

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Βασικές Έννοιες: Αδρανειακό σύστημα αναφοράς - Σύστημα αξόνων στερεωμένο σε άκαμπτο σώμα - Περιστροφή διανύσματος γύρω από άξονα - Γωνιακή ταχύτητα - Εξισώσεις κίνησης δισδιάστατου άκαμπτου σώματος - Στροφορμή άκαμπτου σώματος ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς - Ροπή δύναμης ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς - Ροπή αδράνειας άκαμπτου σώματος ως προς άξονα - Ώθηση δύναμης - Δυνάμεις «Νευτωνικού τύπου», δράσης-αντίδρασης - Πλαστική κρούση - Ελαστική κρούση - Απομονωμένο σύστημα σωμάτων - Διατήρηση της ορμής συστήματος άκαμπτων σωμάτων - Κινητική ενέργεια άκαμπτου σώματος - Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας συστήματος άκαμπτων σωμάτων - Διατήρηση της στροφορμής συστήματος άκαμπτων σωμάτων

Στο παρόν κεφάλαιο, εφαρμόζουμε το θεωρητικό μοντέλο του δισδιάστατου άκαμπτου σώματος στην επίλυση προβλημάτων. Μελετάμε κινήσεις άκαμπτων σωμάτων κάτω από τη δράση εξωτερικών δυνάμεων ή πεδίων δυνάμεων, κινήσεις κάτω από τη δράση εξωτερικών συνδέσμων, καθώς και την κίνηση απομονωμένου συστήματος αλληλεπιδρώντων άκαμπτων σωμάτων (κρούσεις περιστρεφόμενων σωμάτων κλπ). Από την επίλυση των προβλημάτων αυτών προκύπτουν θεωρητικές προβλέψεις που μπορούν να ελεγχθούν εμπειρικά: Σε κάθε περίπτωση είναι δυνατό να σχεδιάσουμε μια πειραματική διαδικασία, είτε στο περιβάλλον ενός τυπικού εργαστηρίου είτε στο εικονικό περιβάλλον ενός εκπαιδευτικού λογισμικού (για παράδειγμα, στο Interactive Physics) και να συγκρίνουμε τα πειραματικά δεδομένα με τις θεωρητικές προβλέψεις. Στο τέλος του κεφαλαίου παρατίθενται προβλήματα προς λύση, παρόμοια με τις επεξεργασμένες εφαρμογές.

Εφαρμογή 1: Κίνηση ράβδου στο οριζόντιο επίπεδο, στρεπτής γύρω από σταθερό, κατακόρυφο άξονα.

Ομοιογενής ράβδος μήκους L και μάζας M βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα Az . Το σημείο A απέχει από το κέντρο μάζας K της ράβδου απόσταση R ($R < L/2$). Η ράβδος ηρεμεί ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) , πάνω στον άξονα Ay (σχήμα 4.1a). Τη χρονική στιγμή $t=0$, και για πολύ μικρό χρόνο τ ($\tau \rightarrow 0$) ασκείται κάθετα στη ράβδο, σε σημείο της που απέχει από τον άξονα περιστροφής Az απόσταση s , ισχυρή δύναμη F , της οποίας το μέτρο δίνεται από τη συνάρτηση:

$$F = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \tau \leq t \end{cases}$$

$$\text{όπου } \lim_{\tau \rightarrow 0} (F_0) = +\infty$$

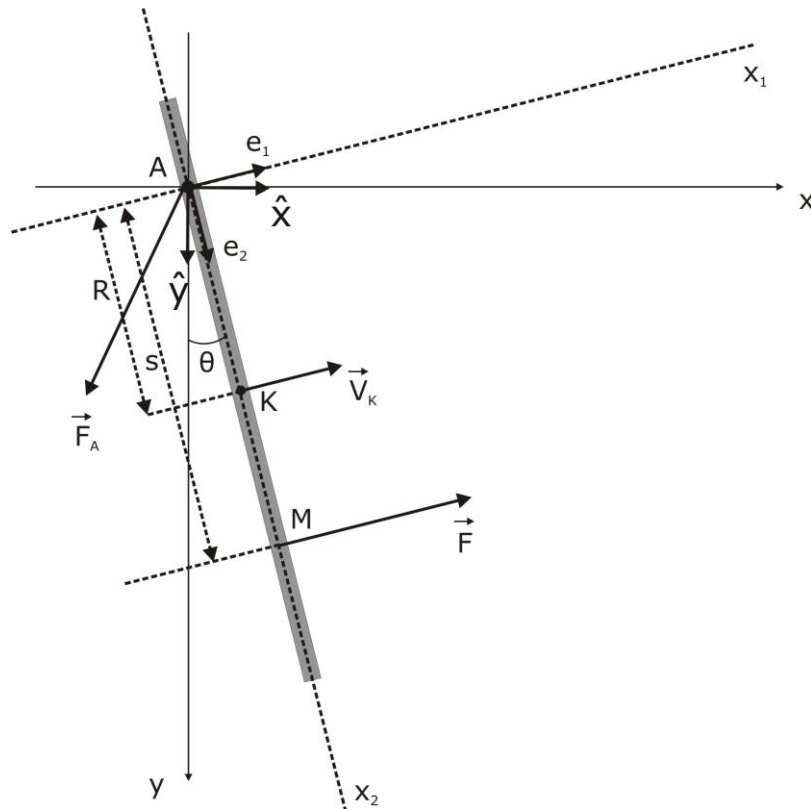
Η ώθηση $\Omega_{0 \rightarrow \tau} = \Omega_0$, της F έχει πεπερασμένη τιμή και είναι δεδομένη.

Οι τριβές κατά την κίνηση της ράβδου είναι αμελητέες.

α) Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα ω_0 που αποκτά η ράβδος. β) Να μελετηθεί η αντίδραση του άξονα περιστροφής ως συνάρτηση της θέσης του σημείου εφαρμογής της F επί της ράβδου.

Λύση

A) Γενικές σκέψεις.



Σχήμα 4.1α: Το σύστημα (A, x, y, z) είναι αδρανειακό (σταθερό ως προς το εργαστήριο). Ο άξονας Az είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος. Το σύστημα (A, x_1, x_2) είναι στερεωμένο στη ράβδο. Η ράβδος είναι στρεπτή γύρω από το σταθερό άξονα Az . Η ράβδος κινείται πάνω στο επίπεδο (A, x, y) του αδρανειακού συστήματος (A, x, y, z) . Το στερεωμένο σύστημα (A, x_1, x_2) περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Az μαζί με τη ράβδο.

Στο χρονικό διάστημα $[0, \tau]$, στο σημείο της M δρα η ισχυρή δύναμη \vec{F} , με κατεύθυνση κάθετη στη ράβδο. Πάνω στη ράβδο ενεργεί και η δύναμη αντίδρασης του άξονα περιστροφής \vec{F}_A .

Στο κεφάλαιο 1 έχουμε δείξει ότι κάθε πρόβλημα κίνησης άκαμπτου σώματος Σ , ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (A, x, y, z) , ανάγεται στη μελέτη της κίνησης ενός συστήματος αξόνων στερεωμένου στο Σ . Επομένως, για να μελετήσουμε την κίνηση ενός άκαμπτου σώματος ξεκινάμε με δύο επιλογές: α) την επιλογή του αδρανειακού συστήματος αναφοράς ως προς το οποίο θα μελετήσουμε την κίνηση και β) την επιλογή ενός συστήματος αξόνων στερεωμένου στο σώμα.

Στην προκειμένη περίπτωση οι δύο επιλογές μας φαίνονται στο σχήμα 4.1α: Το αδρανειακό σύστημα ως προς το οποίο θα μελετήσουμε την κίνηση της ράβδου είναι το (A, x, y, z) και το στερεωμένο στη ράβδο σύστημα αξόνων, το (A, x_1, x_2, x_3) . Ο άξονας Ax_2 ταυτίζεται με την κατεύθυνση του διανύσματος \vec{AM} , που ορίζουν τα σημεία A και M της ράβδου. Ο άξονας Ax_1 σχηματίζει με τον Ax_2 γωνία $+\pi/2$ και ο Ax_3 ταυτίζεται με τον Az . Το πρόβλημά μας ανάγεται στην εύρεση, κάθε χρονική στιγμή, της θέσης και του προσανατολισμού του (A, x_1, x_2, x_3) ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) .

Η κίνηση της ράβδου ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) , περιγράφεται από τις γενικές εξισώσεις:

$$M \cdot \frac{d\vec{V}_K}{dt} = \sum \vec{F} \quad (1)$$

και

$$\frac{d\vec{J}_{(A)}}{dt} = \vec{T}_A \quad (2)$$

όπου:

\vec{V}_K : η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) ,

$\sum \vec{F}$: το άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν στη ράβδο,

$\vec{J}_{(A)}$: η στροφορμή της ράβδου ως προς το (A, x, y, z) και

\vec{T}_A : το άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το ίδιο σύστημα.

Κατά την κίνηση της ράβδου, η θέση του συστήματος αξόνων (A, x_1, x_2, x_3) ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) , προσδιορίζεται από τη γωνία θ που σχηματίζουν τα μοναδιαία διανύσματα e_1 και e_2 των αξόνων Ax_1 και Ax_2 , με τα \hat{x} και \hat{y} των αξόνων Ax , Ay , αντίστοιχα. Σύμφωνα με το σχήμα 4.1α, ισχύουν οι σχέσεις:

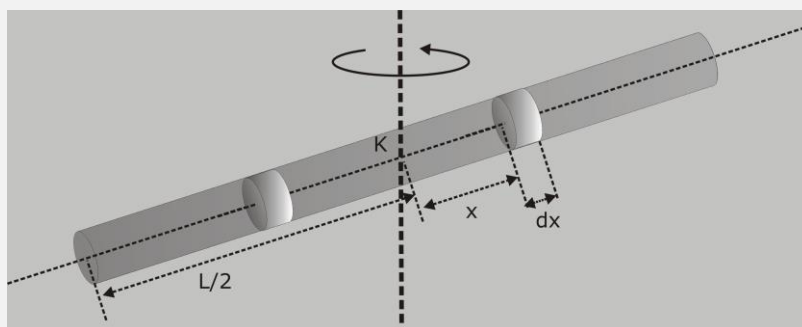
$$e_1 = \hat{x} \cdot \cos(\theta) - \hat{y} \cdot \sin(\theta) \quad (3)$$

$$e_2 = \hat{x} \cdot \sin(\theta) + \hat{y} \cdot \cos(\theta) \quad (4)$$

Από τις 3 και 4, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και το ρυθμό μεταβολής καθενός από τα διανύσματα e_1 και e_2 . Συμβολίζουμε με ω τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου: $\omega = d\theta/dt$ (ενότητα 1.2) και λαμβάνουμε τις σχέσεις:

Ένθετο 4.1.1

Υπολογισμός της ροπής αδράνειας I_K ομοιογενούς ράβδου μάζας M και μήκους L , ως προς άξονα κάθετο σε αυτή, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της.



Η ροπή αδράνειας I_K της ράβδου, υπολογίζεται από τη σχέση ορισμού της:

$$I_K = \sum_{j=1}^N m_j \cdot r_j^2$$

όπου η άθροιση πραγματοποιείται ως προς όλα τα σωματίδια της ράβδου. Δεδομένου ότι η ράβδος θεωρείται συνεχές, ομοιογενές σώμα, ο αναλυτικός υπολογισμός του αθροίσματος πραγματοποιείται με μετατροπή του σε ισοδύναμο ολοκλήρωμα. Ακολουθούμε τεχνική ανάλογη εκείνης που χρησιμοποιήσαμε στην εφαρμογή 3 του κεφαλαίου 2:

$$I_K = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot dm \quad (E1)$$

όπου:

$$dm = M \cdot \frac{dx}{L}$$

Αντικαθιστούμε το dm στην E1 και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα. Καταλήγουμε στη σχέση:

$$I_K = \frac{1}{12} \cdot M \cdot L^2 \quad (E2)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_1 = -\hat{x} \cdot \omega \cdot \sin(\theta) - \hat{y} \cdot \omega \cdot \cos(\theta) = -\omega \cdot \mathbf{e}_2 \quad (5)$$

και

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_2 = \hat{x} \cdot \omega \cdot \cos(\theta) - \hat{y} \cdot \omega \cdot \sin(\theta) = \omega \cdot \mathbf{e}_1 \quad (6)$$

Αφού κάναμε την επιλογή του στερεωμένου συστήματος στη ράβδο (A, x_1, x_2, x_3) και εκφράσαμε τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων του ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) , εξειδικεύουμε τις εξισώσεις 1 και 2, για την περίπτωση της διάταξής μας, σύμφωνα με το σχήμα 4.1α.

B) Εξειδίκευση της εξίσωσης 1.

Εκφράζουμε τα διανυσματικά μεγέθη που εμπλέκονται στην εξίσωση κίνησης 1, την τυχαία χρονική στιγμή t , ως προς το στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα (A, x_1, x_2, x_3) . Τα μεγέθη αυτά είναι οι εξωτερικές δυνάμεις και η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου:

Πάνω στη ράβδο δρουν οι δυνάμεις:

α) Η \vec{F} στο σημείο M (όπου $(AM)=s$): Σύμφωνα με τη διατύπωση του προβλήματος, η δύναμη \vec{F} είναι κάθετη στη ράβδο. Επομένως γράφεται:

$$\vec{F} = F \cdot \mathbf{e}_1 \quad (7)$$

β) Η αντίδραση του άξονα περιστροφής \vec{F}_A , στο A: Η αντίδραση του άξονα περιστροφής βρίσκεται πάνω στο επίπεδο Axy , αλλά έχει άγνωστη κατεύθυνση. Επομένως, γενικά γράφεται:

$$\vec{F}_A = F_{A1} \cdot \mathbf{e}_1 + F_{A2} \cdot \mathbf{e}_2 \quad (8)$$

όπου F_{A1} και F_{A2} οι αλγεβρικές τιμές των συνιστωσών της \vec{F}_A ως προς τους άξονες Ax_1 και Ax_2 .

Κατά την κίνηση της ράβδου, το μέτρο $(AK)=R$ του διανύσματος θέσης \overline{AK} του κέντρου μάζας K της ράβδου διατηρείται σταθερό, ως προς το σύστημα αξόνων (A, x_1, x_2, x_3) . Επομένως, το \overline{AK} γράφεται (σχήμα 4.1α):

$$\overline{AK} = R \cdot \mathbf{e}_2 \quad (9)$$

Η ταχύτητα \vec{V}_K του K ισούται με το ρυθμό μεταβολής του \overline{AK} . Σύμφωνα με την 9 και την 6, έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{V}_K &= \frac{d}{dt} \overline{AK} = \frac{d}{dt} (R \cdot \mathbf{e}_2) = \\ &= R \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{e}_2 = \omega \cdot R \cdot \mathbf{e}_1 \end{aligned} \quad (10)$$

Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της \vec{V}_K , υπολογίζεται από την παραγωγή της 10:

$$\frac{d}{dt} \vec{V}_K = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \mathbf{e}_1 + R \cdot \omega \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{e}_1$$

και χρησιμοποιώντας την 5:

$$\frac{d}{dt} \vec{V}_K = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \mathbf{e}_1 - R \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{e}_2 \quad (11)$$

Σύμφωνα με τις 7, 8 και 11, η γενική εξίσωση κίνησης 1 λαμβάνει τη μορφή:

$$M \cdot \left(R \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot \mathbf{e}_1 - R \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{e}_2 \right) = F \cdot \mathbf{e}_1 + F_{A1} \cdot \mathbf{e}_1 + F_{A2} \cdot \mathbf{e}_2$$

από την οποία προκύπτουν οι βαθμωτές εξισώσεις:

$$-M \cdot R \cdot \omega^2 = F_{A2} \quad (12)$$

$$M \cdot R \cdot \frac{d\omega}{dt} = F + F_{A1} \quad (13)$$

Οι 12 και 13 περιλαμβάνουν τρεις άγνωστες συναρτήσεις: Τις δύο συνιστώσες της δύναμης αντίδρασης του άξονα περιστροφής και τη γωνιακή ταχύτητα. Χρειαζόμαστε άλλη μια εξίσωση: θα προκύψει από την εξειδίκευση - εφαρμογή της εξίσωσης 2 στη διάταξη του σχήματος 4.1α.

Γ) Εξειδίκευση της εξίσωσης 2.

Υπολογίζουμε τη στροφορμή $\vec{J}_{(A)}$ της ράβδου, την τυχαία χρονική στιγμή t , ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) (εξίσωση 28 της ενότητας 1.3):

$$\vec{J}_{(A)} = M \cdot \overline{AK} \times \vec{V}_K + I_K \cdot \vec{\omega} \quad (14)$$

όπου:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \mathbf{e}_3 \quad (15)$$

είναι το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου, κάθετο στο επίπεδο κίνησής της. Το I_K συμβολίζει τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο Axy που διέρχεται από το κέντρο μάζας K της ράβδου.

Στην πρόταση 1.3.2, έχουμε δείξει ότι η ταχύτητα \vec{V}_K του K ως προς το (A, x, y, z) δίδεται από τη σχέση:

$$\vec{V}_K = \vec{\omega} \times \overline{AK} \quad (16)$$

οπότε, αντικαθιστώντας στη 14 βρίσκουμε ότι η στροφορμή της ράβδου ως προς το (A, x, y, z) , εκφράζεται με τη σχέση:

$$\vec{J}_{(A)} = (M \cdot R^2 + I_K) \cdot \vec{\omega} \quad (17)$$

Οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το (A, x, y, z) είναι:

α) Η ροπή της \vec{F}_A μηδενίζεται διότι το διάνυσμα θέσης του σημείου εφαρμογής της είναι ίσο με το μηδέν.

β) Η ροπή της \vec{F} είναι:

$$\begin{aligned} \vec{T}_F &= \overline{AM} \times \vec{F} = \mathbf{s} \cdot F \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{s} \cdot F \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (18)^1$$

Αντικαθιστούμε τη στροφορμή και τις ροπές των δυνάμεων στη γενική εξίσωση 2 και καταλήγουμε στην εξίσωση:

¹ Η σχέση $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3$, προκύπτει από την επιλογή του προσανατολισμού των αξόνων, που έχουμε κάνει στο σχήμα 4.1α. Με την επιλογή αυτή ισχύουν οι σχέσεις:
 $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$

$$(M \cdot R^2 + I_K) \cdot \frac{d\bar{\omega}}{dt} = s \cdot F \cdot e_3 \quad (19)$$

Δεδομένου ότι η κατεύθυνση του άξονα περιστροφής e_3 διατηρείται σταθερή (κάθετη στο επίπεδο Axy), ισχύει:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \cdot e_3) = \frac{d\omega}{dt} \cdot e_3$$

οπότε, η 19 μετασχηματίζεται στη:

$$(M \cdot R^2 + I_K) \cdot \frac{d\omega}{dt} = s \cdot F \quad (20)$$

Δ) Επίλυση των εξισώσεων 12, 13 και 20.

