

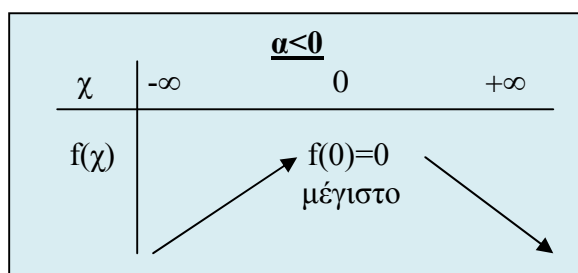
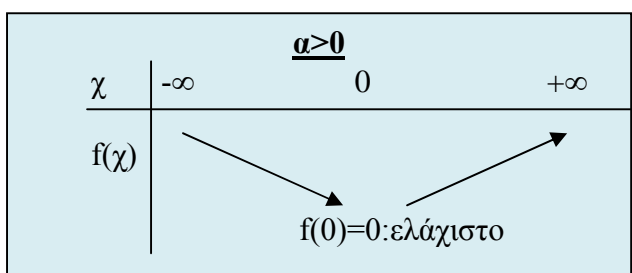
7. ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

7.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x)=ax^2$, $a \neq 0$

Πεδίο ορισμού: $A=\mathbb{R}$

Είναι **άρτια** συνάρτηση και επομένως η γραφ. παράστασή της έχει **άξονα συμμετρίας** τον $y'y$.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ—ΑΚΡΟΤΑΤΑ

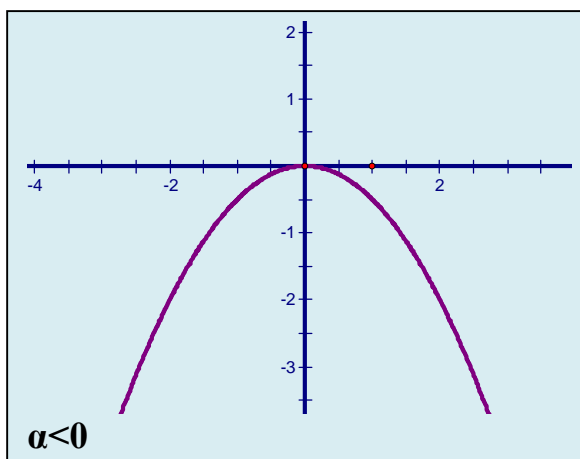
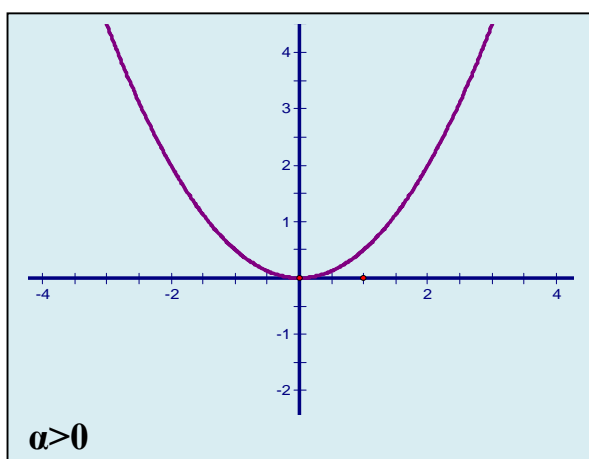


