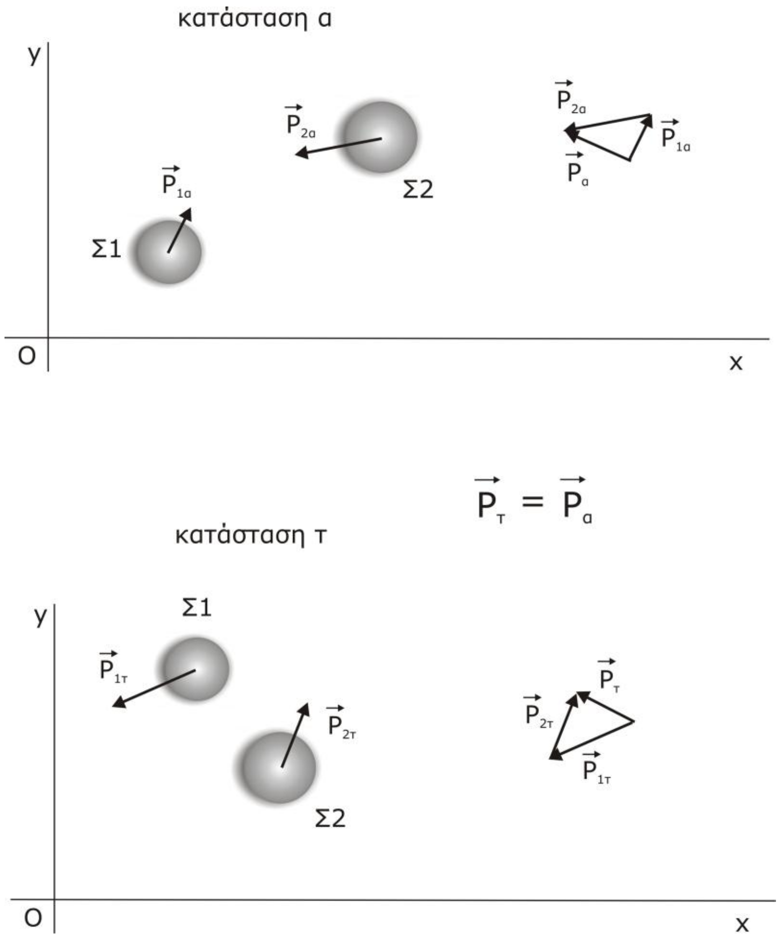
και

$$d\vec{P}_2 = \vec{F}_{21} \cdot dt \text{ για το Σ2}$$

Προσθέτουμε κατά μέρη τις δύο τελευταίες σχέσεις, οπότε, σύμφωνα με την 11, προκύπτει ότι:



Σχήμα 3.2β: Τα σώματα Σ1 και Σ2 αλληλεπιδρούν με δυνάμεις που υπακούουν στον 3ο νόμο του Newton. Οι δυνάμεις αυτές μπορεί να είναι δυνάμεις πεδίων που αναπτύσσονται από τα σώματα, ή επαφής όπως στο παράδειγμα που εικονίζεται στο σχήμα.



Σχήμα 3.2γ: Τα σώματα Σ1 και Σ2 αλληλεπιδρούν με δυνάμεις της μορφής δράση-αντίδραση. Το σύστημα των Σ1 και Σ2 είναι απομονωμένο. Αν και η ορμή κάθε σώματος μεταβάλλεται, η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

$$d\vec{P}_1 + d\vec{P}_2 = 0$$

ή:

$$d\left(\vec{P}_1 + \vec{P}_2\right) = 0 \qquad (12)$$

Δηλαδή το άθροισμα των ορμών των Σ1 και Σ2 διατηρείται αναλλοίωτο κατά την κίνηση των σωμάτων. Ή, με άλλα λόγια **η συνολική ορμή του συστήματος των άκαμπτων σωμάτων διατηρείται σταθερή**, **εφόσον η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που δρουν στο σύστημα είναι ίση με το μηδέν**. Γενικά, για ένα σύστημα πολλών αλληλεπιδρώντων σωμάτων Σ1, Σ2,…Σμ, γράφουμε:

$$\vec{P} = \sum \vec{P}_{\lambda} = \text{σταθερή}$$

ή, μεταξύ δύο καταστάσεων α και τ του συστήματος:

$$\vec{P}_{a} = \vec{P}_{\tau} \qquad (13α)$$

$$\sum \vec{P}_{\lambda}\Big|_{a} = \sum \vec{P}_{\lambda}\Big|_{\tau} \qquad (13β)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι κατά την κίνηση ενός συστήματος αλληλεπιδρώντων σωμάτων, η ορμή κάθε σώματος, γενικά, μεταβάλλεται. Ωστόσο, το άθροισμα όλων των επιμέρους μεταβολών είναι ίσο με το μηδέν (σχήμα 3.2γ). Ώστε η συνολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος άκαμπτων σωμάτων διατηρείται σταθερή, κατά τη διάρκεια της κίνησης του συστήματος. Η ολική ορμή είναι ένα «ολοκλήρωμα της κίνησης» του συστήματος.