Η 20 περιέχει μόνη άγνωστη συνάρτηση την ω . Όπως φαίνεται από το σχήμα 4.1β, η δύναμη F μηδενίζεται για $t > \tau$. Οπότε, για $t > \tau$, το δεξί μέρος της 20 μηδενίζεται. Επομένως, μηδενίζεται και η παράγωγος $d\omega/dt$, που εμφανίζεται στο αριστερό μέρος της 20:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \text{ για } t > \tau \quad (21)$$

Από την 21 έπεται ότι η ράβδος, μετά τη δράση της F (για $t > \tau$), περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 .

Υπολογίζουμε την ω_0 με τη βοήθεια της εξίσωσης 20: Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέρη της με dt και ολοκληρώνουμε από τη χρονική στιγμή 0 έως μια τυχαία στιγμή t , μεγαλύτερη του τ . Έτσι, πετυχαίνουμε να εμφανιστεί στο δεξί μέρος της 20, η γνωστή μας ώθηση Ω_0 της δύναμης F . Δεδομένου ότι τη στιγμή 0 η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι μηδενική, έχουμε:

$$(M \cdot R^2 + I_K) \cdot \int_0^t d\omega = s \cdot \int_0^t F \cdot dt'$$

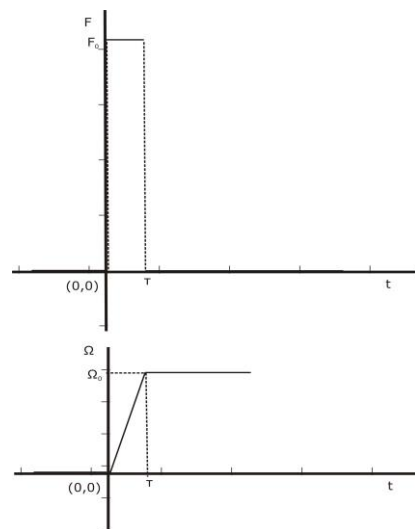
και τελικά:

$$\omega_0 = \frac{s \cdot \Omega_0}{M \cdot R^2 + I_K} \text{ για } t > \tau \quad (22a)$$

Στο χρονικό διάστημα $[0, \tau]$, η δύναμη F είναι σταθερή. Από την 20, προκύπτει ότι και η $d\omega/dt$ είναι σταθερή, με συνέπεια η γωνιακή ταχύτητα να μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο:

$$\omega = \frac{s \cdot F_0}{M \cdot R^2 + I_K} \cdot t \text{ για } t \leq \tau \quad (22\beta)$$

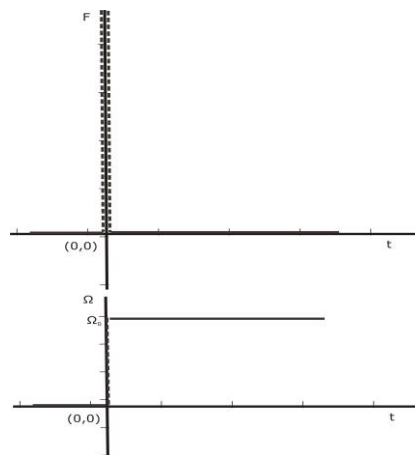
Υπολογίζουμε τις δύο συνιστώσες F_{A1} και F_{A2} της αντίδρασης \vec{F}_A του άξονα περιστροφής της ράβδου που εμπλέκονται στις εξισώσεις 12, 13 και 20. Από τη 12 και την 22 υπολογίζεται αμέσως η F_{A2} , για $t > \tau$. Η σχέση 12 δηλώνει ότι το κέντρο μάζας K της ράβδου κάνει κυκλική κίνηση και η απαιτούμενη κεντρομόλος δύναμη είναι ίση με $M \cdot R \cdot \omega^2$, όπου M η μάζα της ράβδου:



Σχήμα 4.1β: Στο πολύ μικρό χρονικό διάστημα $[0, \tau]$, το μέτρο της F είναι σταθερό (F_0) και πολύ μεγάλο. Για χρονικές στιγμές εκτός του διαστήματος $[0, \tau]$, η δύναμη είναι μηδενική. Η ώθηση της F σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα της μορφής $[0, t]$, με $t > \tau$, είναι σταθερή και ίση με το εμβαδόν $\Omega_0 = F_0 \cdot \tau$ του χωρίου που ορίζει το γράφημα της F με τον οριζόντιο άξονα. Ισχύει:

$$\Omega_{0 \rightarrow t} = \int_0^t F(t') \cdot dt' = \begin{cases} F_0 \cdot t & \text{για } 0 \leq t \leq \tau \\ F_0 \cdot \tau & \text{για } t > \tau \end{cases}$$

Όταν $\tau \rightarrow 0$ και $F_0 \rightarrow \infty$, ενώ το Ω_0 διατηρείται σταθερό, τότε τα γραφήματα παίρνουν τις οριακές μορφές:



$$F_{A2} = \begin{cases} -M \cdot R \cdot \left(\frac{s \cdot F_0}{M \cdot R^2 + I_K} \right)^2 \cdot t^2 & \text{για } 0 \leq t \leq \tau \\ -M \cdot R \cdot \left(\frac{s \cdot \Omega_0}{M \cdot R^2 + I_K} \right)^2 & \text{για } t > \tau \end{cases} \quad (23)$$

Για να υπολογίσουμε την F_{A1} , απαλείφουμε το $d\omega/dt$ από τις σχέσεις 13 και 20, διαιρώντας τις κατά μέλη. Καταλήγουμε στη σχέση:

$$F_{A1} = F \cdot \left(\frac{M \cdot R \cdot s}{M \cdot R^2 + I_K} - 1 \right) \quad \text{για κάθε } t: t > 0 \quad (24)$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, η F_{A1} , η οποία είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο (σχήμα 4.1α), είναι μη μηδενική, όταν η F είναι μη μηδενική. Παρουσιάζεται εδώ ένα πρόσθετο ενδιαφέρον: Από τη σχέση 24 φαίνεται ότι η F_{A1} μπορεί να είναι μηδενική, ανεξαρτήτως της τιμής της F , αρκεί να επιλεγεί κατάλληλα το σημείο δράσης της \vec{F} ! Το κατάλληλο σημείο εφαρμογής της \vec{F} -αν υπάρχει- προσδιορίζεται από το μηδενισμό της παράστασης που βρίσκεται μέσα στην παρένθεση, στο δεξί μέρος της 24². Η τιμή s' του s που τη μηδενίζει την F_{A1} είναι:

$$s' = \frac{M \cdot R^2 + I_K}{M \cdot R} \quad (25)$$

Στο ένθετο «4.1.1 Υπολογισμός της ροπής αδράνειας...», βρήκαμε ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου είναι:

$$I_K = \frac{1}{12} \cdot M \cdot L^2$$

οπότε, από την 25 βρίσκουμε ότι:

$$s' = \frac{13}{12} \cdot R \quad (26)$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι $0 < s' < R + L/2$, δηλαδή το σημείο M' που αντιστοιχεί στη θέση s' είναι ένα σημείο της ράβδου. Αν κτυπήσουμε τη ράβδο στο σημείο αυτό η συνιστώσα της αντίδρασης του άξονα περιστροφής, η κάθετη στη ράβδο θα είναι ίση με το μηδέν, ανεξαρτήτως της βιαιότητας του κτυπήματος!

Εφαρμογή 2: Κίνηση ράβδου σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Λεπτή ομοιογενής ράβδος τετραγωνικής διατομής, μήκους L και μάζας M μπορεί να κινείται με αμελητέες τριβές πάνω στο οριζόντιο επίπεδο Axy , αδρανειακού συστήματος (A, x, y, z) . Τη χρονική στιγμή $t=0$, η ράβδος ηρεμεί πάνω στον άξονα Ay του επιπέδου Axy , όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2α. Τη χρονική στιγμή $t=0$, και για πολύ μικρό χρόνο τ ($\tau \rightarrow 0$) ασκείται κάθετα στη ράβδο, σε σημείο της που απέχει από το κέντρο μάζας της K απόσταση R , ισχυρή δύναμη F , της οποίας το μέτρο δίνεται από τη συνάρτηση:

$$F = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \tau \leq t \end{cases}$$

Η ώθηση $\Omega_{0 \rightarrow \tau} = \Omega_0$, της F έχει πεπερασμένη τιμή και είναι δεδομένη.

² Μια παρόμοια ανάλυση του φαινομένου αυτού, στο πλαίσιο της μελέτης της κίνησης του φυσικού εκκρεμούς, υπάρχει στο βιβλίο: Theoretical Mechanics of Particles and Continua, A.L.Fetter, J.D.Walecka, Dover eds 2003. pages 144-48.

Να υπολογιστούν: α) Η ταχύτητα που αποκτά το κέντρο μάζας της ράβδου. β) Η γωνιακή ταχύτητα ω_0 , που αποκτά η ράβδος.

Λύση

A) Γενικές σκέψεις.

Η κίνηση του κέντρου μάζας K της ράβδου ως προς το αδρανειακό σύστημα (A,x,y,z) (σχήμα 4.2α) περιγράφεται από την εξίσωση:

$$M \cdot \frac{d\vec{V}_K}{dt} = \sum \vec{F} \quad (1)$$

Η περιστροφή της ράβδου περιγράφεται από την εξίσωση (εξίσωση 21 της παραγράφου 1.3B):

$$\frac{d\vec{j}_{(K)}}{dt} = \vec{\tau}_K \quad (2)$$

όπου:

$\vec{j}_K = I_K \cdot \vec{\omega}$ η στροφορμή της ράβδου και $\vec{\tau}_K$ η ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ενεργούν σε αυτήν, ως προς το στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα (K,x₁,x₂,x₃). Οι άξονες Kx₁, Kx₂ και Kx₃ είναι στερεωμένοι στη ράβδο (σχήμα 4.2α). Ο Kx₃ είναι παράλληλος με τον Oz, κάθετος στο επίπεδο κίνησης της ράβδου.

$I_K = \frac{1}{12} \cdot M \cdot L^2$ είναι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της (ένθετο 4.1.1).

Η θέση της ράβδου κάθε χρονική στιγμή t, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A,x,y,z) προσδιορίζεται από τη θέση και την ταχύτητα του κέντρου μάζας της K και τη γωνία θ που σχηματίζει το στερεωμένο στη ράβδο σύστημα αξόνων (K,x₁,x₂), ως προς τους άξονες (A,x,y). Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2α, τα μοναδιαία διανύσματα e₁ και e₂ των αξόνων Ax₁ και Ax₂, και τα \hat{x} και \hat{y} των αξόνων Ax, Ay ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$e_1 = \hat{x} \cdot \cos(\theta) - \hat{y} \cdot \sin(\theta) \quad (3)$$

$$e_2 = \hat{x} \cdot \sin(\theta) + \hat{y} \cdot \cos(\theta) \quad (4)$$

και οι ρυθμοί μεταβολής τους:

$$\frac{d}{dt} e_1 = -\hat{x} \cdot \omega \cdot \sin(\theta) - \hat{y} \cdot \omega \cdot \cos(\theta) = -\omega \cdot e_2 \quad (5)$$

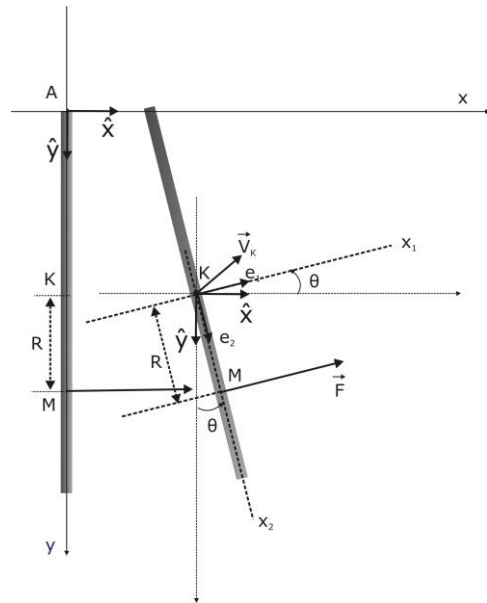
και

$$\frac{d}{dt} e_2 = \hat{x} \cdot \omega \cdot \cos(\theta) - \hat{y} \cdot \omega \cdot \sin(\theta) = \omega \cdot e_1 \quad (6)$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου: $\omega = d\theta/dt$.

Με βάση το σχήμα 4.2α και τις σχέσεις 3 έως 6 εξειδικεύουμε τις εξισώσεις 1 και 2 για την περίπτωση της κίνησης της ράβδου που μελετάμε.

B) Εξειδίκευση της εξίσωσης 1.



Σχήμα 4.2α: Η ράβδος κινείται χωρίς τριβές πάνω στο οριζόντιο επίπεδο Axγ. Οι άξονες Kx₁, Kx₂ είναι στερεωμένοι στη ράβδο. Κάθετα στη ράβδο, στο σημείο της M, ενεργεί για απειροστό χρονικό διάστημα [0,τ] ισχυρή δύναμη F, της οποίας η ώθηση στο διάστημα [0,τ] είναι πεπερασμένη και ίση με Ω₀.

Εκφράζουμε τα διανυσματικά μεγέθη που εμπλέκονται στην εξίσωση κίνησης 1, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) . Αντίθετα με την εφαρμογή 1 το κέντρο μάζας K της ράβδου δεν απέχει σταθερή απόσταση από την αρχή A του (A, x, y, z) . Οι συνιστώσες V_{Kx} , V_{Ky} της ταχύτητας \vec{V}_K του K ως προς τους άξονες Ax , Ay , είναι άγνωστες συναρτήσεις του χρόνου που πρέπει να προσδιορίσουμε. Γράφουμε:

$$\vec{V}_K = V_{Kx} \cdot \hat{x} + V_{Ky} \cdot \hat{y} \quad (7)$$

Η μοναδική δύναμη που δρα στη ράβδο είναι η \vec{F} . Η \vec{F} είναι κάθετη στη ράβδο, οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{F} = F \cdot \mathbf{e}_1 = F \cdot \cos(\theta) \cdot \hat{x} - F \cdot \sin(\theta) \cdot \hat{y} \quad (8)$$

Αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις \vec{V}_K και \vec{F} στην 1 και καταλήγουμε στο σύστημα των βαθμωτών εξισώσεων:

$$M \cdot \frac{dV_{Kx}}{dt} = F \cdot \cos(\theta) \quad (9)$$

$$M \cdot \frac{dV_{Ky}}{dt} = -F \cdot \sin(\theta) \quad (10)$$

Οι 9 και 10 περιέχουν τρεις άγνωστες συναρτήσεις του χρόνου: τις θ , V_{Kx} , V_{Ky} . Χρειαζόμαστε ακόμα μια εξίσωση: θα προκύψει από την εξίσωση 2.

Γ) Εξειδίκευση της εξίσωσης 2.

Η περιστροφική κίνηση της ράβδου περιγράφεται με την εξίσωση 2. Η ροπή \vec{T}_K της μοναδικής δύναμης \vec{F} που ενεργεί στη ράβδο, ως προς το στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα (K, x_1, x_2, x_3) , δίνεται από τη σχέση (σχήμα 4.2a):

$$\vec{T}_K = \overline{KM} \times \vec{F} = R \cdot F \cdot \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = R \cdot F \cdot \hat{z}$$

οπότε, η εξίσωση 2 λαμβάνει τη μορφή:

$$I_K \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot F \quad (11)$$

Δ) Επίλυση των εξισώσεων 9, 10 και 11.

Για $t > \tau$, το δεξί μέρος της 11 μηδενίζεται, οπότε ισχύει $d\omega/dt=0$, που συνεπάγεται ότι η ω διατηρείται σταθερή. Η σταθερή τιμή ω_0 της ω , για $t > \tau$ είναι ίση με την τιμή που έχει τη στιγμή τ που παύει η δράση της εξωτερικής δύναμης \vec{F} .

Όπως στην εφαρμογή 1, η 11 ολοκληρώνεται από 0 έως t , όπου $t > \tau$ και προκύπτει η σχέση:

$$\omega_0 = \frac{R}{I_K} \cdot \int_0^t F(t') \cdot dt' = \frac{R \cdot \Omega_0}{I_K} \quad (12)$$

Πόσο έχει στραφεί η ράβδος ως προς την αρχική θέση της τη στιγμή τ που παύει η δράση της \vec{F} ;

Η μεταβολή της γωνίας θ που σχηματίζει ο στερεωμένος στη ράβδο άξονας Kx_2 με τον άξονα Ay του αδρανειακού συστήματος (A, x, y, z) (σχήμα 4.2a), κατά τη δράση της δύναμης \vec{F} στο χρονικό διάστημα $[0, \tau]$, υπολογίζεται από τη σχέση $d\theta/dt = \omega$.

Στο διάστημα $[0, \tau]$, η δύναμη \vec{F} έχει σταθερό μέτρο F_0 , οπότε, από τη σχέση 11 και με δεδομένο ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ η ράβδος ηρεμεί κατά μήκος του άξονα Ay ($\omega(0)=0$ και $\theta(0)=0$), προκύπτει ότι:

α) Η γωνιακή ταχύτητα είναι μια γραμμική συνάρτηση του χρόνου t ($t \in [0, \tau]$):

$$\omega = \frac{R \cdot F_0}{I_K} \cdot t \quad (13)$$

β) Η γωνία θ τη χρονική στιγμή t , για $t \in [0, \tau]$, υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^t \omega \cdot dt' = \int_0^t \frac{R \cdot F_0}{I_K} \cdot t' \cdot dt' = \\ &= \frac{R \cdot F_0}{2 \cdot I_K} \cdot t^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Για $t=\tau$, και δεδομένου ότι $\Omega_0 = F_0 \cdot \tau$, από τη 14, βρίσκουμε ότι η ζητούμενη γωνία θ_0 είναι:

$$\theta_0 = \frac{R \cdot \Omega_0}{2 \cdot I_K} \cdot \tau \quad (15)$$

Στη σχέση 15, οι ποσότητες R , Ω_0 και I_K είναι πεπερασμένες, ενώ το τ είναι απειροστό. Συμπεραίνουμε ότι η γωνία στροφής της ράβδου τη στιγμή τ που παύει η δράση της \vec{F} , είναι απειροστή και ανάλογη του τ .