Δηλαδή: αν $\alpha > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ ενώ

αν $\alpha < 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

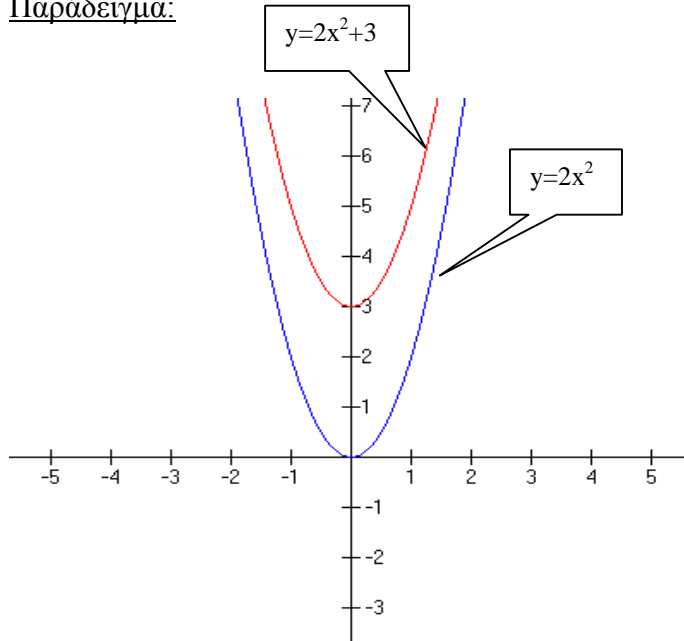
Η γραφική της παράσταση είναι μία **παραβολή** με άξονα συμμετρίας τον $\psi'\psi$ και **κορυφή** την αρχή O , όπως φαίνεται από τα παρακάτω.



ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ: $f(x)=ax^2+k, a \neq 0$.

Κάνουμε την γραφική παράσταση της $y=ax^2$ και στη συνέχεια μετατόπισή της παράλληλα στον $y'y$ κατά k μονάδες (προς τα πάνω αν $k>0$ και προς τα κάτω αν $k<0$).

Παράδειγμα:

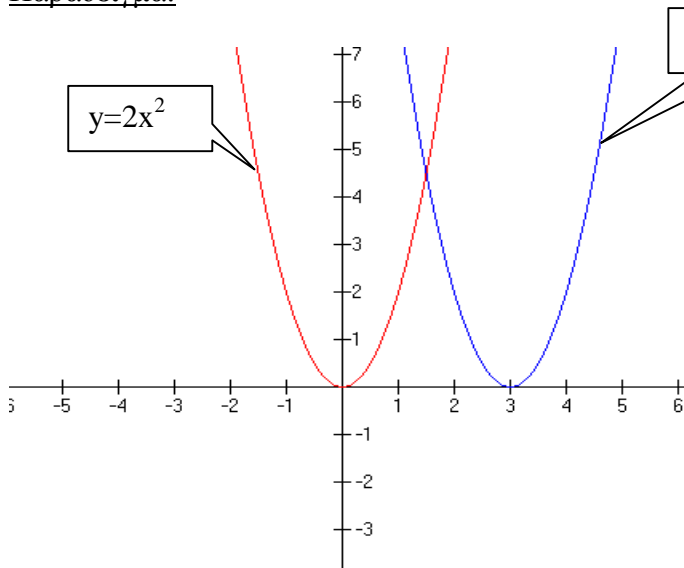


Για να γίνει η γραφ. παράσταση της $y=2x^2+3$, κάνω πρώτα την γραφ. παράσταση της $y=2x^2$ και στην συνέχεια την μετατοπίζω παράλληλα στον $y'y$ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ: $f(x)=a(x-p)^2, a \neq 0$.

Κάνουμε την γραφική παράσταση της $y=ax^2$ και στη συνέχεια μετατόπισή της παράλληλα στον $x'x$ κατά p μονάδες (προς τα δεξιά αν $p>0$ και προς τα αριστερά αν $p<0$).