3.3 Διατήρηση της στροφορμής συστήματος άκαμπτων σωμάτων

Η στροφορμή ενός απομονωμένου συστήματος είναι άλλο ένα ολοκλήρωμα της κίνησης: Διατηρείται αναλλοίωτη κατά τη μεταβολή του συστήματος, εφόσον το σύστημα είναι απομονωμένο. Η διατήρηση της στροφορμής όπως και τα άλλα θεωρήματα διατήρησης, εκφράζεται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Η τιμή της στροφορμής ενός άκαμπτου σώματος Σ εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος αναφοράς ως προς το οποίο την υπολογίζουμε. Ωστόσο, στην έκφραση της στροφορμής του Σ μπορούμε να διακρίνουμε δύο όρους: Ο πρώτος, αφορά στη στροφορμή του κέντρου μάζας του Σ και εξαρτάται από την επιλογή του αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Θα τον ονομάζουμε «τροχιακή» στροφορμή του Σ. Ο δεύτερος είναι συνάρτηση της ροπής αδράνειας του Σ ως προς το κέντρο μάζας του και της γωνιακής ταχύτητάς του. Ο όρος αυτός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του αδρανειακού συστήματος αναφοράς και ονομάζεται «ιδιοστροφορμή» του Σ. Σε ένα απομονωμένο σύστημα σωμάτων που αλληλεπιδρούν, οι ιδιοστροφορμές και οι τροχιακές στροφορμές των σωμάτων μεταβάλλονται, αλλά η ολική στροφορμή διατηρείται σταθερή.

3.3Α Ιδιοστροφορμή και τροχιακή στροφορμή άκαμπτου σώματος. Η διατήρηση της στροφορμής ενός άκαμπτου σώματος

Ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), η στροφορμή $\vec{J}_{\Sigma(O)}$ του άκαμπτου σώματος Σ υπολογίζεται από τη σχέση 28 της παραγράφου 1.3Β:

$$\vec{J}_{\Sigma(O)} = \overrightarrow{OK} \times \vec{P}_K + I_K \cdot \vec{\omega} \tag{1}$$

όπου Κ είναι το κέντρο μάζας του Σ και I_K η ροπή αδράνειας του Σ ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του Σ και διερχόμενο από το κέντρο μάζας του Κ.

Στην πρόταση 1.2.2 της ενότητας 1.2 αποδείξαμε ότι η γωνιακή ταχύτητα του Σ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του αδρανειακού συστήματος αναφοράς ως προς το οποίο την υπολογίζουμε. Ομοίως, η ροπή αδράνειας I_K υπολογίζεται ως προς σύστημα στερεωμένο στο Σ με αρχή το κέντρο μάζας Κ του Σ και είναι ανεξάρτητη της επιλογής του αδρανειακού συστήματος (O,x,y,z). Παρατηρούμε λοιπόν ότι στο δεξί μέρος της 1, μόνο ο πρώτος όρος, $\overrightarrow{OK} \times \vec{P}_K$ εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος αναφοράς. Ο δεύτερος όρος $I_K \cdot \vec{\omega}$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής του αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Ο όρος $\overrightarrow{OK} \times \vec{P}_K$ μπορεί να θεωρηθεί ως η στροφορμή σωματιδίου μάζας ίσης με τη μάζα του Σ, τοποθετημένου στο κέντρο μάζας Κ του Σ. Τον ονομάζουμε «στροφορμή του κέντρου μάζας του άκαμπτου σώματος Σ» ή «τροχιακή στροφορμή του Σ». Συμβολίζουμε:

$$\vec{J}_{K(O)} \equiv \overrightarrow{OK} \times \vec{P}_K \tag{2}$$

Ο δεύτερος όρος $I_K \cdot \vec{\omega}$, που είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του (O,x,y,z), ορίζεται ως η «ιδιοστροφορμή» ή «εσωτερική στροφορμή» του Σ. Συμβολίζουμε:

$$\vec{J}_{\Sigma} = I_K \cdot \vec{\omega} \tag{3}$$

Ώστε η ολική στροφορμή του Σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z) είναι ίση με το άθροισμα της στροφορμής του κέντρου μάζας του Κ και της ιδιοστροφορμής του:

$$\vec{J}_{\Sigma(O)} = \vec{J}_{K(O)} + \vec{J}_{\Sigma} \tag{4}$$

Θεωρούμε το στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς (K,x,y,z) με αρχή το κέντρο μάζας Κ του Σ. Ως προς το (K,x,y,z), η στροφορμή του κέντρου μάζας του Σ είναι ίση με μηδέν:

$$O \equiv K \Rightarrow \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{KK} = 0 \Rightarrow \vec{J}_{K(O)} = \overrightarrow{OK} \times \vec{P}_K = 0 \qquad (5)$$

Ώστε, ως προς το (K,x,y,z), η ολική στροφορμή του Σ ταυτίζεται με την ιδιοστροφορμή του:

$$\vec{J}_{\Sigma(K)} = \vec{J}_{\Sigma} = I_K \cdot \vec{\omega} \qquad (6)$$

Κάτω από ποιες προϋποθέσεις η στροφορμή του Σ ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z), είναι ένα ολοκλήρωμα της κίνησης; Δηλαδή, ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται ώστε η στροφορμή ενός άκαμπτου σώματος να διατηρείται σταθερή;
Ξεκινώντας από τις εξισώσεις κίνησης του Σ θα δείξουμε ότι:
Η στροφορμή ενός απομονωμένου άκαμπτου σώματος Σ διατηρείται σταθερή κατά την κίνηση του Σ

Υποθέτουμε ότι πάνω στο Σ είτε δεν ενεργεί καμιά εξωτερική δύναμη, είτε ότι ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις των οποίων η συνισταμένη είναι ίση με το μηδέν και η ολική ροπή ως προς το (O,x,y,z) είναι επίσης ίση με το μηδέν. Στην πρόταση 2.1.1 της παραγράφου 2.1Β, έχουμε δείξει ότι με αυτές τις προϋποθέσεις, η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων είναι ίση με το μηδέν ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Επομένως, η κίνηση του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), προσδιορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\frac{d\vec{V}_K}{dt} = 0 \qquad (7)$$

και

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = 0 \qquad (8)$$

Από την 7 προκύπτει ότι το κέντρο μάζας Κ, του Σ, κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα $\vec{V}_K$. Η παραμετρική εξίσωση της τροχιάς του Κ, με παράμετρο το χρόνο, είναι:

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{V}_K \qquad (9)$$

όπου $\overrightarrow{OA}$ είναι το διάνυσμα θέσης του Κ τη χρονική στιγμή t=0.
Από την 8 προκύπτει ότι η στροφορμή του Σ είναι σταθερή. Η έκφραση της στροφορμής $\vec{J}_{(O)}$ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), δίνεται από τη σχέση 1. Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{J}_{(O)} = M \cdot \overrightarrow{OK} \times \vec{V}_K + I_K \cdot \vec{\omega} = \text{σταθερή} \qquad (10)$$

(Το Μ παριστάνει, ως συνήθως, τη μάζα του Σ)
Αντικαθιστούμε το $\overrightarrow{OK}$, σύμφωνα με την 9 και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου, λαμβάνουμε:

$$M \cdot \overrightarrow{OA} \times \vec{V}_K + I_K \cdot \vec{\omega} = \vec{J}_{(O)} = \text{σταθερή} \qquad (11)$$

Στην εξίσωση 11, τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\vec{V}_K$ και $\vec{J}_{(O)}$ είναι σταθερά, δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Ομοίως, σταθερές είναι και οι βαθμωτές ποσότητες Μ και I_K. Τότε όμως έπεται ότι και η γωνιακή ταχύτητα του Σ είναι σταθερή -ανεξάρτητη του χρόνου. Ώστε ένα σώμα Σ πάνω στο οποίο ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις με συνισταμένη μηδέν και συνολική ροπή ίση με μηδέν ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), κινείται έτσι ώστε:
α) Το κέντρο μάζας του Σ κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση ως προς το (O,x,y,z).