Βρήκαμε ότι μετά τη δράση της \vec{F} η ράβδος περιστρέφεται ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 , που υπολογίζεται από τη σχέση 12. Επανερχόμαστε τώρα στις εξισώσεις 9 και 10, για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας του κέντρου μάζας K της ράβδου, μετά τη δράση της \vec{F} (για $t > \tau$).

Για $t > \tau$, τα δεξιά μέρη των εξισώσεων 9 και 10 μηδενίζονται (αφού $F(t)=0$ για $t > \tau$). Οι παράγωγοι dV_{Kx}/dt και dV_{Ky}/dt μηδενίζονται και επομένως, οι συνιστώσες V_{Kx} , V_{Ky} της ταχύτητας \vec{V}_K είναι σταθερές. Οι σταθερές τιμές τους είναι ίσες με τις τιμές που απέκτησαν τη στιγμή τ , που έπαυσε η δράση της εξωτερικής δύναμης \vec{F} . Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τις τιμές V_{Kx0} , V_{Ky0} των συνιστωσών της \vec{V}_K τη στιγμή τ . Από την εξίσωση 9, έχουμε:

$$V_{Kx0} = \frac{1}{M} \cdot \int_{t=0}^{\tau} F \cdot \cos(\theta) \cdot dt' \quad (16)$$

η γωνία θ , στο ολοκλήρωμα, μεταβάλλεται από 0 έως $\theta_0 = \frac{R \cdot \Omega_0}{2 \cdot I_K} \cdot \tau$. Στο διάστημα αυτό, το συνημίτονο είναι φθίνουσα συνάρτηση. Ισχύει:

$$1 = \cos(0) \geq \cos(\theta) \geq \cos(\theta_0) \quad (17)$$

Δεδομένου ότι η γωνία θ_0 είναι απειροστή, το $\cos(\theta_0)$, σε πρώτη προσέγγιση είναι ίσο με τη μονάδα και σύμφωνα με τη 17, το ίδιο συμβαίνει με το $\cos(\theta)$ για $0 \leq \theta \leq \frac{R \cdot \Omega_0}{2 \cdot I_K} \cdot \tau$.

Έτσι η V_{Kx0} στη σχέση 16, προσεγγίζεται με τη:

$$V_{Kx0} = \frac{1}{M} \cdot \int_{t=0}^{\tau} F \cdot dt' = \frac{\Omega_0}{M} \quad (18)$$

Για τον υπολογισμό της V_{Ky0} , από την εξίσωση 10, σκεφτόμαστε με ανάλογο τρόπο:

$$V_{Ky0} = \frac{1}{M} \cdot \int_{t=0}^{\tau} F \cdot \sin(\theta) \cdot dt' \quad (19)$$

όπου $\theta = \frac{R \cdot F_0}{2 \cdot I_K} \cdot t'^2$, όπου $0 \leq t' \leq \tau$.

Για απειροστές γωνίες, ισχύει η προσέγγιση:

$$\sin(\theta) \approx \theta = \frac{R \cdot F_0}{2 \cdot I_K} \cdot t'^2$$

οπότε η 19 προσεγγίζεται με τη:

$$\begin{aligned} V_{Ky0} &\approx \frac{1}{M} \cdot \int_{t=0}^{t=\tau} F_0 \cdot \frac{R \cdot F_0}{2 \cdot I_K} \cdot t'^2 \cdot dt' = \\ &= \frac{R \cdot F_0^2}{6 \cdot M \cdot I_K} \cdot \tau^3 = \frac{R \cdot \Omega_0^2}{6 \cdot M \cdot I_K} \cdot \tau \end{aligned} \quad (20)$$

Η y συνιστώσα της ταχύτητας του κέντρου μάζας K της ράβδου είναι απειροστή και τείνει στο μηδέν όταν το τ τείνει στο μηδέν.

Συμπέρασμα: Όταν ο χρόνος δράσης της δύναμης \vec{F} τείνει στο μηδέν, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) η ράβδος αποκτά σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0 που υπολογίζεται από τη σχέση 12 και το κέντρο μάζας της κινείται με σταθερή ταχύτητα, της οποίας οι συνιστώσες υπολογίζονται από τις σχέσεις 18 και 20.

Εφαρμογή 3: Πλαστική κρούση σημειακού σωματιδίου με ράβδο στρεπτή γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, σε κατακόρυφο επίπεδο.

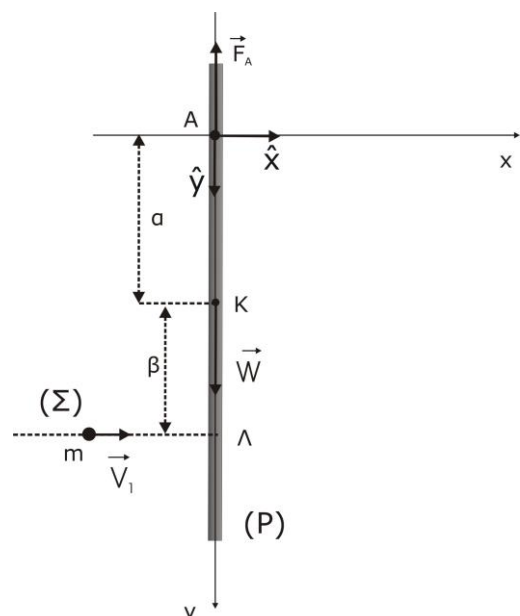
Ομοιογενής ράβδος μάζας M και μήκους L , μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο Axy αδρανειακού συστήματος (A, x, y, z) , γύρω από το σταθερό οριζόντιο άξονα Az . Η απόσταση (AK) του άξονα περιστροφής από το κέντρο μάζας της ράβδου είναι a (σχήμα 4.3a). Σωματίδιο Σ μάζας m κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα μέτρου V_1 και προσκρούει κάθετα στη ράβδο, σε σημείο της Λ , όπου $(K\Lambda) = \beta$. Η κρούση είναι πλαστική. Υπολογίστε: α) Τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου λίγο μετά την κρούση. β) Την ταχύτητα του σωματιδίου και του κέντρου μάζας της ράβδου αμέσως μετά την κρούση, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) . γ) Την ελάχιστη τιμή του μέτρου της αρχικής ταχύτητας V_1 του σωματιδίου, ώστε το συσσωμάτωμα ράβδου-σωματιδίου να διέλθει από την κατακόρυφη θέση. δ) Τη μέγιστη γωνία που θα σχηματίσει η ράβδος με την κατακόρυφη, αν η αρχική ταχύτητα του Σ έχει μέτρο μικρότερο από την οριακή τιμή που υπολογίστηκε στο ερώτημα γ.

Η ράβδος πριν από την κρούση ηρεμεί στην κατακόρυφη θέση. Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g . Οι τριβές είναι αμελητέες.

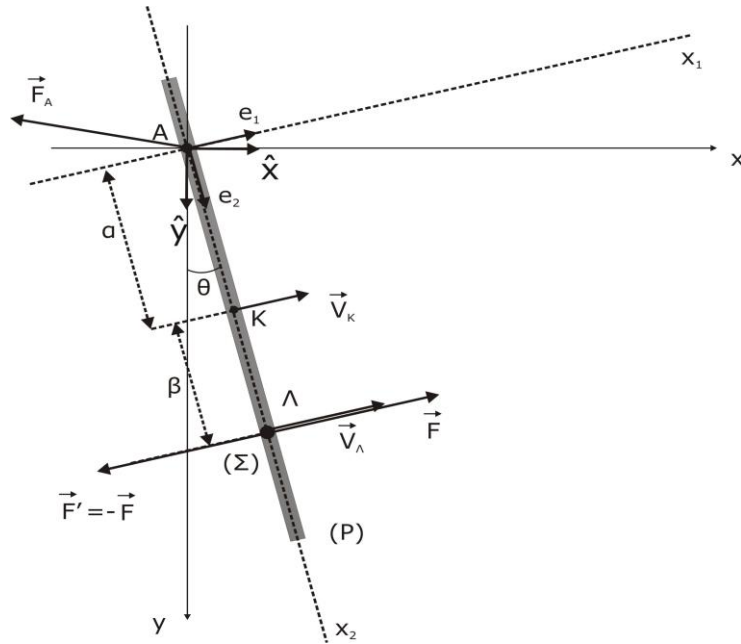
Λύση

A) Γενικές σκέψεις.

Το σύστημα σωματιδίου - ράβδου δεν είναι απομονωμένο. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος δεν διατηρείται, γιατί η κρούση είναι πλαστική. Επιπλέον, στο σύστημα ενεργούν εξωτερικές δυνάμεις: Η αντίδραση



Σχήμα 4.3a: Το σωματίδιο Σ προσκρούει στο σημείο Λ της ράβδου. Ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) , στο χρονικό διάστημα $[0, \tau]$, που διαρκεί η κρούση, η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.



Σχήμα 4.3β: Στο διάστημα $[0, \tau]$, που διαρκεί η κρούση, το σωματίδιο Σ και η ράβδος P , αλληλεπιδρούν με ισχυρές δυνάμεις δράσης-αντίδρασης. Για $\tau \rightarrow 0$, στο διάστημα $[0, \tau]$, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) , η στροφορμή του συστήματος ράβδου-σώματος διατηρείται σταθερή.

του άξονα περιστροφής και τα βάρη των σωμάτων, με συνέπεια να μην ισχύει ούτε η διατήρηση της ορμής, ούτε της στροφορμής.

Ωστόσο, μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες σκέψεις:

Αν επιλέξουμε το (A, x, y, z) ως το αδρανειακό σύστημα, ως προς το οποίο θα μελετήσουμε τις κινήσεις των σωμάτων του συστήματος η ροπή της αντίδρασης του άξονα περιστροφής μηδενίζεται. Όσον αφορά στις ροπές των βαρών των σωμάτων σε σχέση με τις ροπές των δυνάμεων αλληλεπίδρασης κατά την κρούση: Το διάστημα τ που διαρκεί η αλληλεπίδραση των δύο σωμάτων, είναι απειροστό. Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης είναι πολύ ισχυρές σε σχέση με τα βάρη, ώστε στον απειροστό χρόνο τ να ασκούν σε κάθε σώμα πεπερασμένη ώθηση. Στον ίδιο χρόνο τ , οι ωθήσεις των βαρών των σωμάτων είναι απειροστές (ανάλογες του τ). Γράφουμε τις εξισώσεις περιστροφής των σωμάτων του συστήματος ράβδου (P) και σωματιδίου (Σ), στο χρονικό διάστημα $[0, \tau]$, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) :

$$\frac{d\vec{J}_p(t)}{dt} = \overline{A\Lambda} \times \vec{F} + \overline{AK} \times \vec{W}_p$$

$$\frac{d\vec{J}_\Sigma(t)}{dt} = -\overline{A\Lambda} \times \vec{F} + \overline{A\Lambda} \times \vec{W}_\Sigma$$

Από τις εξισώσεις αυτές, προκύπτει ότι η μεταβολή της στροφορμής της ράβδου και του σωματιδίου από τη στιγμή $t=0$ έως την $t=\tau$, σε προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς τ , δίνονται από τις σχέσεις:

$$\Delta \vec{J}_p = \overline{A\Lambda} \times \int_0^\tau \vec{F}(t') \cdot dt' + \overline{AK} \times \vec{W}_p \cdot \tau \quad (1)$$

$$\Delta \vec{J}_\Sigma = -\overline{A\Lambda} \times \int_0^\tau \vec{F}(t') \cdot dt' + \overline{A\Lambda} \times \vec{W}_\Sigma \cdot \tau \quad (2)$$

Για $\tau \rightarrow 0$, παραλείπουμε τους απειροστούς όρους, αθροίζουμε τις 1 και 2 κατά μέρη και καταλήγουμε ότι:

$$\Delta(\vec{J}_p + \vec{J}_z) = 0 \quad (3)$$

Όπου το σύμβολο Δ παριστάνει τη μεταβολή των αντίστοιχων μεγεθών από τη στιγμή $t=0$ που αρχίζει η κρούση, έως τη στιγμή $t=\tau$ που οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μηδενίζονται.

Από την 3 συνεπάγεται ότι σε προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς την απειροστή ποσότητα τ , η στροφορμή του συστήματος ράβδου-σωματιδίου διατηρείται σταθερή κατά τη διάρκεια της κρούσης -στο χρονικό διάστημα $[0, \tau]$ - ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) .

B) Εφαρμογή της εξίσωσης 3.

Υπολογίζουμε τη στροφορμή του συστήματος ακριβώς τη στιγμή $t=0$, που αρχίζει η κρούση και τη στιγμή $t=\tau$, που οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης έχουν μηδενιστεί. Σύμφωνα με την 3, ισχύει:

$$(\vec{J}_p + \vec{J}_z)|_{t=0} = (\vec{J}_p + \vec{J}_z)|_{t=\tau} \quad (4)$$

Με τη βοήθεια των σχημάτων 4.3α και β, έχουμε:

$$\vec{J}_p(0) = 0$$

$$\vec{J}_z(0) = m \cdot \overline{AL} \times \vec{V}_1 = m \cdot (a + \beta) \cdot V_1 \cdot \hat{z}$$

και

$$\vec{J}_p(\tau) = M \cdot \overline{AK} \times \vec{V}_K + I_K \cdot \vec{\omega} = (M \cdot a \cdot V_K + I_K \cdot \omega) \cdot \hat{z}$$

$$\vec{J}_z(\tau) = m \cdot \overline{AL} \times \vec{V}_2 = m \cdot (a + \beta) \cdot V_2 \cdot \hat{z}$$

όπου \vec{V}_K η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου τη στιγμή τ -αμέσως μετά την κρούση- ω η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου και \vec{V}_2 η ταχύτητα του σωματιδίου την ίδια χρονική στιγμή (τ).

Αντικαθιστούμε στην 4 τις τιμές των $\vec{J}_p(0)$, $\vec{J}_z(0)$, $\vec{J}_p(\tau)$, $\vec{J}_z(\tau)$ και έχουμε:

$$M \cdot a \cdot V_K + I_K \cdot \omega + m \cdot (a + \beta) \cdot V_2 = m \cdot (a + \beta) \cdot V_1 \quad (5)$$

Γ) Κίνηση της ράβδου και του σωματιδίου μετά την κρούση.

Μετά την κρούση, η ράβδος και το σωματίδιο Σ κινούνται ως ένα ενιαίο άκαμπτο σώμα (συσσωμάτωμα). Το κέντρο μάζας K της ράβδου και το σημείο Λ όπου σφηνώθηκε το Σ είναι σταθερά σημεία του συσσωματώματος. Επομένως οι ταχύτητές τους υπολογίζονται σε συνάρτηση με τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του συσσωματώματος (ενότητα 1.2). Τη χρονική στιγμή $t=\tau$, οι ταχύτητες του K και του Λ ως προς το (A, x, y, z) είναι οι \vec{V}_K και \vec{V}_2 , αντίστοιχα. Την ίδια χρονική στιγμή, η γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος έχει μέτρο ω_0 . Με τη βοήθεια των σχημάτων 4.3α και β, γράφουμε:

$$\vec{V}_K = \vec{\omega} \times \overline{AK}$$

$$\vec{V}_K = \omega_0 \cdot a \quad (6)$$

και

$$\begin{aligned}\vec{V}_\Lambda &= \vec{\omega} \times \overline{A\Lambda} \\ V_2 &= \omega_0 \cdot (a + \beta)\end{aligned}\quad (7)$$

Συνδυάζουμε τις εξισώσεις 5, 6, 7 και καταλήγουμε στη:

$$\omega_0 = m \cdot (a + \beta) \cdot V_1 / (M \cdot a^2 + I_K + m \cdot (a + \beta)^2) \quad (8)$$

Από τις σχέσεις 6, 7 και 8 μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση (τη χρονική στιγμή τ), καθώς και τις ταχύτητες των σημείων του K και Λ.

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται ως ένα ενιαίο άκαμπτο σώμα, πάνω στο οποίο ενεργεί η συντηρητική δύναμη του βάρους του και η αντίδραση του σταθερού άξονα περιστροφής, στο A. Η τελευταία δεν παράγει έργο, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) , επομένως η μηχανική ενέργεια του συσσωματώματος κατά την κίνησή του διατηρείται σταθερή. Υπολογίζουμε την κινητική ενέργεια T και τη δυναμική ενέργεια U του συσσωματώματος ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) (ενότητα 3.1):

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^N m_j \cdot v_j^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_\Lambda^2 \quad (9)$$

όπου $\vec{v}_j = \vec{\omega} \times \vec{r}_j$ η ταχύτητα του j-σωματιδίου της ράβδου ως προς το (A, x, y, z) και \vec{r}_j το διάνυσμα θέσης του (με αρχή το A). Μετά από μερικές πράξεις, η 9 γράφεται:

$$T = \frac{1}{2} \cdot I_\sigma \cdot \omega^2 \quad (10)$$

όπου $I_\sigma \equiv I_K + M \cdot a^2 + m \cdot (a + \beta)^2$ είναι η ροπή αδράνειας του συσσωματώματος ως προς τον άξονα περιστροφής Az.