Παράδειγμα:

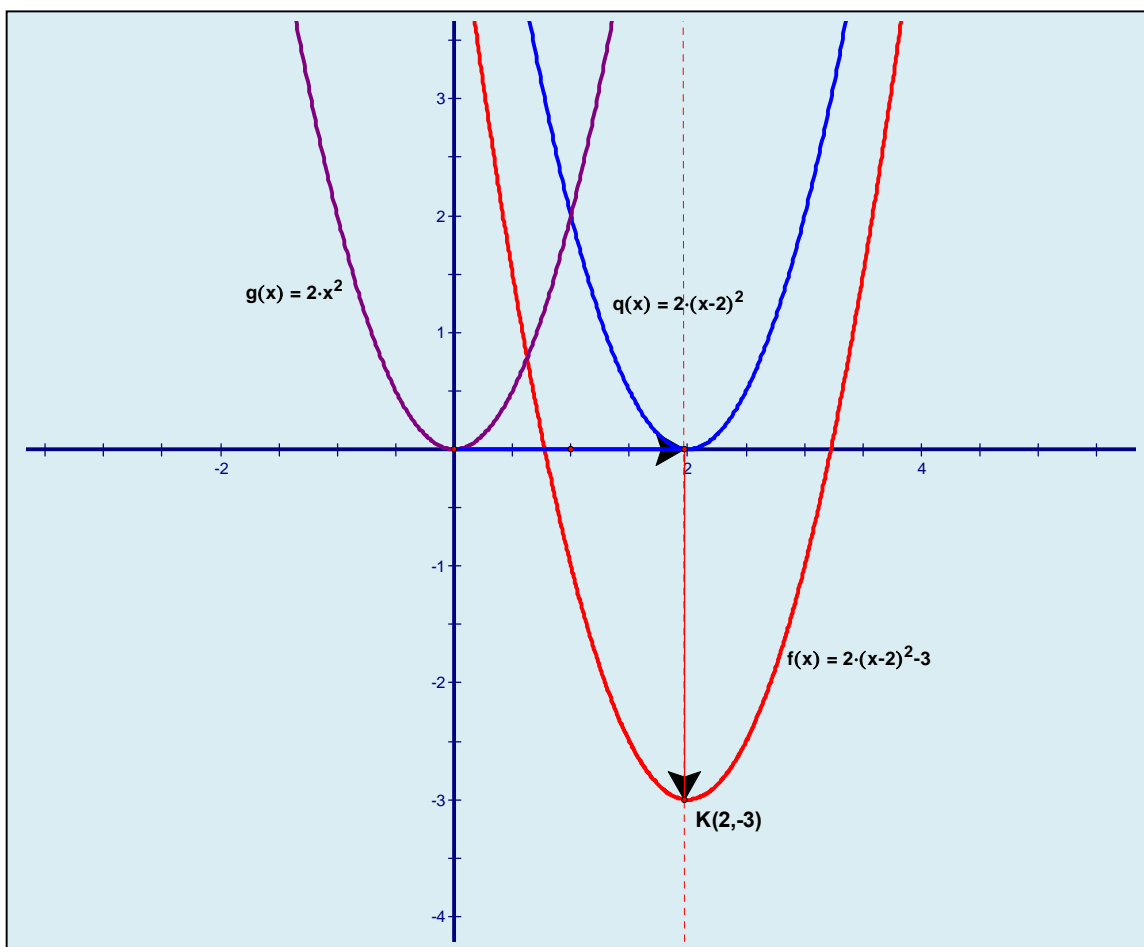


Για να γίνει η γραφ. παράσταση της $y=2(x-3)^2$, κάνω πρώτα την γραφ. παράσταση της $y=2x^2$ και στην συνέχεια την μετατοπίζω παράλληλα στον $x'x$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά.