β) Το Σ περιστρέφεται ως προς το (Ο,x,y,z) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Δεδομένου ότι η τιμή της γωνιακής ταχύτητας είναι ανεξάρτητη της επιλογής του αδρανειακού συστήματος αναφοράς (παράγραφος 1.3Β), το Σ περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

3.3Β Διατήρηση της στροφορμής απομονωμένου συστήματος άκαμπτων σωμάτων

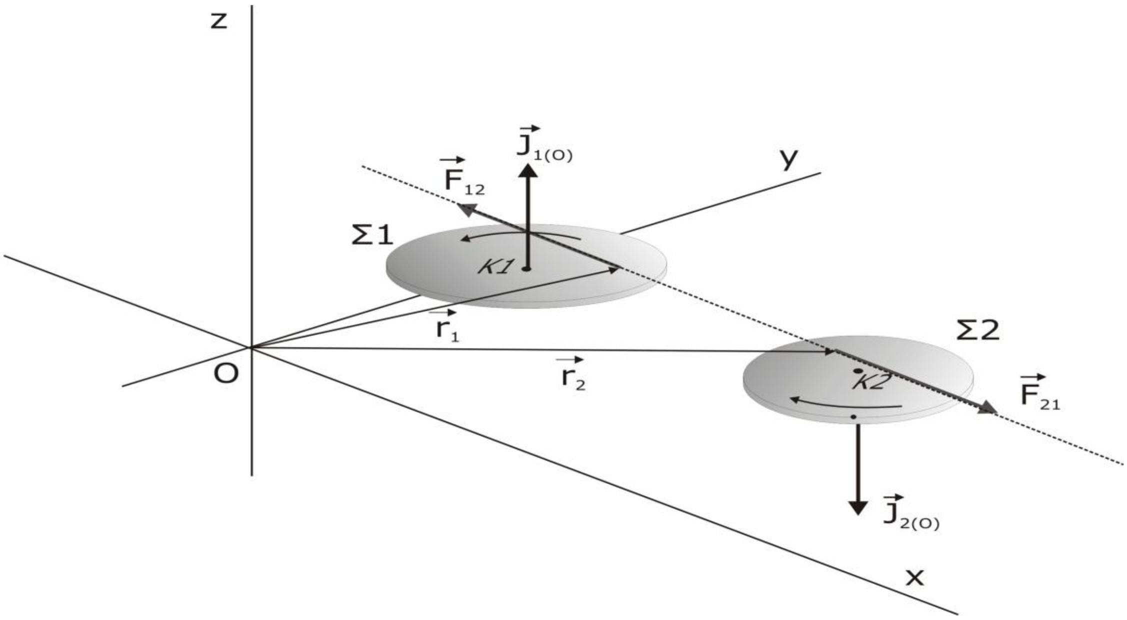
Ας θεωρήσουμε ένα απομονωμένο σύστημα δύο σωμάτων Σ1 και Σ2, όπως στην παράγραφο 3.2Γ. Τα Σ1 και Σ2, κινούνται πάνω στο κοινό τους επίπεδο, το οποίο ταυτίζεται με το επίπεδο Oxy αδρανειακού συστήματος (Ο,x,y,z) (σχήμα 3.3α). Τα δύο σώματα αλληλεπιδρούν με δυνάμεις «Νευτωνικού» τύπου, δράσης - αντίδρασης. Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης έχουν κοινό φορέα, την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία εφαρμογής τους. Στο σύστημα των Σ1 και Σ2 δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις. Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.2Γ, στο απομονωμένο σύστημα η ολική ορμή είναι μια σταθερά της κίνησης. Στην παρούσα παράγραφο θα διερευνήσουμε αν υπάρχει σταθερά της κίνησης που σχετίζεται με τις στροφορμές των σωμάτων του συστήματος.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής κάθε σώματος, ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (Ο,x,y,z), ισούται με την ολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό (εξίσωση 3.1.3). Για τα σώματα Σ1 και Σ2 η εξίσωση 3.3.1 γράφεται, αντίστοιχα:

$$\frac{d\vec{J}_{1(O)}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} \qquad (12α)$$

$$\frac{d\vec{J}_{2(O)}}{dt} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} \qquad (12β)$$

Αθροίζουμε κατά μέρη τις 12α και β. Δεδομένου ότι $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, λαμβάνουμε:



Σχήμα 3.3α: **Οι στροφορμές των σωμάτων του συστήματος πρέπει να υπολογιστούν ως προς κοινό αδρανειακό σύστημα αναφοράς**. Όπως έχουμε δείξει στο Ένθετο 3, στο τέλος του κεφαλαίου 1, η στροφορμή μεταβάλλεται όταν αλλάζουμε το σύστημα αναφοράς. Έτσι, οι πράξεις, συγκρίσεις κλπ, μεταξύ των στροφορμών των σωμάτων του συστήματος, έχουν νόημα εφόσον γίνονται ως προς το ίδιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{J}_{1(O)} + \vec{J}_{2(O)}\right) = \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \times \vec{F}_{21} \qquad (13)$$