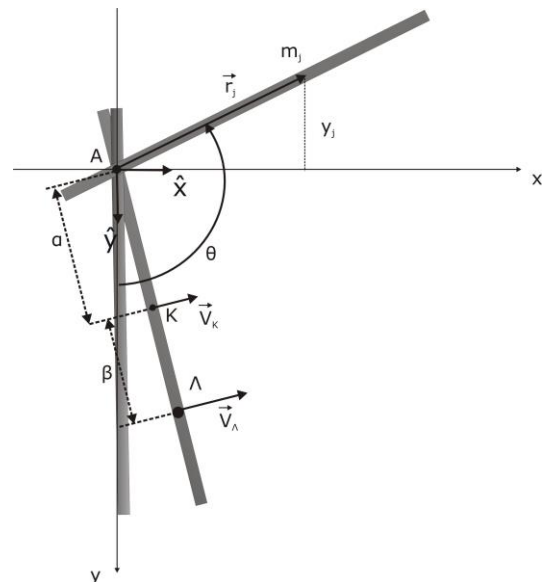
Η δυναμική ενέργεια λόγω του βάρους, με σημείο αναφοράς το A, υπολογίζεται από τις σχέσεις (σχήμα 4.3γ):

$$\begin{aligned}U &= -\sum_{j=1}^N m_j \cdot g \cdot y_j - m \cdot g \cdot y_\Lambda = \\ &= -M \cdot g \cdot y_K - m \cdot g \cdot y_\Lambda = \\ &= -(M \cdot a + m \cdot (a + \beta)) \cdot g \cdot \cos(\theta)\end{aligned}\quad (11)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, μεταξύ της αρχικής θέσης του συσσωματώματος (τη στιγμή $t=\tau$) και μιας άλλης, τυχαίας θέσης, όπου η ράβδος σχηματίζει με τον άξονα Ay, γωνία θ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot I_\sigma \cdot \omega_0^2 - (M \cdot a + m \cdot (a + \beta)) \cdot g &= \\ = \frac{1}{2} \cdot I_\sigma \cdot \omega^2 - (M \cdot a + m \cdot (a + \beta)) \cdot g \cdot \cos(\theta)\end{aligned}\quad (12)$$

Για να διέλθει το συσσωμάτωμα από την κατακόρυφη θέση, πρέπει η εξίσωση 12 (με άγνωστο το ω_0) να έχει λύση για $\theta = \pi$ rad. Μπορεί να διαπιστώσει κανείς εύκολα ότι αυτό συμβαίνει εφόσον ικανοποιείται η συνθήκη:



Σχήμα 4.3γ: Μετά την κρούση, η ράβδος και το σωματίδιο κινούνται ως συσσωμάτωμα. Από τη στιγμή τ και μετά, η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

$$\frac{1}{2} \cdot I_{\sigma} \cdot \omega_0^2 - (M \cdot a + m \cdot (a + \beta)) \cdot g \geq 0 \quad (13)$$

Από τη συνθήκη αυτή, σε συνδυασμό με τη σχέση 8, βρίσκουμε ότι η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου πρέπει να ικανοποιεί τη:

$$V_1 \geq \sqrt{2 \cdot (M \cdot a + m \cdot (a + \beta)) \cdot g \cdot I_{\sigma} / (m \cdot (a + \beta))^2} \quad (14)$$

Αν η αρχική ταχύτητα του Σ είναι μικρότερη από την οριακή τιμή που προβλέπεται από τη 14, τότε η μέγιστη απόκλιση του συσσωματώματος από τον άξονα Ay , υπολογίζεται από τη 12, θέτοντας $\omega=0$:

$$\begin{aligned} (M \cdot a + m \cdot (a + \beta)) \cdot g \cdot \cos(\theta) = \\ -\frac{1}{2} \cdot I_{\sigma} \cdot \omega_0^2 + (M \cdot a + m \cdot (a + \beta)) \cdot g \end{aligned} \quad (15)$$

Εφαρμογή 4: Πλαστική κρούση σημειακού σωματιδίου με ράβδο, που μπορεί να κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Ομοιογενής ράβδος Σ , μάζας M και μήκους L , μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω στο οριζόντιο επίπεδο Axy αδρανειακού συστήματος (A, x, y, z) . Σωματίδιο σ μάζας m κινείται πάνω στο επίπεδο Axy , με σταθερή ταχύτητα μέτρου v και προσκρούει κάθετα στη ράβδο, στο σημείο της Λ που απέχει απόσταση a από το κέντρο μάζας της K (σχήμα 4.4α). Μετά την κρούση, το σ ενσωματώνεται στη ράβδο, στο σημείο της Λ . Ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) , υπολογίστε: α) Τη γωνιακή ταχύτητα ω της ράβδου μετά την κρούση. β) Την ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου μετά την κρούση. γ) Ποιο σημείο της ράβδου κινείται με σταθερή ταχύτητα, μετά την κρούση;

Πριν από την κρούση, η ράβδος ηρεμεί πάνω στον άξονα Ay , με το κέντρο μάζας της K να ταυτίζεται με το A .

Λύση

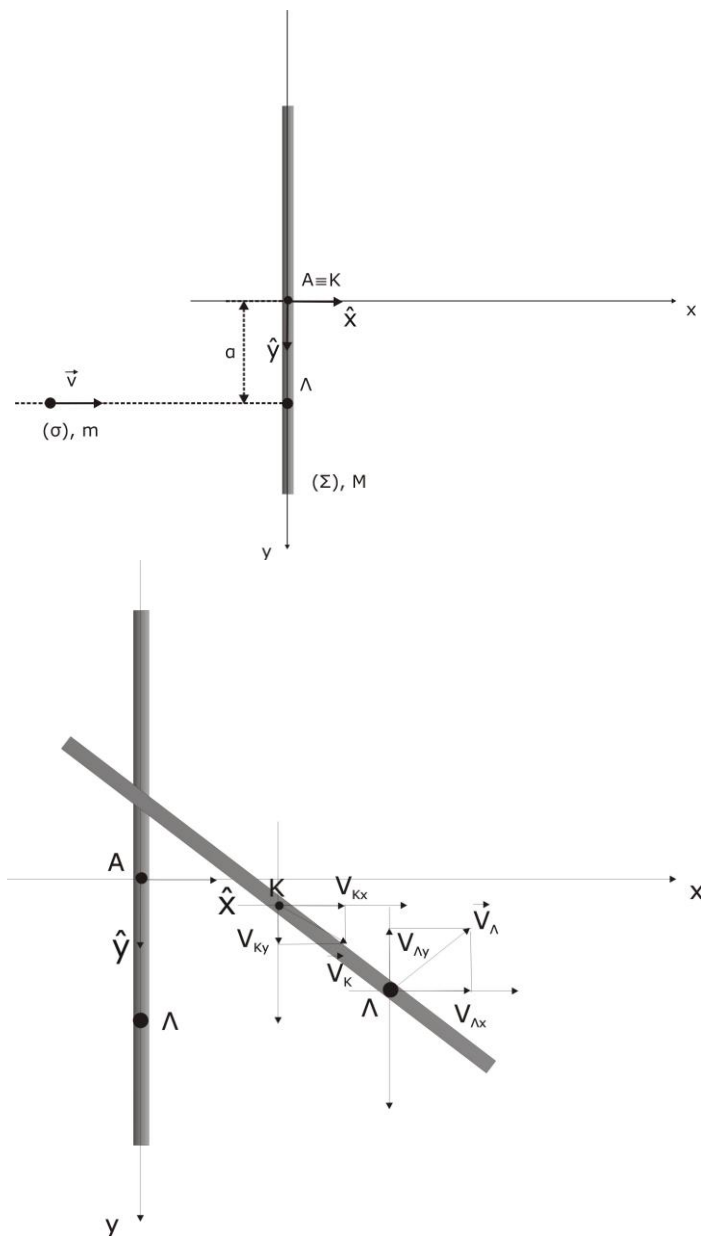
A) Γενικές σκέψεις.

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο και στη ράβδο (βάρους και κάθετη αντίδραση της οριζόντιας επιφάνειας) έχουν μηδενικές συνισταμένες και μηδενικές ροπές. Το σύστημα σωματιδίου - ράβδου είναι απομονωμένο. Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης της ράβδου με το σωματίδιο κατά την κρούση, αλλά και μετά από αυτή, είναι Νευτωνικού τύπου (δράσης-αντίδρασης), με συνέπεια η ολική ορμή, καθώς και η ολική στροφορμή του συστήματος να διατηρούνται σταθερές. Ωστόσο, λόγω της πλαστικότητας της κρούσης, η μηχανική ενέργεια του συστήματος δεν διατηρείται κατά την κρούση.

Μετά την κρούση, το σωματίδιο σ είναι ενσωματωμένο στη ράβδο Σ . Επομένως, η ταχύτητά του ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) προσδιορίζεται από τη σχέση 19 της παραγράφου 1.2Α:

$$\vec{v}_j = \frac{d\vec{R}_{\sigma}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_j$$

όπου \vec{r}'_j , $j=1,2,\dots$ συμβολίζει τη θέση οποιουδήποτε σημείου του άκαμπτου σώματος Σ ως προς σύστημα αξόνων (O', x', y', z') στερεωμένο στο σώμα και $\vec{\omega}$ τη γωνιακή ταχύτητα του Σ ως προς οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Κατά την κίνηση του συστήματος μετά την κρούση, το σωματίδιο και η ράβδος εξακολουθούν να αλληλεπιδρούν, με συνέπεια τόσο το κέντρο μάζας της ράβδου, όσο και το σωματίδιο να έχουν ταχύτητες που γενικά μεταβάλλονται ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) (σχήμα 4.4β).



Σχήμα 4.4α: Το σωματίδιο σ προσπίπτει στη ράβδο Σ με ταχύτητα \vec{v} .

Σχήμα 4.4β: Μετά την πρόσκρουση η ράβδος και το σωματίδιο κινούνται ως ενιαίο σώμα: Το σωματίδιο σ έχει ενσωματωθεί στο σημείο Λ της ράβδου.

Στη συνέχεια, γράφουμε τις εξισώσεις κίνησης κάθε σώματος χωριστά και επιβεβαιώνουμε τη διατήρηση της ορμής και της στροφορμής του συστήματος ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) (ενότητες 3.2 και 3.3, αντίστοιχα).

B) Εξισώσεις κίνησης της ράβδου Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) .

Στο σχήμα 4.4β εικονίζεται μια τυχαία θέση του συστήματος ράβδου-σωματιδίου, μετά την πρόσκρουση και ενσωμάτωση του σωματιδίου στη ράβδο. Οι εξισώσεις κίνησης της ράβδου Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) , εκφράζονται με τις σχέσεις:

$$\frac{d(\mathbf{M} \cdot \vec{V}_K)}{dt} = \vec{F}_\Sigma \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{J}_\Sigma}{dt} = \overline{A\Lambda} \times \vec{F}_\Sigma \quad (2)$$

όπου:

\vec{V}_K είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας K της ράβδου ως προς το αδρανειακό σύστημα (A,x,y,z),

\vec{F}_Σ είναι η δύναμη που ασκεί το σωματίδιο σ στη ράβδο, στο σημείο της Λ,

\vec{J}_Σ είναι η στροφορμή της ράβδου ως προς το (A,x,y,z).

Η στροφορμή της ράβδου ως προς το (A,x,y,z), υπολογίζεται από τη σχέση 28 της ενότητας 1.3:

$$\vec{J}_\Sigma = M \cdot \overline{AK} \times \vec{V}_K + I_K \cdot \vec{\omega} \quad (3)$$

όπου I_K η ροπή αδράνειας της **ράβδου** ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο Axγ, διερχόμενο από το κέντρο μάζας της K (σχήμα 4.4β).

Γ) *Εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου σ, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A,x,y,z).*

Η κίνηση του σ περιγράφεται από μια εξίσωση: το 2ο νόμο του Newton:

$$\frac{d(m \cdot \vec{v}_\sigma)}{dt} = \vec{F}_\sigma \quad (4)$$

όπου \vec{v}_σ είναι η ταχύτητα του σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (A,x,y,z) και \vec{F}_σ η δύναμη που ασκεί η ράβδος Σ στο σωματίδιο σ.

Για να διατυπώσουμε την εξίσωση που περιγράφει τη διατήρηση της στροφορμής του συστήματος ράβδου-σωματιδίου, χρειαζόμαστε μια έκφραση για τη μεταβολή της τροχιακής στροφορμής του σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (A,x,y,z). Η σχέση αυτή προκύπτει από τη μοναδική εξίσωση κίνησης του σ, δηλαδή την εξίσωση 4. Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε εξωτερικά τα δύο μέρη της 4 με το διάνυσμα θέσης $\overline{A\Lambda}$ του σ:

$$\overline{A\Lambda} \times \frac{d(m \cdot \vec{v}_\sigma)}{dt} = \overline{A\Lambda} \times \vec{F}_\sigma$$

από την οποία, δεδομένων των σχέσεων:

$$\vec{v}_\sigma = \frac{d\overline{A\Lambda}}{dt}$$

$$\vec{J}_\sigma = m \cdot \overline{A\Lambda} \times \vec{v}_\sigma$$

$$\vec{v}_\sigma \times \vec{v}_\sigma = 0$$

φτάνουμε στη:

$$\frac{d\vec{J}_\sigma}{dt} = \overline{A\Lambda} \times \vec{F}_\sigma \quad (5)$$

όπου \vec{J}_σ παριστάνει την τροχιακή στροφορμή του σωματιδίου σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (A,x,y,z).

Δ) *Διατήρηση της ορμής και της στροφορμής του συστήματος.*

Οι δυνάμεις \vec{F}_Σ και \vec{F}_σ , με τις οποίες αλληλεπιδρούν η ράβδος και το σωματίδιο, είναι «Νευτωνικού» τύπου, δηλαδή ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton:

$$\vec{F}_\sigma = -\vec{F}_\Sigma \quad (6)$$

Αθροίζουμε κατά μέρη τις 1 και 4, οπότε με βάση την 6 καταλήγουμε στην εξίσωση διατήρησης της ορμής του συστήματος ράβδου-σωματιδίου, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) :

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}_\sigma + M \cdot \vec{V}_K) = 0 \quad (7)$$

Από την άθροιση των 2 και 5 προκύπτει, αντίστοιχα, η διατήρηση της στροφορμής του συστήματος:

$$\frac{d}{dt}(\vec{J}_z + \vec{J}_\sigma) = 0 \quad (8)$$

Εξειδικεύουμε τις εξισώσεις 7 και 8 σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος.

Ε) Εξειδίκευση της εξίσωσης 7.

Από την 7 συνεπάγεται ότι η ορμή του συστήματος πριν την κρούση είναι ίση με την ορμή του συστήματος οποιαδήποτε στιγμή t μετά την ενσωμάτωση του σωματιδίου στη ράβδο, στο σημείο της Λ (παράγραφος 3.3B). Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης και με τη βοήθεια των σχημάτων 4.4α και β, από την 7 έπεται η εξίσωση:

$$m \cdot \vec{v} = M \cdot \vec{V}_K + m \cdot \vec{V}_\Lambda \quad (9)$$

όπου χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\vec{v}_\sigma \equiv \vec{V}_\Lambda$, για κάθε χρονική στιγμή t μετά την ενσωμάτωση του σ στο σημείο Λ της ράβδου. [Μετά την κρούση οι ταχύτητες του σ και του Λ ταυτίζονται]

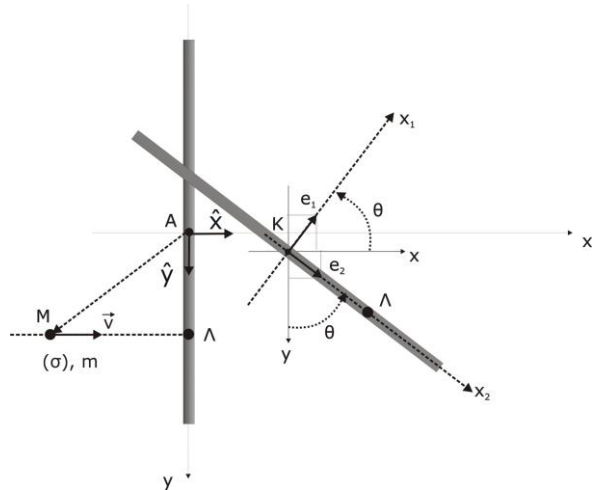
Θεωρούμε το στερεωμένο στη ράβδο ορθοκανονικό σύστημα των αξόνων Kx_1, Kx_2 , με αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα τα e_1 και e_2 , όπως δείχνει το σχήμα 4.4γ. Με τη βοήθεια του σχήματος 4.4γ, διαπιστώνουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} e_1 &= \cos\theta \cdot \hat{x} - \sin\theta \cdot \hat{y} \\ e_2 &= \sin\theta \cdot \hat{x} + \cos\theta \cdot \hat{y} \end{aligned} \quad (10)$$

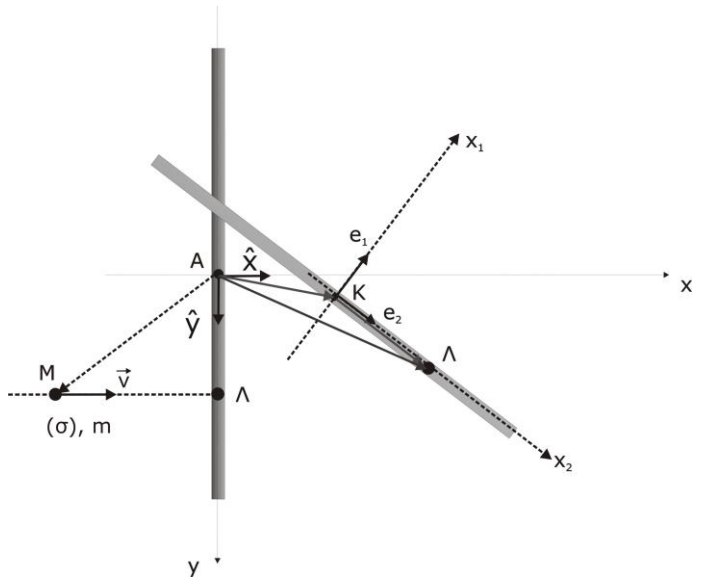
Τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων του αδρανειακού συστήματος (A, x, y, z) ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}, \quad \hat{z} \times \hat{y} = \hat{x}, \quad \hat{x} \times \hat{z} = \hat{y} \quad (11)$$

όπου \hat{z} συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα Az , που είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος και κατευθύνεται προς τον αναγνώστη.



Σχήμα 4.4γ: Το σύστημα αξόνων (K, x_1, x_2) είναι στερεωμένο στη ράβδο και έχει αρχή το κέντρο μάζας της K .



Σχήμα 4.4δ: Κατά την κίνηση του συσσωματώματος, η θέση του σωματιδίου σ προσδιορίζεται με το διάνυσμα $\vec{A\Lambda}$, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y) και με το $\vec{K\Lambda} = a \cdot e_2$, ως προς το στερεωμένο στη ράβδο σύστημα (K, x_1, x_2) .