7.3 ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ:

$$f(x)=ax^2+\beta x+\gamma, a\neq 0.$$

Η συνάρτηση $f(x)=2x^2-8x+5$ παίρνει τη μορφή $f(x)=2(x-2)^2-3$ οπότε η γραφική παράσταση της προκύπτει από τη $y=2x^2$, την οποία μετατοπίζουμε αρχικά κατά 2 μονάδες παράλληλα προς τον x , ώστε να προκύψει η $y=2(x-2)^2$ και στη συνέχεια κατά -2 μονάδες παράλληλα στον y οπότε προκύπτει η παραβολή με κορυφή το σημείο $K(2,-3)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=2$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Με ανάλογο τρόπο ο τύπος της συνάρτησης $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma, a\neq 0$ παίρνει τη μορφή

$$f(x) = a\left(x + \frac{\beta}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},$$

οπότε η συνάρτηση παριστάνεται γραφικά από μια **παραβολή**

με **άξονα συμμετρίας** την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2a}$ και **κορυφή** το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

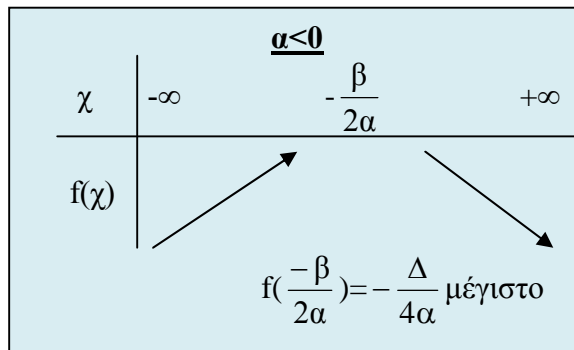
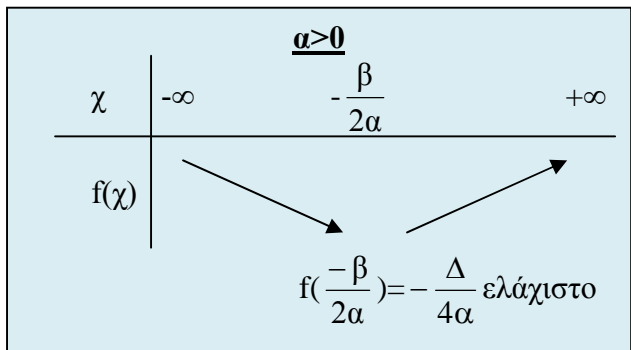
Η παραβολή αυτή τέμνει τον άξονα x στα σημεία του που έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0$ και τον άξονα y στο σημείο $(0,f(0))$.

Η μονοτονία καθώς και τα ακρότατά της φαίνονται στους παρακάτω πίνακες και η γραφική της παράσταση γίνεται άμεσα όπως στο παράδειγμα.

$$f(x)=ax^2+\beta x+\gamma, a\neq 0.$$

Πεδίο ορισμού: $A=\mathbb{R}$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ—ΑΚΡΟΤΑΤΑ



ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Η γραφική της παράσταση είναι μία **παραβολή** με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

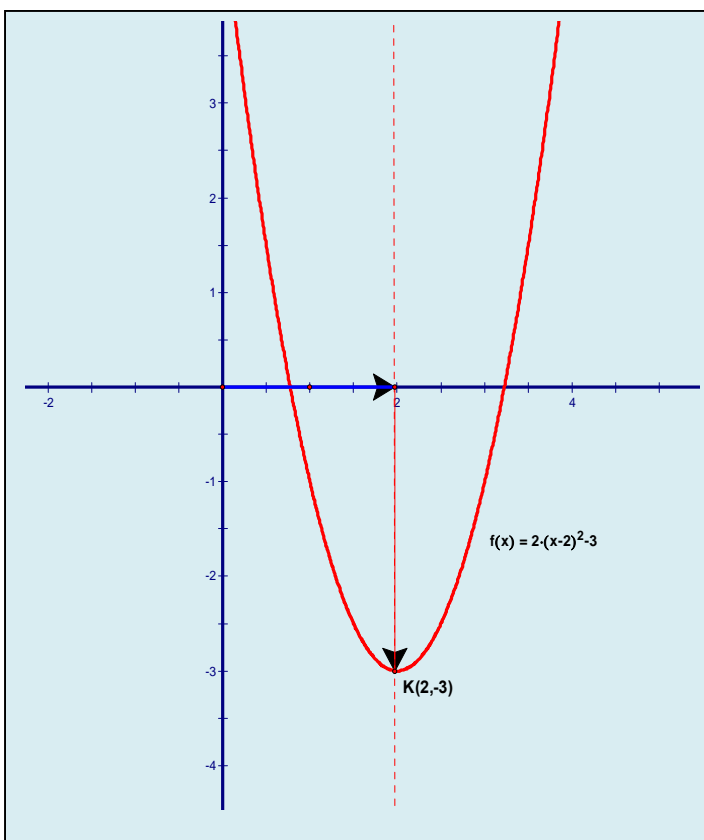
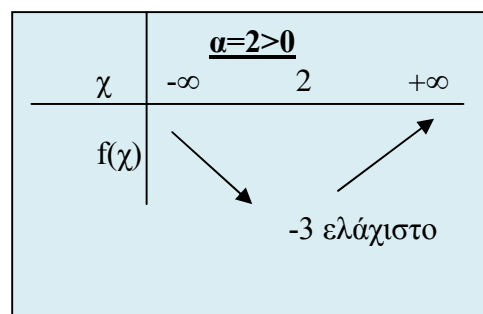
και **κορυφή** το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$, όπως φαίνεται από τα παρακάτω. Τέμνει τον άξονα