Οι δυνάμεις $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{21}$ είναι συγγραμμικές με το διάνυσμα $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, που ορίζεται από τα διανύσματα θέσης των σημείων εφαρμογής τους (σχήμα 3.3α). Επομένως, το εξωτερικό γινόμενο στο δεξί μέρος της 13 μηδενίζεται. Καταλήγουμε στην επόμενη σχέση που εκφράζει τη διατήρηση της συνολικής στροφορμής του συστήματος των δύο σωμάτων, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z):

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{J}_{1(O)} + \vec{J}_{2(O)}\right) = 0 \qquad (14)$$

Η γενίκευση της 14 σε σύστημα περισσότερων των δύο άκαμπτων σωμάτων που αλληλεπιδρούν με δυνάμεις της μορφής δράσης-αντίδρασης, δεν παρουσιάζει καμιά ιδιαίτερη δυσκολία, οπότε μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση:

Διατήρησης της στροφορμής συστήματος άκαμπτων σωμάτων
Αν σε ένα απομονωμένο σύστημα άκαμπτων σωμάτων οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης των σωμάτων είναι Νευτωνικού τύπου (δράσης-αντίδρασης), τότε η συνολική στροφορμή του συστήματος ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, διατηρείται σταθερή:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\mu} \vec{J}_{\mu(O)}\right) = 0 \qquad (15\alpha)$$

όπου, ο δείκτης μ απαριθμεί τα άκαμπτα σώματα που απαρτίζουν το σύστημα.

Για δύο διακριτές καταστάσεις α και τ του συστήματος, από την 15α προκύπτει η:

$$\left.\sum_{\mu} \vec{J}_{\mu(O)}\right|_{\alpha} = \left.\sum_{\mu} \vec{J}_{\mu(O)}\right|_{\tau} \qquad (15\beta)$$

Σχόλιο 1: Ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y,z), η στροφορμή του μ-σώματος του απομονωμένου συστήματος των άκαμπτων σωμάτων, δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{J}_{\mu(O)} = \overrightarrow{OK_{\mu}} \times \vec{P}_{\mu K} + I_{\mu K} \cdot \vec{\omega}_{\mu} \qquad (16)$$

όπου K_{μ} το κέντρο μάζας του μ-σώματος, $\vec{P}_{\mu K}$ η ορμή του, $I_{\mu K}$ η ροπή αδράνειάς του ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και $\vec{\omega}_{\mu}$ η γωνιακή του ταχύτητα.
Σύμφωνα με το θεώρημα διατήρησης της στροφορμής, ισχύει:

$$\sum_{\mu}\left(\overrightarrow{OK_{\mu}} \times \vec{P}_{\mu K}\right) + \sum_{\mu}\left(I_{\mu K} \cdot \vec{\omega}_{\mu}\right) = \vec{J}_{(O)} = \text{σταθερά} \qquad (17)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση 17, είναι δυνατό να μεταβάλλεται τόσο η τροχιακή όσο και η ιδιοστροφορμή κάθε σώματος του συστήματος, έτσι ώστε η ολική στροφορμή να διατηρείται σταθερή. Οι μεταβολές των στροφορμών των σωμάτων του συστήματος πραγματοποιείται μέσω των αλληλεπιδράσεων που αναπτύσσονται μεταξύ τους. Μέσω των αλληλεπιδράσεων των σωμάτων του απομονωμένου συστήματος, μπορεί να συμβεί «μεταφορά» τροχιακής στροφορμής που οφείλεται στην κίνηση των κέντρων μάζας των σωμάτων, σε εσωτερική στροφορμή που οφείλεται στην περιστροφή κάθε σώματος γύρω από το κέντρο μάζας του και αντίστροφα.

Σχόλιο 2: Το θεώρημα διατήρησης της στροφορμής μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: **«Η συνολική στροφορμή ενός συστήματος άκαμπτων σωμάτων διατηρείται σταθερή ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z), εφόσον το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα του συστήματος, ως προς το (O,x,y,z) είναι ίσο με το μηδέν και τα σώματα αλληλεπιδρούν με δυνάμεις «Νευτωνικού τύπου, δράσης-αντίδρασης»**.