Η ταχύτητα \vec{V}_Λ του σημείου Λ της ράβδου υπολογίζεται με τη βοήθεια της θεμελιώδους σχέσης 19 της παραγράφου 1.2A (σχήμα 4.4δ):

$$\vec{V}_\Lambda = \vec{V}_K + \vec{\omega} \times \overline{K\Lambda}$$

$\overline{K\Lambda}$ είναι το διάνυσμα θέσης του Λ ως προς το στερεωμένο στη ράβδο σύστημα αξόνων (K, x_1, x_2) :

$$\overline{K\Lambda} = a \cdot \mathbf{e}_2 = a \cdot (\sin\theta \cdot \hat{x} + \cos\theta \cdot \hat{y})$$

και η 9 γράφεται:

$$m \cdot \vec{v} = (m + M) \cdot \vec{V}_K + m \cdot \vec{\omega} \times \overline{K\Lambda} \quad (12)$$

Μετασχηματίζουμε τη 12 σε ένα ισοδύναμο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

Συμβολίζουμε V_{Kx} , V_{Ky} τις συνιστώσες της ταχύτητας \vec{V}_K του κέντρου μάζας K της ράβδου ως προς το σύστημα (A, x, y, z) .

Δεδομένου ότι το σωματίδιο σ πριν τη σύγκρουση κινείται παράλληλα με τον άξονα Ax , γράφουμε $\vec{v} = v \cdot \hat{x}$.

Η γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι κάθετη στο επίπεδο (A, x, y) . Επομένως γράφεται: $\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{z}$, όπου $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

Αντικαθιστούμε στη 12 όλα τα διανύσματα συναρτήσεως των μοναδιαίων. Χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου και μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε ότι η 12 ισοδυναμεί με το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} V_{Kx} &= \frac{m}{m + M} \cdot (v - \omega \cdot a \cdot \cos\theta) \\ V_{Ky} &= \frac{m}{m + M} \cdot \omega \cdot a \cdot \sin\theta \end{aligned} \quad (13)$$

Ε) Εξειδίκευση της εξίσωσης 8.

Από την εξίσωση 8 συνεπάγεται ότι η στροφορμή του συστήματος σωματιδίου-ράβδου διατηρείται σταθερή. Επομένως, η στροφορμή του συστήματος πριν την κρούση του σωματιδίου σ με τη ράβδο είναι ίση με τη στροφορμή του συστήματος οποιαδήποτε χρονική στιγμή μετά την κρούση. Εκφράζουμε την στροφορμή του συστήματος πριν την κρούση και μια χρονική στιγμή μετά και τις εξισώνουμε. Σύμφωνα με τις εξισώσεις 3-5 και τα σχήματα 4.4γ, δ, καταλήγουμε ότι από τη διατήρηση της στροφορμής παράγεται η εξίσωση:

$$m \cdot \overline{AM} \times \vec{v} = m \cdot \overline{AL} \times \vec{V}_\Lambda + M \cdot \overline{AK} \times \vec{V}_K + I_K \cdot \vec{\omega} \quad (14)$$

και η ισοδύναμη με αυτήν:

$$m \cdot a \cdot v \cdot \hat{z} = m \cdot (\overline{AK} + \overline{K\Lambda}) \times (\vec{V}_K + \vec{\omega} \times \overline{K\Lambda}) + M \cdot \overline{AK} \times \vec{V}_K + I_K \cdot \vec{\omega} \quad (15)$$

Εκφράζουμε όλα τα διανύσματα συναρτήσεως των μοναδιαίων διανυσμάτων των αξόνων του αδρανειακού συστήματος (A, x, y, z) .

Γράφουμε: $\overline{AK} = X \cdot \hat{x} + Y \cdot \hat{y}$, όπου X, Y οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας K της ράβδου ως προς το σύστημα (A, x, y) . Κάνουμε πράξεις και βρίσκουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις (σχήμα 4.4δ):

$$\begin{aligned} \overline{AK} \times \vec{V}_K &= (-X \cdot V_{Ky} + Y \cdot V_{Kx}) \cdot \hat{z} \\ \overline{K\Lambda} \times \vec{V}_K &= a \cdot \mathbf{e}_2 \times (V_{Ky} \cdot \hat{x} + V_{Kx} \cdot \hat{y}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \cdot (\sin \theta \cdot \hat{x} + \cos \theta \cdot \hat{y}) \times (V_{ky} \cdot \hat{x} + V_{kx} \cdot \hat{y}) = \\
&= \alpha \cdot (V_{kx} \cdot \cos \theta - V_{ky} \cdot \sin \theta) \cdot \hat{z} \\
\overline{AK} \times (\bar{\omega} \times \overline{KL}) &= (\overline{AK} \cdot \overline{KL}) \cdot \bar{\omega} - (\overline{AK} \cdot \bar{\omega}) \cdot \overline{KL} = \\
&= a \cdot \omega \cdot (X \cdot \sin \theta + Y \cdot \cos \theta) \cdot \hat{z} \\
\overline{KL} \times (\bar{\omega} \times \overline{KL}) &= (\overline{KL} \cdot \overline{KL}) \cdot \bar{\omega} - (\overline{KL} \cdot \bar{\omega}) \cdot \overline{KL} = \\
&= a^2 \cdot \omega \cdot \hat{z}
\end{aligned}$$

σύμφωνα με τις οποίες, η 15 λαμβάνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
m \cdot a \cdot v &= X \cdot (-(m+M) \cdot V_{ky} + \omega \cdot m \cdot a \cdot \sin \theta) + \\
&+ Y \cdot ((m+M) \cdot V_{kx} + \omega \cdot m \cdot a \cdot \cos \theta) + \\
&+ m \cdot a \cdot (V_{kx} \cdot \cos \theta - V_{ky} \cdot \sin \theta) + \omega \cdot (I_k + m \cdot a^2)
\end{aligned} \tag{16}$$

Στη 16, αντικαθιστούμε τα V_{kx} , V_{ky} σύμφωνα με τις εξισώσεις 13 και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει ως προς Y :

$$Y = a - \frac{\omega}{m \cdot v} \cdot \left(I_k + \frac{m \cdot M}{M+m} \cdot a^2 \right) - \frac{m}{M+m} \cdot a \cdot \cos \theta \tag{17}$$

Οι εξισώσεις 13 και 17 προσδιορίζουν πλήρως την κίνηση της ράβδου και του σωματιδίου.

στ) Διερεύνηση των εξισώσεων 13 και 17.

α) Από τη διαφορίση της εξίσωσης 17 ως προς το χρόνο προκύπτει:

$$V_{ky} = \frac{dY}{dt} = \frac{m \cdot a \cdot \omega}{M+m} \cdot \sin \theta - \frac{\dot{\omega}}{m \cdot v} \cdot \left(I_k + \frac{m \cdot M}{M+m} \cdot a^2 \right)$$

[όπου $\dot{\omega} \equiv \frac{d\theta}{dt}$]

Συνδυάζουμε την τελευταία εξίσωση με τη 13β, και βρίσκουμε ότι ισχύει:

$$\dot{\omega} \equiv \frac{d\theta}{dt} = 0$$

Δηλαδή το συσσωμάτωμα μετά την κρούση κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ως προς το αδρανειακό σύστημα (A,x,y,z). Το συμπέρασμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού το σύστημα ράβδου-σωματιδίου είναι απομονωμένο. Για να υπολογίσουμε τη γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος, ανατρέχουμε στην αρχική κατάσταση της ράβδου και του σωματιδίου, αμέσως μετά την κρούση. Σύμφωνα με το σχήμα 4.4δ, τη στιγμή αυτή ισχύουν οι σχέσεις: $\theta=0$ και $Y=0$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 17 τα μεγέθη θ και Y με τις τιμές αυτές και λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\omega = \frac{m \cdot M}{M+m} \cdot \frac{a \cdot v}{I_k + \frac{m \cdot M}{M+m} \cdot a^2} \tag{18}$$

Σε ποιο σημείο της ράβδου πρέπει να γίνει η πρόσκρουση του σωματιδίου, ώστε η γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση να είναι μέγιστη;

Αρκεί να βρούμε την τιμή a' του a , για την οποία το ω (σχέση 18) γίνεται ακρότατο. Αυτό συμβαίνει για $(d\omega/da)_{a=a'}=0$ και $(d^2\omega/da^2)_{a=a'}<0$. Μετά από μερικές πράξεις, καταλήγουμε ότι η πλαστική πρόσκρουση πρέπει να γίνει στο σημείο L' , που προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$a' = \sqrt{\frac{m+M}{m \cdot M}} \cdot I_K \quad (19)$$

Στο ένθετο 4.1.1 βρήκαμε ότι η ροπή αδράνειας ομοιογενούς ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της, δίδεται από τη σχέση $I_K = \frac{1}{12} \cdot M \cdot L^2$, όπου L το μήκος της ράβδου.

Αντικαθιστούμε το I_K στη 19 και βρίσκουμε:

$$a' = L \cdot \sqrt{\frac{m+M}{12m}}$$

β) Μετά την κρούση, η ταχύτητα του κέντρου μάζας K της ράβδου προσδιορίζεται από τις σχέσεις 13, όπου $\theta = \omega t$ και το ω δίδεται από τη σχέση 18. Είναι φανερό ότι το K ακολουθεί περίπλοκη τροχιά ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) . Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο αφού μετά την προσκόλληση του σ στη ράβδο, τα δύο σώματα αλληλεπιδρούν, με συνέπεια τα κέντρα μάζας τους, γενικά, να μη διαγράφουν ευθύγραμμες τροχιές ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) . Ωστόσο, το συσσωμάτωμα ράβδου-σωματιδίου είναι απομονωμένο. Επομένως το κέντρο μάζας του συστήματος θα πρέπει να κινείται με σταθερή ταχύτητα, ως προς το αδρανειακό σύστημα (A, x, y, z) . Για να ελέγξουμε αν αυτό πραγματικά συμβαίνει, αναζητούμε σημείο N της ράβδου, του οποίου η ταχύτητα μετά την κρούση να είναι σταθερή. Έστω ότι η θέση του N ως προς τον άξονα Kx_2 , του στερεωμένου στη ράβδο συστήματος αξόνων (K, x_1, x_2) (σχήμα 4.4γ), προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\overrightarrow{KN} = \beta \cdot e_2$$

Θα βρούμε το β από την απαίτηση:

$$\frac{d\vec{V}_N}{dt} = 0$$

Αφού το N είναι σταθερό σημείο της ράβδου, ισχύει:

$$\vec{V}_N = \vec{V}_K + \vec{\omega} \times \overrightarrow{KN}$$

Από το συνδυασμό των δύο τελευταίων σχέσεων με τις 10 και 13, βρίσκουμε την αναμενόμενη τιμή για το β :

$$\beta = a \cdot \frac{m}{M+m}$$

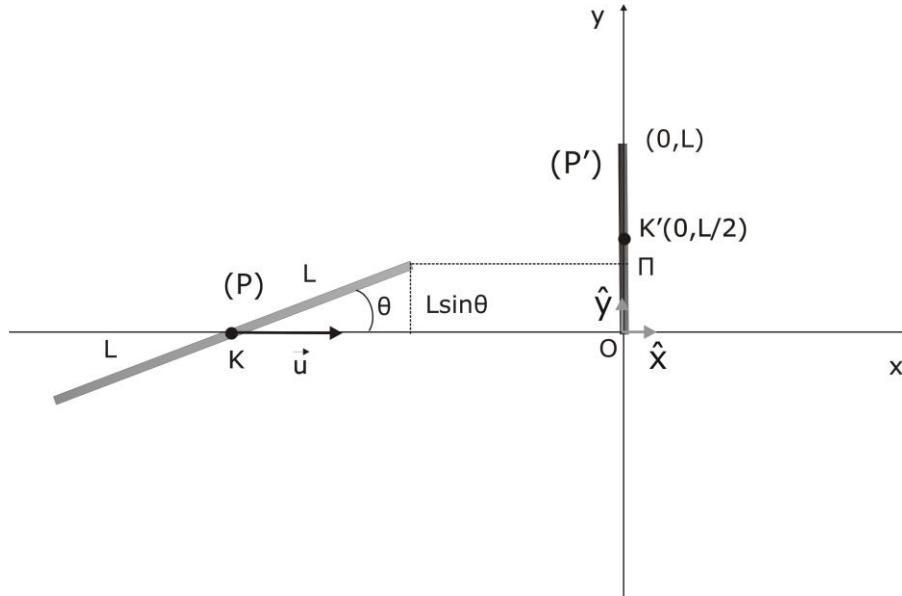
Εφαρμογή 5: Ελαστική κρούση ράβδων που κινούνται σε οριζόντιο λείο επίπεδο.

Το κέντρο μάζας K ομοιογενούς ράβδου (P) μάζας M και μήκους $2L$, κινείται με σταθερή ταχύτητα u , κατά μήκος του άξονα Ox αδρανειακού συστήματος (O, x, y, z) . Η ράβδος έχει μηδενική γωνιακή ταχύτητα και σχηματίζει με τον άξονα Ox γωνία θ , όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5α. Η ράβδος P προσπίπτει σε δεύτερη ράβδο P' , μάζας M' και μήκους L , που ηρεμεί πάνω στον άξονα Oy . Το κέντρο μάζας K' της P' έχει συντεταγμένες $(0, L/2)$ ως προς τους άξονες (O, x, y) (σχήμα 4.5α,β). Αν η κρούση είναι ελαστική, να βρεθεί η ταχύτητα του κέντρου μάζας και η γωνιακή ταχύτητα κάθε ράβδου μετά την κρούση.

Λύση

A) Γενικές σκέψεις.

Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε ράβδο πριν και μετά την κρούση είναι μηδενικές. Επομένως, η γωνιακή ταχύτητα κάθε ράβδου και οι ταχύτητες των κέντρων μάζας τους, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x, y, z) , έχουν σταθερές τιμές τόσο πριν όσο και μετά την κρούση.



Σχήμα 4.5α: Η ράβδος P με κέντρο μάζας το K κινείται με σταθερή ταχύτητα u , χωρίς να περιστρέφεται, προς τη ράβδο P', με κέντρο μάζας το K', που ηρεμεί πάνω στον άξονα Oy του αδρανειακού συστήματος (O,x,y,z) , όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο άξονας Oz είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος και κατευθύνεται προς τον αναγνώστη.

Δεδομένου ότι η κρούση είναι ελαστική, η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο ράβδων διατηρείται σταθερή. Επιπλέον, κατά την (απειροστή) διάρκεια της κρούσης οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton, με συνέπεια τόσο η ορμή, όσο και η στροφορμή του συστήματος να διατηρούνται σταθερές (κεφάλαιο 3). Από τις εξισώσεις διατήρησης προκύπτουν τέσσερις ανεξάρτητες εξισώσεις. Ωστόσο οι άγνωστοι του προβλήματος είναι έξι (οι δύο γωνιακές ταχύτητες των ράβδων και οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας του κέντρου μάζας κάθε ράβδου). Πώς θα παραχθούν οι απαιτούμενες εξισώσεις για να προκύψει μονοσήμαντη λύση;

Οι σχέσεις που απαιτούνται για να έχουμε μονοσήμαντη λύση, θα προέλθουν από τις εξισώσεις κίνησης: Όπως θα δούμε, οι συνιστώσες των ταχυτήτων σχετίζονται με τις ωθήσεις των δυνάμεων αλληλεπίδρασης κατά την κρούση, οι οποίες με τη σειρά τους σχετίζονται μεταξύ τους μέσω του τρίτου νόμου του Newton. Με τη χρήση των ωθήσεων ως βοηθητικές μεταβλητές, θα καταφέρουμε να ελαττώσουμε τις άγνωστες παραμέτρους του προβλήματος στις τέσσερις.

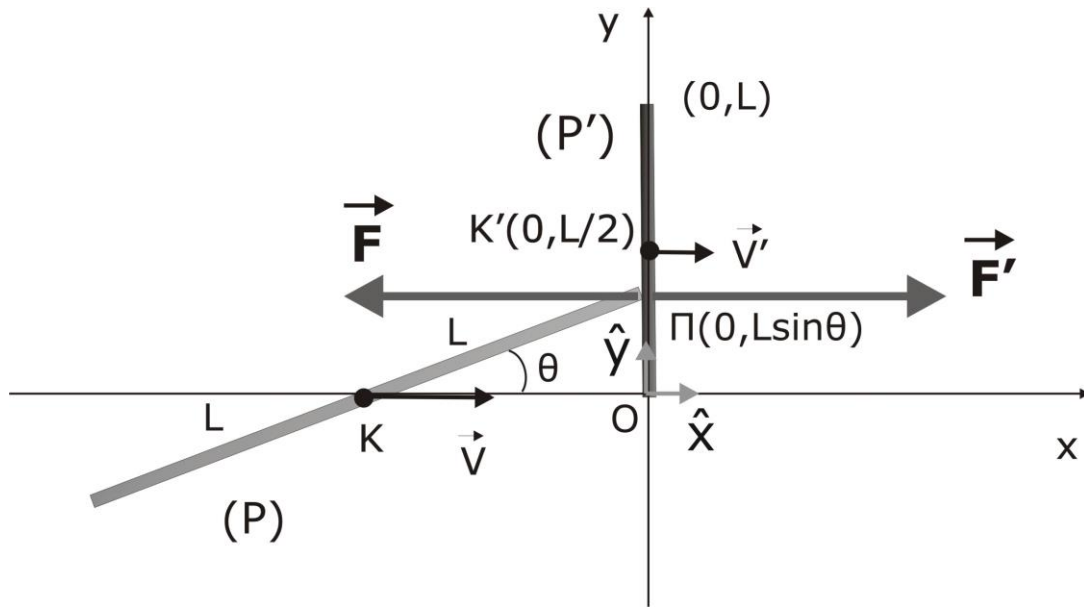
Για να μελετήσουμε την περιστροφή των ράβδων ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O,x,y,z) , για κάθε ράβδο επιλέγουμε ένα σύστημα αξόνων στερεωμένο σε αυτή, με αρχή το κέντρο μάζας της. Τα συστήματα αυτά, (K,e_1,e_2) και (K',e'_1,e'_2) , φαίνονται στο σχήμα 4.5γ.