x ' x στα σημεία του που έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2+\beta x+\gamma=0$ και τον άξονα y ' y στο σημείο $(0,f(0))$.

Παράδειγμα:

Η συνάρτηση $f(x)=2x^2-8x+5$ έχει: $a=2>0$

$-\frac{\beta}{2\alpha}=2$ και $-\frac{\Delta}{4\alpha}=-3$. Επομένως έχουμε τον πίνακα μεταβολών.



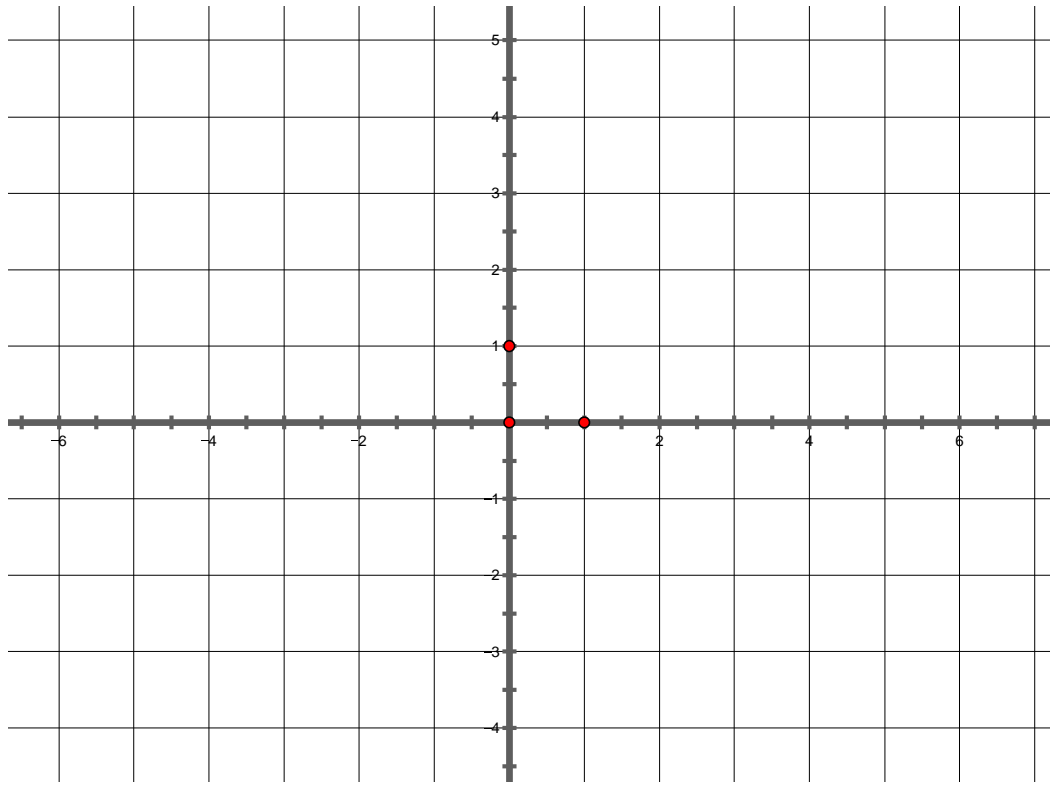