A) Οι εξισώσεις κίνησης των ράβδων του συστήματος

Μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας K της ράβδου P και του K' της P': Η αρχική ταχύτητα της P, καθώς και οι δυνάμεις που ενεργούν στις ράβδους κατά την αλληλεπίδρασή τους δεν έχουν συνιστώσες κατά τον άξονα Oy. Επομένως οι κινήσεις των K και K' πραγματοποιούνται σε ευθείες παράλληλες με τον άξονα Ox. Οι αντίστοιχες εξισώσεις του Newton ανάγονται σε βαθμωτές, ως προς τον άξονα Ox:

$$\frac{d(M \cdot V)}{dt} = -F \quad (1)$$

για τη ράβδο P, και



Σχήμα 4.5β: Η ράβδος P συγκρούεται ελαστικά με τη ράβδο P', στο σημείο Π με συντεταγμένες $(0, L \sin \theta)$ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x, y) . Οι ράβδοι αλληλεπιδρούν για απειροστό χρονικό διάστημα, με ισχυρές δυνάμεις που ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Newton. Η ροπή της F είναι:

$$\vec{\tau}_F = \overline{O\bar{\Pi}} \times \vec{F} = F \cdot L \cdot \sin \theta \cdot \hat{y} \times \hat{x} = -F \cdot L \cdot \sin \theta \cdot \hat{z}$$

Αντίστοιχα, της F':

$$\vec{\tau}_{F'} = \overline{O\bar{\Pi}} \times \vec{F}' = -F \cdot L \cdot \sin \theta \cdot \hat{y} \times \hat{x} = F \cdot L \cdot \sin \theta \cdot \hat{z}$$

$$\frac{d(\mathbf{M} \cdot \mathbf{V}')}{dt} = F' \quad (2)$$

για τη ράβδο P'.

Οι δυνάμεις \vec{F} και \vec{F}' είναι αντίθετες (σχήμα 4.5β):

$$\vec{F} = -\vec{F}' \quad (3)$$

Οι τιμές των \vec{F} και \vec{F}' είναι μηδέν για κάθε χρονική στιγμή, εκτός από το πολύ μικρό (απειροστό) χρονικό διάστημα $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ κατά το οποίο οι δύο ράβδοι συγκρούονται και αλληλεπιδρούν. Στο διάστημα $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ τα μέτρα των \vec{F} και \vec{F}' έχουν πολύ μεγάλες τιμές, οι οποίες τείνουν στο $+\infty$, όταν το ϵ τείνει στο μηδέν ($\epsilon \rightarrow 0$). Ωστόσο οι ωθήσεις Ω_F και $\Omega_{F'}$ των F και F' είναι πεπερασμένες. Θέτουμε $F \equiv \|\vec{F}\| = \|\vec{F}'\|$, οπότε σύμφωνα με το σχήμα 4.5β, έχουμε:

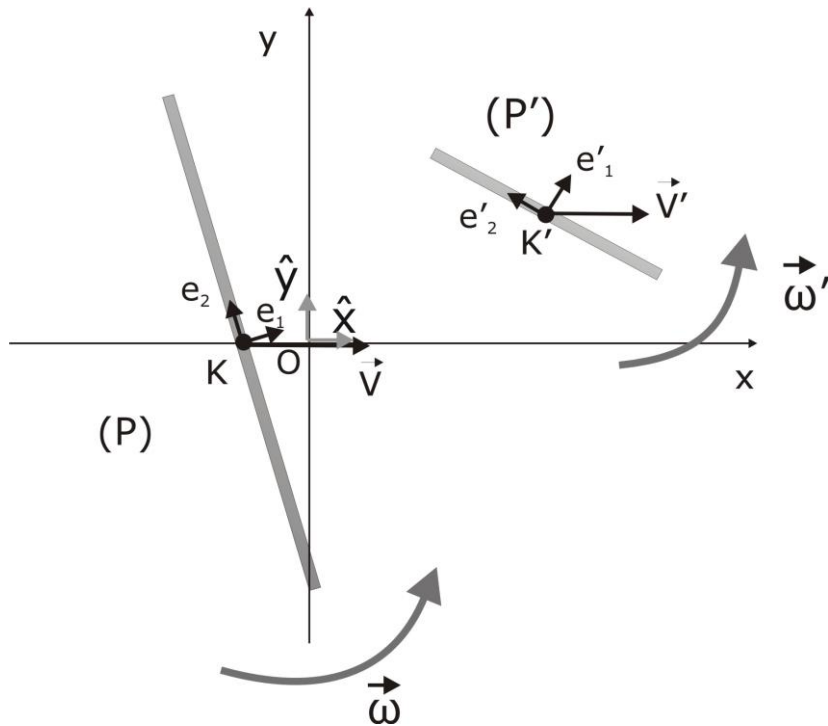
$$\vec{F} = -F \cdot \hat{x} \text{ και } \vec{F}' = F \cdot \hat{x}$$

$$\Omega_F = -\int_{-\infty}^{+\infty} F \cdot dt \quad (4)$$

$$\Omega_{F'} = \int_{-\infty}^{+\infty} F \cdot dt$$

$$\Omega_F = -\Omega_{F'} \quad (5)$$

Θέτουμε $\Omega_{F'} \equiv \Omega (> 0)$, οπότε $\Omega_F = -\Omega$. Ολοκληρώνουμε τις 1 και 2 μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 που αντιστοιχούν στην κατάσταση του συστήματος πριν αρχίσει η κρούση (t_1) και μετά την κρούση (t_2) και λαμβάνουμε τις εξισώσεις:



Σχήμα 4.5γ: Μετά την ελαστική κρούση, οι ράβδοι περιστρέφονται με σταθερές γωνιακές ταχύτητες και τα κέντρα μάζας τους κινούνται με σταθερές ταχύτητες, ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O, x, y, z) .

$$M \cdot V - M \cdot u = -\Omega \quad (6)$$

για τη ράβδο P, και

$$M' \cdot V' = \Omega \quad (7)$$

για τη ράβδο P'.

Από τις 6 και 7 μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητες των κέντρων μάζας K και K' σε συνάρτηση με την ώθηση Ω:

$$V = u - \frac{\Omega}{M} \quad (6a)$$

$$V' = \frac{\Omega}{M'} \quad (7a)$$

Εξισώσεις της περιστροφικής κίνησης των ράβδων P και P': Γράφουμε τις εξισώσεις μεταβολής της στροφορμής κάθε ράβδου, έχοντας κατά νου όσα ελέχθησαν στην προηγούμενη παράγραφο, για τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης και τις ωθήσεις τους. Συμβολίζουμε ω , ω' τις γωνιακές ταχύτητες των P και P' ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x, y, z) . I_K , $I'_{K'}$ συμβολίζουν τις ροπές αδράνειας των P και P' ως προς τους άξονες Kz , $K'z'$ αντίστοιχα, που είναι κάθετοι στο επίπεδο του σχήματος 4.5γ με κατεύθυνση προς τον αναγνώστη και καθένας τους διέρχεται από το κέντρο μάζας της αντίστοιχης ράβδου. Με τη βοήθεια των σχημάτων 4.5β και 4.5γ λαμβάνουμε:
Για τη ράβδο P:

$$\frac{d}{dt} (M \cdot \overline{OK} \times \vec{V} + I_K \cdot \vec{\omega}) = \overline{OP} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt} (I_K \cdot \omega) = F \cdot L \cdot \sin \theta$$

Ολοκληρώνουμε την τελευταία μεταξύ των στιγμών t_1 και t_2 και λαμβάνουμε:

$$I_k \cdot \omega = \Omega \cdot L \cdot \sin \theta \quad (8)$$

ή:

$$\omega = \frac{\Omega \cdot L \cdot \sin \theta}{I_k} \quad (8a)$$

Για τη ράβδο P':

$$\frac{d}{dt} (M' \cdot \overline{OK'} \times \vec{V}' + I'_{K'} \cdot \vec{\omega}') = \overline{OP} \times \vec{F}'$$

$$\hat{z} \cdot \frac{d}{dt} \left(-\frac{M' \cdot L \cdot V'}{2} + I'_{K'} \cdot \omega' \right) = -\hat{z} \cdot F \cdot L \cdot \sin \theta$$

και με ολοκλήρωση της τελευταίας:

$$-\frac{M' \cdot V' \cdot L}{2} + I'_{K'} \cdot \omega' = -\Omega \cdot L \cdot \sin \theta \quad (9)$$

ή, σε συνδυασμό με την 7:

$$\omega' = \frac{\Omega \cdot L}{I'_{K'}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \sin \theta \right) \quad (9a)$$

B) Η εξίσωση διατήρησης της μηχανικής ενέργειας

Η κρούση των ράβδων είναι ελαστική. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος των δύο ράβδων, κατά την αλληλεπίδρασή τους, διατηρείται αναλλοίωτη. Σύμφωνα με την παράγραφο 3.1Δ, γράφουμε την εξίσωση:

$$1/2 M u^2 = 1/2 M V^2 + 1/2 M' V'^2 + 1/2 I_k \omega^2 + 1/2 I'_{K'} \omega'^2 \quad (10)$$

Συνδυάζουμε τη 10 με τις 6a, 7a, 8a και 9a και υπολογίζουμε την ώθηση Ω που «αντάλλαξαν» οι δύο ράβδοι κατά την αλληλεπίδρασή τους:

$$\Omega = \frac{2 \cdot u}{\frac{1}{M} + \frac{1}{M'} + L^2 \cdot \left(\frac{\sin^2 \theta}{I_k} + \frac{(1/2 - \sin \theta)^2}{I'_{K'}} \right)} \quad (11)$$

Με βάση την 11, μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα ζητούμενα μεγέθη: V , V' , ω , ω' (σχέσεις 6a, 7a, 8a και 9a).

Διερεύνηση τη λύσης:

a) Αν ισχύει $M' \gg M$, οπότε και $I'_{K'} \gg I_k$, δηλαδή αν η ράβδος P προσπίπτει σε ελαστικό τοίχο, η 11 προσεγγίζεται με τη σχέση:

$$\Omega = \frac{2 \cdot u}{\frac{1}{M} + L^2 \cdot \frac{\sin^2 \theta}{I_k}} \quad (12)$$

Η γωνιακή ταχύτητα ω' και η ταχύτητα του K' , όπως αναμένεται, τείνουν στο μηδέν (σχέσεις 7a, 9a). Η ράβδος P αναπηδά με ταχύτητα:

$$V = u \cdot \left(1 - \frac{2}{1 + \frac{M \cdot L^2}{I_k} \cdot \sin^2 \theta} \right) \quad (13)$$

και γωνιακή ταχύτητα:

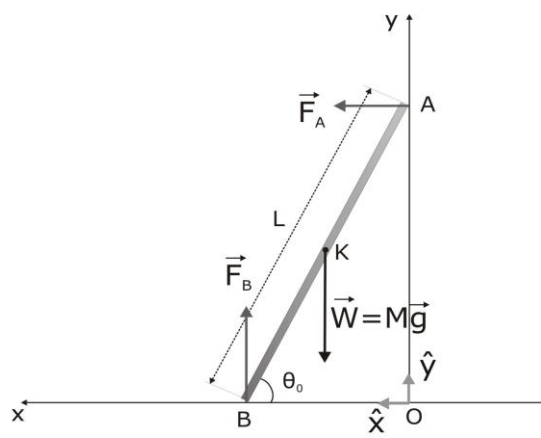
$$\omega = \frac{2 \cdot M \cdot L}{I_k + M \cdot L^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot u \cdot \sin \theta \quad (14)$$

β) Στην περίπτωση που η ράβδος P προσπίπτει υπό γωνία $\theta=0$, πάνω στον ελαστικό τοίχο, από τις 13 και 14 προκύπτουν οι γνωστές από τη μελέτη της ελαστικής κρούσης σώματος-τοίχου σχέσεις: $\omega=0$ και $V=-u$.

Εφαρμογή 6: Κίνηση ράβδου εντός ομοιογενούς κατακόρυφου πεδίου βαρύτητας: Η ράβδος αφήνεται να κινηθεί σε κατακόρυφο επίπεδο, με τα δύο άκρα της να εφάπτονται κατακόρυφης και οριζόντιας λείας επιπέδης επιφάνειας, αντίστοιχα.

Ομοιογενής ράβδος μήκους L και μάζας M αφήνεται να γλιστρήσει χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο, από αρχική θέση που εικονίζεται στο σχήμα 4.6α. Η διάταξη βρίσκεται εντός κατακόρυφου, ομοιογενούς πεδίου βαρύτητας μέτρου g . Να υπολογιστούν:

- α) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου, σε συνάρτηση με τη γωνία θ που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο (σχήμα 4.6β).
- β) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας K της ράβδου, σε συνάρτηση με τη θ .
- γ) Οι δυνάμεις που ασκούν οι δύο επιφάνειες επί της ράβδου, ως συναρτήσεις της θ .



Σχήμα 4.6α: Στο σχήμα απεικονίζεται η αρχική θέση της ράβδου ($t=0$), ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x, y, z) . Ο άξονας Oz είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος και κατευθύνεται προς τα «μέσα». Η γωνία θ που σχηματίζει η ράβδος με τον οριζόντιο άξονα μεταβάλλεται από την τιμή θ_0 έως το μηδέν.

Λύση

A) Γενικές σκέψεις

Στο σχήμα 4.6β εικονίζεται η θέση της ράβδου κατά τη χρονική t . Υποθέτουμε ότι τη στιγμή t η ράβδος εφάπτεται και των δύο επιφανειών με τα άκρα της A και B . Οι δυνάμεις επαφής F_A και F_B είναι κάθετες στην αντίστοιχη επιφάνεια (οι τριβές θεωρούνται αμελητέες). Επιπλέον, στο κέντρο μάζας της ράβδου, ασκείται το βάρος της $W=Mg$, που έχει κατακόρυφη διεύθυνση. Θα μελετήσουμε την κίνηση της ράβδου ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων (O, x, y, z) , που εικονίζεται στα σχήματα 4.6α και β. Ο άξονας Oz είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος και κατευθύνεται από τον αναγνώστη προς το σχήμα, έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση:

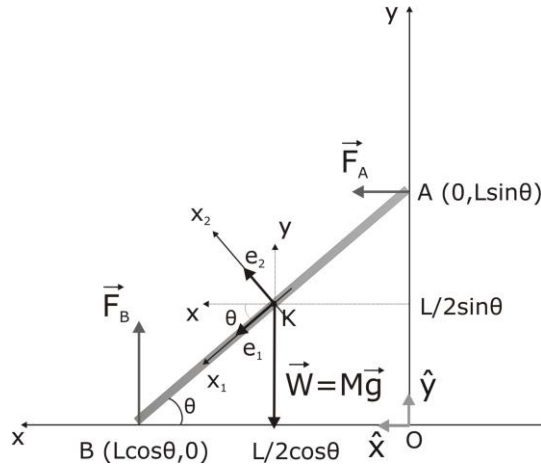
$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

Ας θεωρήσουμε τη θέση της ράβδου τη χρονική στιγμή t (σχήμα 4.6β). Οι εξισώσεις κίνησης της ράβδου είναι οι ακόλουθες:

$$M \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_A + \vec{F}_B + M \cdot \vec{g} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = \vec{OA} \times \vec{F}_A + \vec{OB} \times \vec{F}_B + M \cdot \vec{OK} \times \vec{g} \quad (2)$$

όπου: $\vec{V} = V_x \cdot \hat{x} + V_y \cdot \hat{y}$ είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας K της ράβδου και:



Σχήμα 4.6β: Στο σχήμα απεικονίζεται η θέση της ράβδου τη στιγμή t . Το σύστημα αξόνων (K, x_1, x_2) είναι στερεωμένο στη ράβδο και περιστρέφεται ως προς το αδρανειακό (O, x, y, z) με γωνιακή ταχύτητα: $\vec{\omega} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{z}$. Η αλγεβρική τιμή ω της γωνιακής ταχύτητας είναι θετική και δεδομένου ότι $d\theta < 0$, θέτουμε $\omega = -\frac{d\theta}{dt}$.

$$\vec{J}_{(O)} = M \cdot \overline{OK} \times \vec{V} + I_K \cdot \vec{\omega} \quad (3)$$

είναι η στροφορμή της ράβδου ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x, y, z) .

Η περιστροφή της ράβδου ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x, y, z) προσδιορίζεται από τη γωνία θ που σχηματίζουν τα μοναδιαία διανύσματα e_1, e_2 , των αξόνων του συστήματος (K, x_1, x_2, x_3) που είναι στερεωμένο στη ράβδο και έχει αρχή το κέντρο μάζας της, με τους άξονες Ox, Oy . Σύμφωνα με το σχήμα 4.6β, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} e_1 &= \cos \theta \cdot \hat{x} - \sin \theta \cdot \hat{y} \\ e_2 &= \sin \theta \cdot \hat{x} + \cos \theta \cdot \hat{y} \\ e_3 &= \hat{z} \end{aligned} \quad (4)$$

B) Εξειδίκευση των εξισώσεων κίνησης

Αναλύουμε τις εξισώσεις 1 και 2 σε σύστημα βαθμωτών εξισώσεων. Εκφράζουμε όλα τα διανυσματικά μεγέθη ως προς τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος (O, x, y, z) . Από την 1 προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$M \cdot \frac{dV_x}{dt} = F_A \quad (5)$$

$$M \cdot \frac{dV_y}{dt} = F_B - M \cdot g \quad (6)$$

Με τη βοήθεια του σχήματος 4.6β βρίσκουμε ότι:

$$\overline{OK} = \frac{L}{2} \cdot \cos \theta \cdot \hat{x} + \frac{L}{2} \cdot \sin \theta \cdot \hat{y}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overline{OK}}{dt} = \frac{L}{2} \cdot (\omega \cdot \sin \theta \cdot \hat{x} - \omega \cdot \cos \theta \cdot \hat{y})$$

$$M \cdot \frac{dV_x}{dt} = \frac{ML}{2} \cdot (-\omega^2 \cdot \cos \theta + \dot{\omega} \sin \theta)$$

$$M \cdot \frac{dV_y}{dt} = \frac{ML}{2} \cdot (-\omega^2 \cdot \sin \theta - \dot{\omega} \cos \theta)$$

$$\left[\omega = -\frac{d\theta}{dt} \text{ και } \dot{\omega} \equiv \frac{d\omega}{dt} \right]$$

οι οποίες συνδυαζόμενες με τις εξισώσεις 5 και 6, μας οδηγούν στις:

$$\frac{ML}{2} \cdot (-\omega^2 \cdot \cos \theta + \dot{\omega} \sin \theta) = F_A \quad (7)$$

και

$$\frac{ML}{2} \cdot (-\omega^2 \cdot \sin \theta - \dot{\omega} \cos \theta) = F_B - M \cdot g \quad (8)$$

Όσον αφορά στο ρυθμό μεταβολής της στροφορμής, από την εξίσωση 2 και μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε:

$$\frac{d\vec{J}_{(O)}}{dt} = \left(-\frac{ML^2}{4} + I_K \right) \cdot \dot{\omega} \cdot \hat{z} \quad (9)$$

και σε συνδυασμό με την εξίσωση κίνησης 2:

$$\left(-\frac{ML^2}{4} + I_K \right) \cdot \dot{\omega} = L \cdot \left(-F_A \sin \theta + \left(F_B - \frac{Mg}{2} \right) \cdot \cos \theta \right) \quad (10)$$

Οι εξισώσεις 7, 8 και 10 περιγράφουν την κίνηση της ράβδου.

Γ) Επίλυση και διερεύνηση των εξισώσεων 7, 8, 10.

Οι δυνάμεις F_A και F_B που ασκούνται στη ράβδο από τις επιφάνειες είναι άγνωστες. Εξ άλλου, η κίνηση της ράβδου προσδιορίζεται από ένα και μοναδικό βαθμό ελευθερίας: τη γωνία θ (σχήμα 4.6β). Όστε από τις τρεις εξισώσεις μπορούμε να απαλείψουμε τις άγνωστες δυνάμεις F_A και F_B και να επιλύσουμε την προκύπτουσα εξίσωση ως προς ω . Ωστόσο, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί! Η δύναμη F_A προσδίδει στο κέντρο μάζας της ράβδου επιτάχυνση με συνιστώσα προς τον άξονα Ox . Πρέπει να διερευνήσουμε κατά πόσον η αποκτούμενη ταχύτητα V_x του κέντρου μάζας μετατοπίζει τη ράβδο έτσι ώστε να χάσει την επαφή της με την κατακόρυφη επιφάνεια, γεγονός που θα μηδενίσει τη δύναμη F_A . Ο μηδενισμός της F_A θα αλλάξει τη μορφή των εξισώσεων κίνησης, οι οποίες θα πρέπει να αναδιατυπωθούν.

Για να απαλείψουμε τις F_A και F_B , πολλαπλασιάζουμε την 7 με $L\sin\theta$ και την 8 με $-L\cos\theta$ και προσθέτουμε κατά μέλη τις προκύπτουσες και τη 10. Καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\left(\frac{ML^2}{4} + I_k\right) \cdot \dot{\omega} = \frac{MgL}{2} \cdot \cos\theta \quad (11)$$

Επιλύουμε την 11. Βρίσκουμε τη μεταβολή της ω σε συνάρτηση με τη γωνία θ . Ισχύει:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\omega \cdot \frac{d\omega}{d\theta}$$

Οπότε, από την 11 προκύπτει η εξίσωση:

$$-\omega \cdot d\omega = \frac{MgL}{2\left(\frac{ML^2}{4} + I_k\right)} \cdot \cos\theta \cdot d\theta \quad (12)$$

Ολοκληρώνουμε τη 12 από τη χρονική στιγμή $t=0$, που η (αρχική) γωνία θ έχει τιμή θ_0 και η γωνιακή ταχύτητα είναι μηδενική, έως την τυχαία χρονική στιγμή t , στην οποία υποθέτουμε ότι η ράβδος δεν έχει χάσει την επαφή της με την κατακόρυφη επιφάνεια. Λαμβάνουμε:

$$\omega = \Lambda \cdot \sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta} \quad (13)$$

όπου:

$$\Lambda \equiv \sqrt{\frac{MgL}{\frac{ML^2}{4} + I_k}}$$

Σημειώνουμε ότι αν η αρχική γωνία $\theta_0 = \pi/2$, τότε η 13 γίνεται:

$$\omega = \Lambda \cdot \sqrt{1 - \sin\theta}$$

Η γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου είναι:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Lambda^2}{2} \cdot \cos\theta \quad (14)$$

Ας σημειώσουμε ότι οι 13, 14 ισχύουν όσο η ράβδος διατηρεί την επαφή της με την κατακόρυφη επιφάνεια.

Πως μεταβάλλεται η δύναμη F_A κατά την κίνηση της ράβδου;

Από τις σχέσεις 7, 13, 14 βρίσκουμε ότι:

$$F_A = \frac{3}{4} \cdot M\Lambda^2 \cos\theta \cdot \left(\sin\theta - \frac{2}{3}\sin\theta_0\right) \quad (15)$$

Παρατηρούμε ότι η F_A μηδενίζεται όταν η γωνία θ λάβει τιμή $\theta = \theta_c$, ώστε:

$$\sin \theta_c = \frac{2}{3} \sin \theta_0 \quad (16)$$

Για $\theta \leq \theta_c$, η ράβδος δεν εφάπτεται με την κατακόρυφη επιφάνεια και η δύναμη $F_A=0$. Από τη στιγμή αυτή και μετά, οι εξισώσεις κίνησης της ράβδου γράφονται (σχήμα 4.6γ):

$$M \cdot \frac{dV_x}{dt} = 0 \quad (17)$$

$$M \cdot \frac{dV_y}{dt} = F_B - M \cdot g \quad (18)$$

και η στροφική κίνηση, ως προς το στιγμιαίο αδρανειακό σύστημα (K, x_1, x_2, z) :

$$\frac{d\vec{j}_{(K)}}{dt} = \vec{KB} \times \vec{F}_B$$

η οποία, με τη βοήθεια του σχήματος 4.6γ, μετασχηματίζεται στην:

$$I_K \cdot \dot{\omega} = \frac{L \cdot F_B}{2} \cdot \cos \theta \quad (19)$$

Διερευνούμε το σύστημα των 17, 18, 19, θεωρώντας ότι $\theta_0 = \pi/2$.

Από τη 17 συνεπάγεται ότι για $\theta \leq \theta_c$ η συνιστώσα V_x της ταχύτητας του κέντρου μάζας K της ράβδου διατηρεί την τιμή που έχει τη στιγμή t_c , όπου $\theta = \theta_c$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η τιμή αυτή είναι:

$$V_x = \Lambda L \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} \quad (20)$$

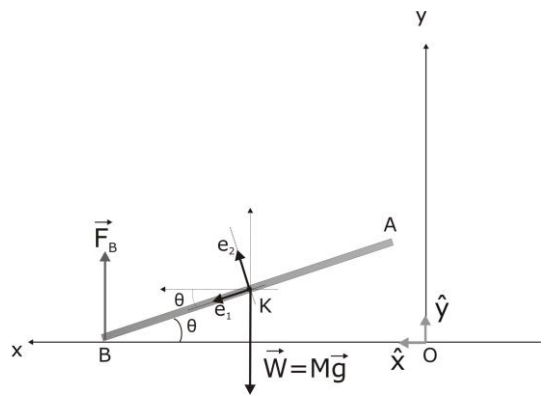
Από το συνδυασμό των 18 και 19, σε συνδυασμό με την εξίσωση

$$dy = V_y \cdot dt = -dt \cdot \omega \cdot \frac{L}{2} \cos \theta$$

προκύπτει το ακόλουθο ολοκλήρωμα της κίνησης, που δεν είναι άλλο από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M \cdot V_y^2 + \frac{1}{2} I_K \cdot \omega^2 + Mg \cdot y \right) = 0 \quad (21)$$

Οι 20 και 21 ισχύουν εφόσον η ράβδος έχει απομακρυνθεί από το κατακόρυφο επίπεδο, δηλαδή για $\theta \leq \theta_c$.



Σχήμα 4.6γ: Η ράβδος έχει χάσει την επαφή της με την κατακόρυφη επιφάνεια. Η γωνία θ έχει τιμή μικρότερη της κρίσιμης τιμής θ_c .

Ασκήσεις Κεφαλαίου 4

1. Ομοιογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας \bar{u} . Ο δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega}$, κάθετη στο οριζόντιο επίπεδο. Ο δίσκος προσκρούει κάθετα σε ακλόνητο κατακόρυφο επίπεδο. Κατά την κρούση, μεταξύ του δίσκου και του επιπέδου αναπτύσσονται ελαστικές δυνάμεις επαφής, τόσο κάθετα στο επίπεδο, όσο και παράλληλα προς αυτό. Οι δυνάμεις αυτές είναι συντηρητικές. Αν μετά την κρούση η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι ίση με το μηδέν, να βρεθούν:

- Η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας πριν την κρούση.
- Το μέτρο και η κατεύθυνση της ταχύτητας του δίσκου μετά την κρούση.

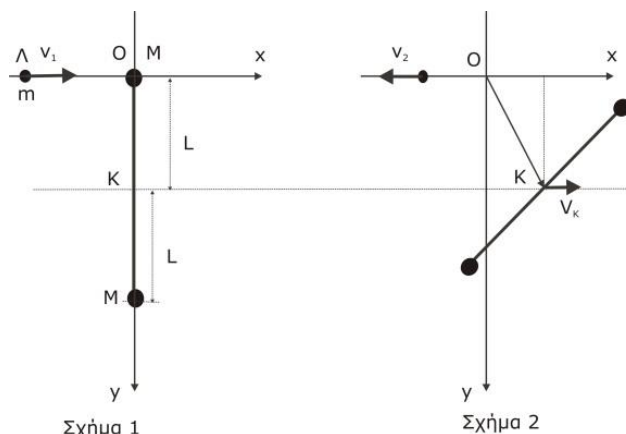
$$[v_x = R\omega/2, v_y = -\sqrt{u^2 + (R\omega/2)^2}]$$

2. Ομοιογενής ράβδος AB , μάζας M και μήκους L , αφήνεται να πέσει ελεύθερα, χωρίς να περιστρέφεται, σε κατακόρυφο ομοιογενές πεδίο βαρύτητας \bar{g} . Στην αρχική της θέση, η ράβδος σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία θ και το κέντρο μάζας της, απέχει από το έδαφος απόσταση h . Η ράβδος προσκρούει με το άκρο της A στο έδαφος. Η κρούση είναι ελαστική και οι τριβές αμελητέες.

- Να βρεθεί συνθήκη μεταξύ των μεγεθών M , L , θ , h , ώστε μετά την πρώτη κρούση του άκρου A της ράβδου με το οριζόντιο επίπεδο, να μη συμβεί κρούση του άκρου της B ενόσω το A ανυψώνεται.
- Με δεδομένη τη συνθήκη αυτή, να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου μετά την κρούση, καθώς και οι ταχύτητες του A , του B και του κέντρου μάζας της ράβδου, αμέσως μετά την κρούση του άκρου A με το οριζόντιο επίπεδο.

3. Δύο σφαίρες μάζας M και ακτίνας R είναι στερεωμένες στις άκρες ράβδου μάζας M και μήκους $2L$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μικρό βλήμα μάζας m προσκρούει στο κέντρο μιας από τις δύο σφαίρες με ταχύτητα v_1 . Η διεύθυνση της κίνησης του βλήματος είναι κάθετη στη ράβδο και η κρούση είναι ελαστική. Να υπολογίσετε:

- Τη ροπή αδράνειας του συστήματος σφαιρών - ράβδου ως προς το μέσο O της ράβδου.
- Τη μεταφορική ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος.
- Τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος σφαίρας - ράβδου.



Λύση

Το κέντρο μάζας K του συστήματος Σ , σφαιρών - ράβδου βρίσκεται στο μέσον της ράβδου και απέχει L από το κέντρο κάθε σφαίρας. [Για ευκολία στις πράξεις, και χωρίς σοβαρή τροποποίηση του προβλήματος, θεωρώ ότι οι σφαίρες στηρίζονται έτσι ώστε τα κέντρα τους να ταυτίζονται με τα άκρα της ράβδου]

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το O είναι

$$I_1 = \frac{1}{12} M(2L)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Η ροπή αδράνειας των δύο σφαιρών ως προς το O είναι

$$I_2 = 2 \left[\frac{2}{5} MR^2 + ML^2 \right]$$

Συνεπώς, η ροπή αδράνειας I του συστήματος σφαιρών - ράβδου ως προς το O είναι:

$$I = \frac{1}{3} ML^2 + 2 \left[\frac{2}{5} MR^2 + ML^2 \right]$$

1) Επιλογή αδρανειακού συστήματος αναφοράς: Επιλέγω το αδρανειακό σύστημα αναφοράς (O, x, y) , που εικονίζεται στο σχήμα 1. Η αρχή O ταυτίζεται με την αρχική θέση του κέντρου της σφαίρας με την οποία συγκρούεται το σωματίδιο m .

2) Ως προς το (O, x, y) το σύστημα ικανοποιεί τρεις εξισώσεις διατήρησης: Α) της συνολικής ορμής του, Β) της συνολικής ενέργειάς του και Γ) της συνολικής στροφορμής του:

Α) Διατήρηση της ορμής πριν και μετά την κρούση:

$$3M \cdot V_k + m \cdot v_2 = m \cdot v_1 \quad (1)$$

όπου V_2 η ταχύτητα του σωματιδίου (σ) μετά την κρούση. Θεωρώ ότι η μάζα του m είναι πολύ μικρότερη του M , ώστε να συνεχίσει να κινείται επί του άξονα Ox . Ωστόσο η γενίκευση του προβλήματος δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες περιπλοκές.

V_k παριστάνει την ταχύτητα του κέντρου μάζας του σώματος Σ (ράβδος και δύο μπάλες) μετά την κρούση.

Β) Διατήρηση της ενέργειας ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x, y) :

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 + \frac{3}{2} \cdot M \cdot V_k^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \quad (2)$$

όπου I η ροπή αδράνειας του Σ (ερώτημα α) και ω η γωνιακή ταχύτητα του Σ ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x, y) .

Γ) Διατήρηση της στροφορμής ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x, y) (σχήματα 1 και 2): Η αρχική στροφορμή του σ ως προς το (O, x, y) είναι ίση με το μηδέν: $\overline{OL} \times (m \cdot \vec{v}_1) = 0$ (αφού το διάνυσμα θέσης \overline{OL} του σ είναι συγγραμμικό με την ταχύτητά του \vec{v}_1). Η στροφορμή του Σ πριν την κρούση είναι επίσης μηδέν, αφού το Σ είναι αρχικά ακίνητο ως προς το (O, x, y) .

Μετά την κρούση η στροφορμή του σ παραμένει μηδέν ως προς το (O, x, y) , αφού η ταχύτητά του και το διάνυσμα θέσης του εξακολουθούν να είναι συγγραμμικά. Έτσι προκύπτει ότι η στροφορμή του Σ ως προς το (O, x, y) , μετά την κρούση είναι ίση με το μηδέν:

$$3M \cdot \overline{OK} \times \vec{V}_k + I \cdot \vec{\omega} = 0 \quad (3)$$

Επίλυση του συστήματος εξισώσεων 1,2,3:

Από τις 1 και 2, προκύπτει:

$$I \cdot \omega^2 + \left(3M + \frac{9M^2}{m} \right) \cdot V_k^2 - 6M \cdot v_1 \cdot V_k = 0 \quad (4)$$

Από την 3:

$$3M \cdot L \cdot V_k + I \cdot \omega = 0 \quad (5)$$

$$\omega = -\frac{3M \cdot L}{I} \cdot V_k \quad (6)$$

Από τις (4), (6):

$$V_k \cdot \left(\left(\frac{9M^2 \cdot L^2}{I} + 3M + \frac{9M^2}{m} \right) \cdot V_k - 6M \cdot v_1 \right) = 0 \quad (7)$$

Από την 7, έπεται ότι:

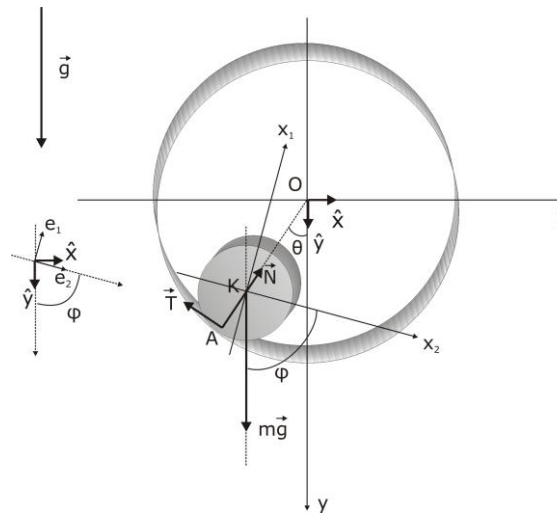
είτε $V_k=0$, οπότε και $\omega=0$, $V_2 = V_1$, που αντιστοιχεί (όπως αναμένεται) στην αρχική -προ της κρούσης- κατάσταση του συστήματος, είτε:

$$V_k = \frac{6v_1}{3 + \frac{9M}{m} \cdot \left(\frac{m \cdot L^2}{I} + 1 \right)} \quad (8)$$

Η γωνιακή ταχύτητα ω προκύπτει από την 6 και την 8.

4. Στην περίμετρο ομοιογενούς κυλινδρικού σώματος Σ , ακτίνας R και μάζας M , είναι τυλιγμένος ελαφρύς σπάγκος. Το σώμα βρίσκεται σε κατακόρυφο ομοιογενές βαρυτικό πεδίο \vec{g} . Το επίπεδο των εδρών του ταυτίζεται με κατακόρυφο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t=0$, το Σ έχει μηδενική ταχύτητα. Το ξετυλιγμένο τμήμα του σπάγκου είναι κατακόρυφο και στο άκρο του A ασκείται σταθερή κατακόρυφη δύναμη \vec{F} , με κατεύθυνση αντίθετη του πεδίου \vec{g} . Να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα του Σ ως συνάρτηση του χρόνου και να βρεθεί η εξίσωση κίνησης του A .
5. Ομοιογενής δίσκος ακτίνας R έχει μάζα m και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο (O,x,y) . Σε συγκεκριμένο σημείο A του δίσκου, που απέχει απόσταση L ($L < R$) από το κέντρο του K , ενεργεί σταθερή δύναμη \vec{F} . Τη χρονική στιγμή $t=0$ η ταχύτητα του K και η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου είναι μηδενικές. Δείξτε ότι αν η γωνία θ_0 που σχηματίζει η διεύθυνση της δύναμης με το OA τη στιγμή $t=0$ είναι μικρή ($\theta_0 < \pi/60 \text{rad}$), τότε ο δίσκος θα κάνει αρμονική στροφική ταλάντωση με συχνότητα $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{F \cdot L}{I_K}}$, όπου I_K η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του. Υπολογίστε την επιτάχυνση του K και τη ροπή αδράνειας I_K .