Δηλαδή η συνάρτηση f

- _ είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και
- γνησίως αύξουσα** στο $[2, +\infty)$.
- _ για $x=2$ παρουσιάζει **ελάχιστο** το $f(2)=-3$
- _ έχει **κορυφή** το σημείο $K(2, -3)$ και **άξονα συμμετρίας** την ευθεία $x=2$.

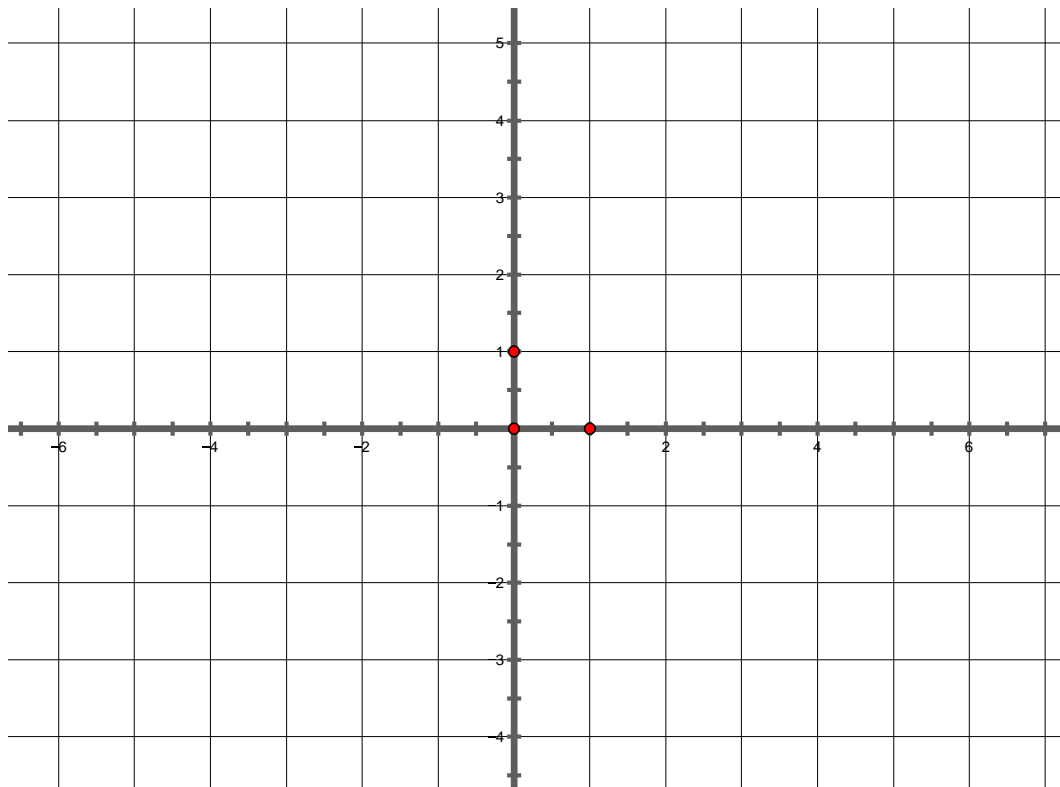
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