6. Κυλινδρική στεφάνη ακτίνας R και πλάτους h είναι στερεωμένη με το επίπεδο των κυκλικών εδρών της κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο χώρο υπάρχει κατακόρυφο ομοιογενές πεδίο βαρύτητας \vec{g} . Στο κάτω μέρος της στεφάνης ισορροπεί ομοιογενής κύλινδρος ακτίνας ρ ($< R$), ύψους h (ίσο με το πλάτος της στεφάνης) και μάζας m (σχήμα). Έστω O το κέντρο της στεφάνης και K του κυλίνδρου. Εκτρέπουμε τον κύλινδρο από τη θέση της ισορροπίας του έτσι ώστε η νέα θέση της OK να σχηματίζει με την κατακόρυφη μικρή γωνία θ_0 ($\theta_0 < \pi/60 \text{rad}$) και τον αφήνουμε ελεύθερο. Κατά την κίνησή του, ο κύλινδρος κυλιέται εφαιπόμενος με την εσωτερική επιφάνεια της στεφάνης, χωρίς να ολισθαίνει. Δείξτε ότι το κέντρο του κυλίνδρου θα κάνει αρμονική ταλάντωση και υπολογίστε τη συχνότητά της. Πώς μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα (ω) του κυλίνδρου, η στατική τριβή (T) και η κάθετη αντίδραση (N) της επιφάνειας της στεφάνης σε συνάρτηση με το χρόνο;

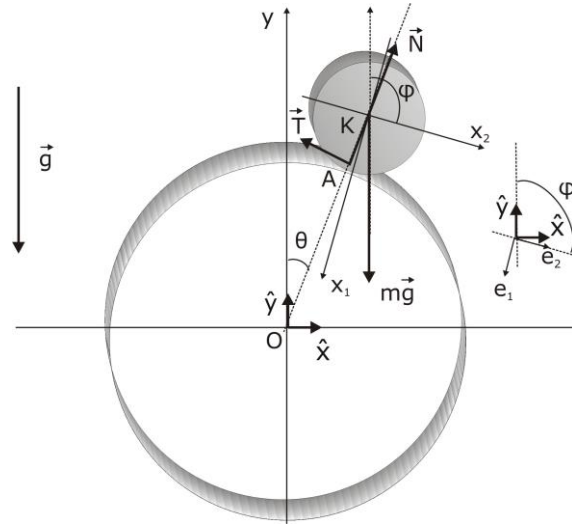


[Εξισώσεις κίνησης του κυλίνδρου, ως προς το αδρανειακό σύστημα (O,x,y)]:

$m \frac{d\vec{V}_K}{dt} = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g}$, $\frac{d}{dt}(I_K \vec{\omega}) = \vec{KA} \times \vec{T}$, όπου $\vec{\omega} = \dot{\phi} \cdot \hat{z}$. ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει το στερεωμένο στον κύλινδρο σύστημα αξόνων (K, e_1, e_2) με το αδρανειακό σύστημα (O, x, y) . Ισχύει $\vec{V}_A = 0$, από την οποία συνεπάγεται η σχέση: $\dot{\theta} \cdot (R - \rho) = \dot{\phi} \cdot \rho$. Η μεταβολή της γωνίας θ σε συνάρτηση με το χρόνο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\ddot{\theta} + \frac{m\rho^2 \cdot g}{(I_K + m\rho^2) \cdot (R - \rho)} \cdot \theta = 0$$

7. Κυλινδρική στεφάνη ακτίνας R και πλάτους h είναι στερεωμένη με το επίπεδο των κυκλικών εδρών της κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο χώρο υπάρχει κατακόρυφο ομοιογενές πεδίο βαρύτητας \vec{g} . Στο ανώτερο σημείο της στεφάνης ισορροπεί ομοιογενής κύλινδρος ακτίνας ρ ($< R$), ύψους h και μάζας m (σχήμα). Έστω O το κέντρο της στεφάνης και K του κυλίνδρου. Εκτρέπουμε λίγο τον κύλινδρο από τη θέση της ισορροπίας του και τον αφήνουμε ελεύθερο. Δείξτε ότι για κάποια τιμή θ_0 της γωνίας που σχηματίζει η OK με την κατακόρυφη, ο κύλινδρος θα χάσει την επαφή του με τη στεφάνη. Υπολογίστε τη θ_0 και τη γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου, τη στιγμή που εγκαταλείπει τη στεφάνη. Όσο ο κύλινδρος εφάπτεται με την εξωτερική επιφάνεια της στεφάνης, κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει.



[Εξισώσεις κίνησης του κυλίνδρου, ενόσω εφάπτεται της στεφάνης: $\dot{\theta} \cdot (R + \rho) = \dot{\phi} \cdot \rho$, $\left(m + \frac{I_k}{\rho^2}\right)(R + \rho)\ddot{\theta} = mg \sin \theta$, $T = \frac{I_k(R + \rho)}{\rho^2} \cdot \ddot{\theta}$, $N = mg \cos \theta - m(R + \rho)\dot{\theta}^2$. Ο κύλινδρος

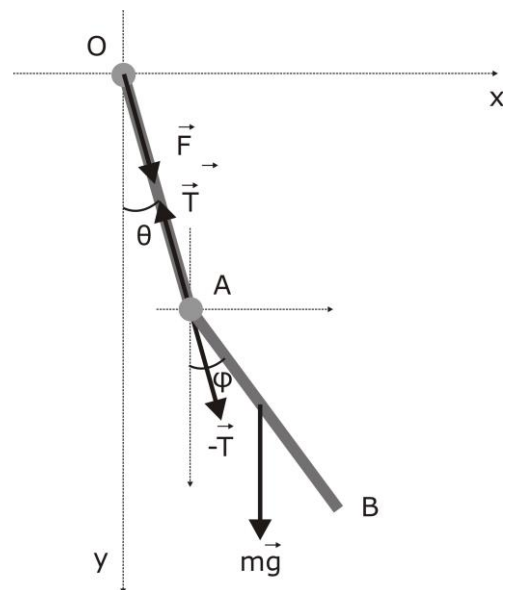
εφάπτεται της στεφάνης εφόσον $\theta < \theta_0$, όπου: $\cos \theta_0 = \frac{2}{3 + \frac{I_k}{m\rho^2}}$]

8. Επίπεδη σανίδα πάχους h , ακανόνιστου σχήματος έχει μάζα m . Η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό της που διέρχεται από το κέντρο μάζας της K είναι I_k . Η σανίδα βρίσκεται με το επίπεδό της κατακόρυφο εντός ομοιογενούς βαρυτικού πεδίου \vec{g} και αναρτάται από οριζόντιο σταθερό άξονα O , που απέχει από το K απόσταση L .

- a. Δείξτε ότι αν εκτρέψουμε τη σανίδα από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας της κατά μικρή γωνία θ_0 και την αφήσουμε ελεύθερη, θα κάνει στροφική αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας της. Υπολογίστε τη συχνότητα της ταλάντωσης.

- b. Υποδείξτε τρόπο μέτρησης της ροπής αδράνειας I_k της σανίδας.

9. Διπλό εκκρεμές αποτελείται από δύο ράβδους ίσου μήκους L , συνδεδεμένες με άρθρωση A , όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι ράβδοι κινούνται στο κατακόρυφο επίπεδο (O, x, y) . Η OA μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το σταθερό οριζόντιο άξονα Oz . Οι ράβδοι περιστρέφονται γύρω από τα O και A με αμελητέες τριβές. Η OA έχει αμελητέα μάζα σε σχέση με τη μάζα m της



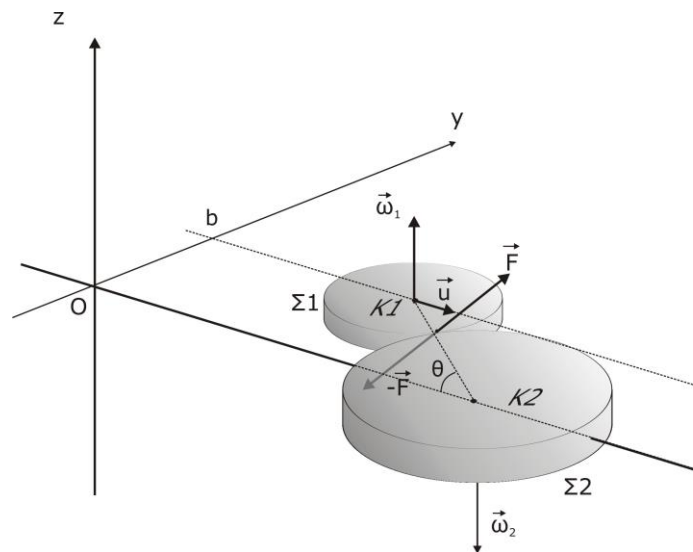
AB. Τη χρονική στιγμή $t=0$, η ράβδος OA σχηματίζει με τον άξονα Oy γωνία $\theta_0=0$ και AB γωνία φ_0 τέτοια ώστε στις εξισώσεις κίνησης να είναι επιτρεπτή η διατήρηση όρων μέχρι και πρώτης τάξης ως προς τη φ_0 . Το πεδίο βαρύτητας είναι κατακόρυφο, μέτρου g . Δείξτε ότι οι γωνίες θ και φ προκύπτουν ως λύσεις των εξισώσεων:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgL}{2I_A} \cdot \varphi = 0$$

$$\ddot{\theta}(1 + \theta^2) + \frac{g}{L} \cdot \theta = \frac{\Phi_0 \Omega^2}{2} \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

$$\text{όπου: } \Omega \equiv \sqrt{\frac{mgL}{2I_A}}$$

10. Στο επίπεδο (O, x, y) αδρανειακού συστήματος (O, x, y, z) , κινούνται δύο ομοιογενή κυλινδρικά άκαμπτα σώματα Σ_1, Σ_2 , ίδιου ύψους h (σχήμα). Έστω K_1, K_2 τα κέντρα, R_1, R_2 οι ακτίνες και m_1, m_2 οι μάζες των δύο σωμάτων. Το Σ_2 είναι ακίνητο ως προς το αδρανειακό σύστημα (O, x, y, z) , με το κέντρο του πάνω στο άξονα Ox . Το κέντρο K_1 του Σ_1 κινείται σε ευθεία παράλληλη με τον άξονα Ox , που διέρχεται από το σημείο του Oy με τεταγμένη b , όπου $0 < b < R_2$. Η ταχύτητα του K_1 είναι $\vec{u} = u \cdot \hat{x}$ με $u > 0$. Το Σ_1 περιστρέφεται με σταθερή



γωνιακή ταχύτητα ω . Η γωνιακή ταχύτητα του Σ_2 είναι ίση με μηδέν. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 συγκρούονται τη χρονική στιγμή T . Κατά το απειροστό χρονικό διάστημα $[T, T + \Delta T]$, που διαρκεί η κρούση, τα Σ_1 και Σ_2 αλληλεπιδρούν με ισχυρές δυνάμεις Νευτωνικού τύπου \vec{F} και $-\vec{F}$ που έχουν πεπερασμένες ωθήσεις $\vec{\Omega} = \Omega_x \cdot \hat{x} + \Omega_y \cdot \hat{y}$ και $-\vec{\Omega}$, αντίστοιχα (εφαρμογή 1, κεφαλαίου 4). Δείξτε ότι αν γνωρίζουμε την ταχύτητα $\vec{u}' = u'_x \cdot \hat{x} + u'_y \cdot \hat{y}$ του κέντρου K_1 του Σ_1 μετά την κρούση, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα \vec{v} του K_2 και τις γωνιακές ταχύτητες ω'_1, ω'_2 των Σ_1, Σ_2 μετά την κρούση, καθώς και τις ωθήσεις των δυνάμεων αλληλεπίδρασης. [Οι δυνάμεις τριβής είναι αμελητέες. Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης δεν είναι κατ' ανάγκη κάθετες στην κοινή εφαιπτόμενη των δύο κυλίνδρων, κατά τη διάρκεια της κρούσης]

Υπόδειξη: Από τις εξισώσεις κίνησης κάθε κυλίνδρου, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$m_1(u'_x - u) = \Omega_x, \quad m_1 u'_y = \Omega_y, \quad I_{K1}(\omega'_1 - \omega) = R_1(\Omega_y \cos \theta + \Omega_x \sin \theta)$$

$$\sin \theta = b / (R_1 + R_2)$$

$$m_2 v_{2x} = -\Omega_x, \quad m_2 v_{2y} = -\Omega_y, \quad I_{K2} \omega'_2 = R_2(\Omega_y \cos \theta + \Omega_x \sin \theta)$$

Βιβλιογραφία

1. Buck R.G. Advanced Calculus. McGraw-Hill, 2nd Edition 1965
2. Butkov E. Mathematical Physics. Addison-Wesley publishing company, 1973
3. Chalmers A.F. Τι είναι αυτό που το λέμε επιστήμη; Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 1992
4. Dubrovin B.A., Fomenko A.T., Novikov S.P. Modern Geometry - Methods and Applications, Part 1. Springer, 2nd Edition 1992
5. Duhem Pierre. The aim and structure of Physical theory. Princeton University Press, 1991
6. Fetter A., Walecka J. Theoretical Mechanics of Particles and Continua. Dover, 2003
7. Feynman R. Lectures on Physics vol. 1. Addison-Wesley, 1975
8. Goldstein H. Classical Mechanics. Narosa Publishing House, 2nd ed. 1994υ6,
9. Kibble TWB. Classical Mechanics. Longman Scientific & Technical, 3rd edition 1985
10. Kuhn T. Η δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων. Σύγχρονα Θέματα, έκδοση θ', 1996
11. Kuhnel W. Differential Geometry. AMS 2006
12. Lanczos C. The variational principles of mechanics. Dover books, 4th ed. 1970
13. Landau L.D. and Lifshitz E.M. Mechanics. Pergamon Press, 2^d edition, 1969
14. Landau L.D. and Lifshitz E.M. The classical theory of fields. Pergamon Press, 4th edition, 1975
15. Ο' Neil B. Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2002
16. Psillos S. Philosophy of science A-Z. Edinburgh University Press, 2007
17. Wittgenstein L. Φιλοσοφικές Έρευνες. Εκδόσεις Παπαζήση 1977.
18. Αυγελής Ν. Εισαγωγή στη φιλοσοφία της επιστήμης. Θεσσαλονίκη 2005
19. Βέικος Θ. Αναλυτική Φιλοσοφία. Εκδόσεις Σμίλη, Αθήνα 1990
20. Κάππος Δ. Διαφορικές εξισώσεις. Copyright 1963 by D. A. Kappos, Αθήνα 1966, έκδοση Β'
21. Logan D.J. Εφαρμοσμένα Μαθηματικά. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2002

Κατάλογος όρων

Αδρανειακό σύστημα αναφοράς: 1.1A

Άκαμπτο σώμα: 1.1

Απομονωμένο σύστημα άκαμπτων σωμάτων: 3.2Γ

Βαθμοί ελευθερίας: 1.1A

Γωνιακή ταχύτητα: 1.2A

Δεύτερος νόμος του Newton: 1.1A

Διανυσματικό πεδίο: 1.1A

Διατήρηση της μηχανικής ενέργειας άκαμπτου σώματος: 3.1Δ

Διατήρηση της ορμής συστήματος άκαμπτων σωμάτων: 3.2Γ

Διατήρηση της στροφορμής συστήματος άκαμπτων σωμάτων: 3.3B

Δυναμική ενέργεια: 3.1Δ

Ελεύθερο σωματίδιο: 1.1A

Εξισώσεις κίνησης δισδιάστατου άκαμπτου σώματος: 1.3

Εξωτερικές δυνάμεις σε σύστημα σωμάτων: 1.1A

Εξωτερικό γινόμενο: Ένθετο 1 και 4 στο τέλος του κεφαλαίου 1

Έργο δύναμης: 3.1A

Εσωτερικές δυνάμεις σε σύστημα σωμάτων: 1.1A

Ευκλείδειος χώρος: 1.1A

Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας άκαμπτου σώματος: 3.1A

Θεώρημα του Steiner: Ένθετο 1.3.1

Θεώρημα ώθησης - ορμής: 3.2B

Θεωρητικό μοντέλο: Εισαγωγή

Ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα: Ένθετο 2 στο τέλος του κεφαλαίου 1

Ιδιοστροφορμή άκαμπτου σώματος: 3.3A

Ιδιοτιμές ενός πίνακα: Ένθετο 2 στο τέλος του κεφαλαίου 1

Ισορροπία και Στατική Ισορροπία άκαμπτου σώματος: 2.1A

Κέντρο μάζας: 1.3A

Κινητική ενέργεια άκαμπτου σώματος: 3.1A, 3.1B

Κινητική κατάσταση άκαμπτου σώματος: Ένθετο 2.1.1 και 3.1.2

Κρούση δύο σωμάτων: Εφαρμογές 4.3, 4.4, 4.5

Μηχανική ενέργεια: 3.1Δ

Μηχανικό σύστημα: 1.1A

Ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων: 3.1A

Ορμή άκαμπτου σώματος: 3.2A

Ορμή συστήματος σωμάτων: 3.2Γ

Πίνακας στροφής: Ένθετο 2 στο τέλος του κεφαλαίου 1

Πρώτος νόμος του Newton: 1.1A

Ροπή αδράνειας: 1.3B

Ροπή δύναμης: 1.3B

Ροπή ζεύγους δυνάμεων: Ένθετο 2.1.2

Στιγμιαία αδρανειακό σύστημα αναφοράς: Ένθετο 1.3.3

Στιγμιαίος άξονας περιστροφής: Ένθετο 2 στο τέλος του κεφαλαίου 1

Στροφορμή σωματιδίου: 1.3B

Στροφορμή συστήματος άκαμπτων σωμάτων: 3.3B

Συμμετρικός ενός πίνακα: Ένθετο 2 στο τέλος του κεφαλαίου 1

Συνθήκες Ισορροπίας άκαμπτου σώματος: 2.1B

Συνισταμένη ομοεπίπεδων δυνάμεων: Εφαρμογή 2.2.1

Σύστημα αξόνων στερεωμένο στο άκαμπτο σώμα: 1.3A

Σύστημα σωμάτων: 1.1A, 3.2, 3.3

Ταχύτητα σωματιδίου άκαμπτου σώματος: 1.2A

Τρίτος νόμος του Newton: 1.1A

Τροχιακή στροφορμή άκαμπτου σώματος: 3.3A

Χρόνος στην Νευτώνεια Μηχανική: 1.1A

Ώθηση δύναμης: 3.2B

ISBN 978-960-93-4189-9