α) $y = 3x^2$ και $y = -3x^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

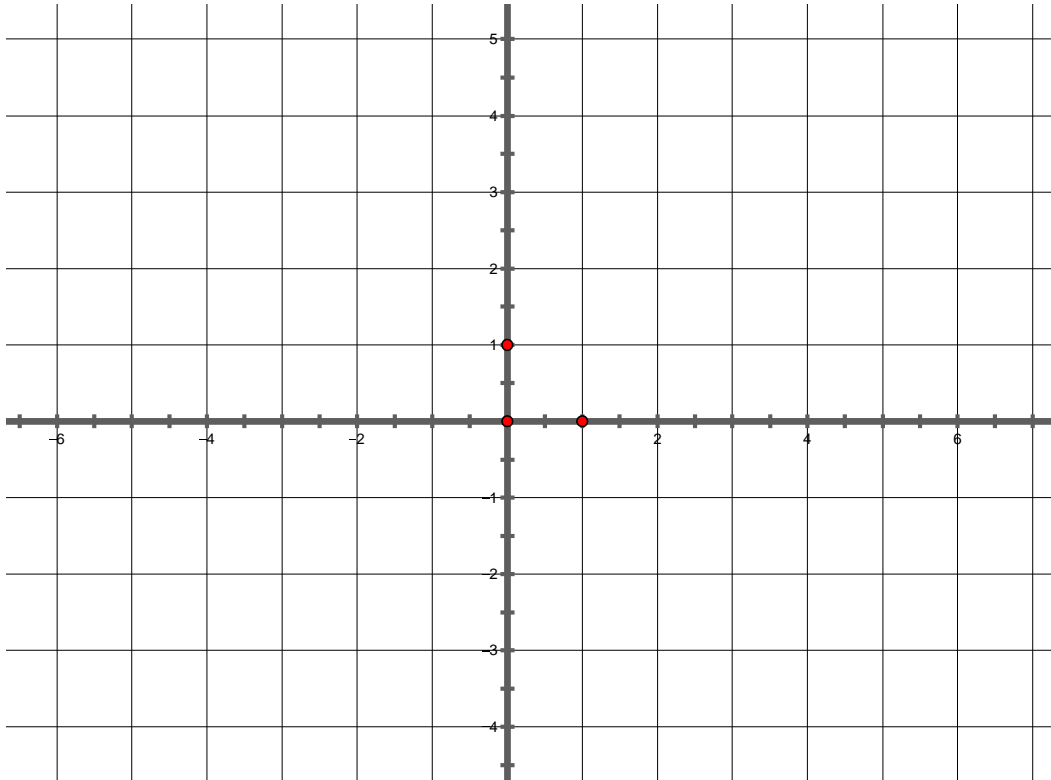


β) $y = 3x^2$ και $y = \frac{1}{3}x^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

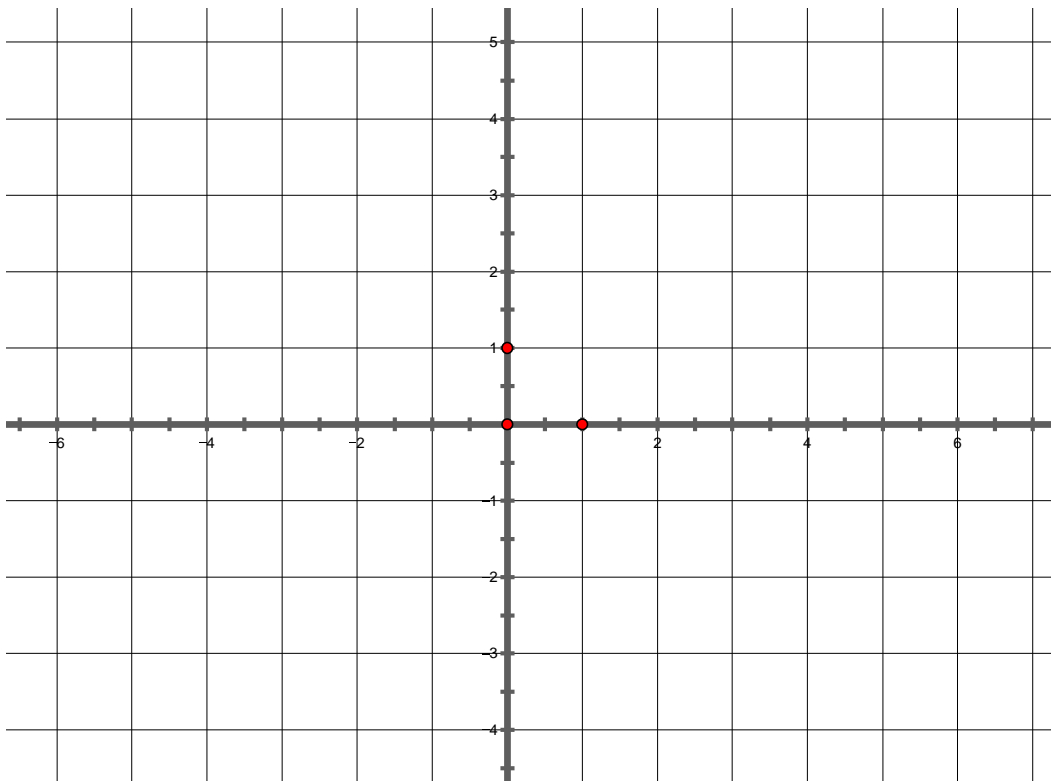


2) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $y = 3x^2 - 2$ και $y = 3(x-2)^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

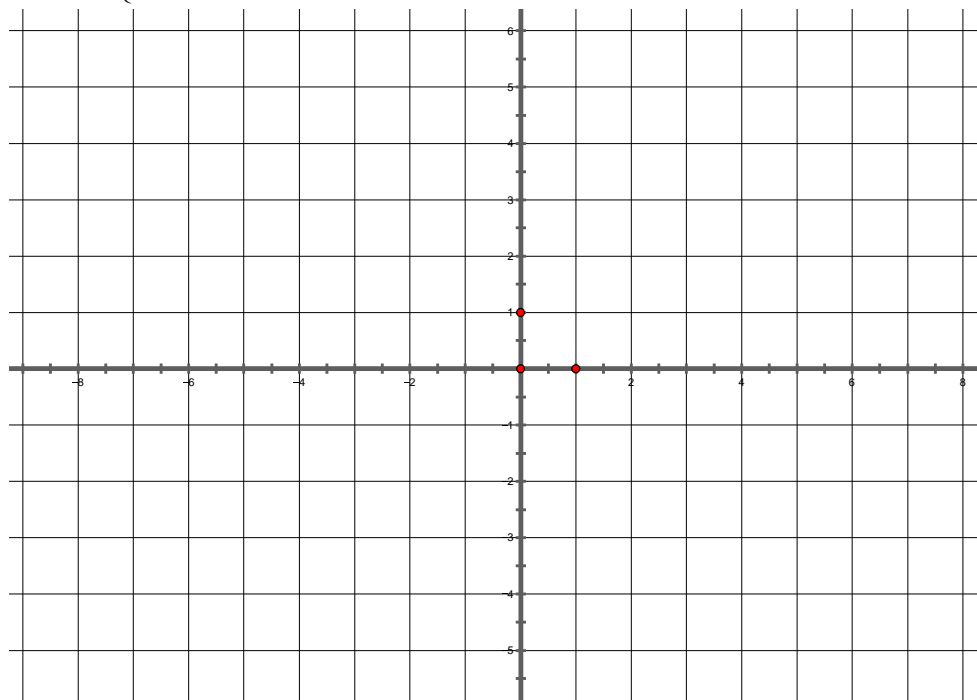


β) $y = -3x^2 + 2$ και $y = -3(x+2)^2$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

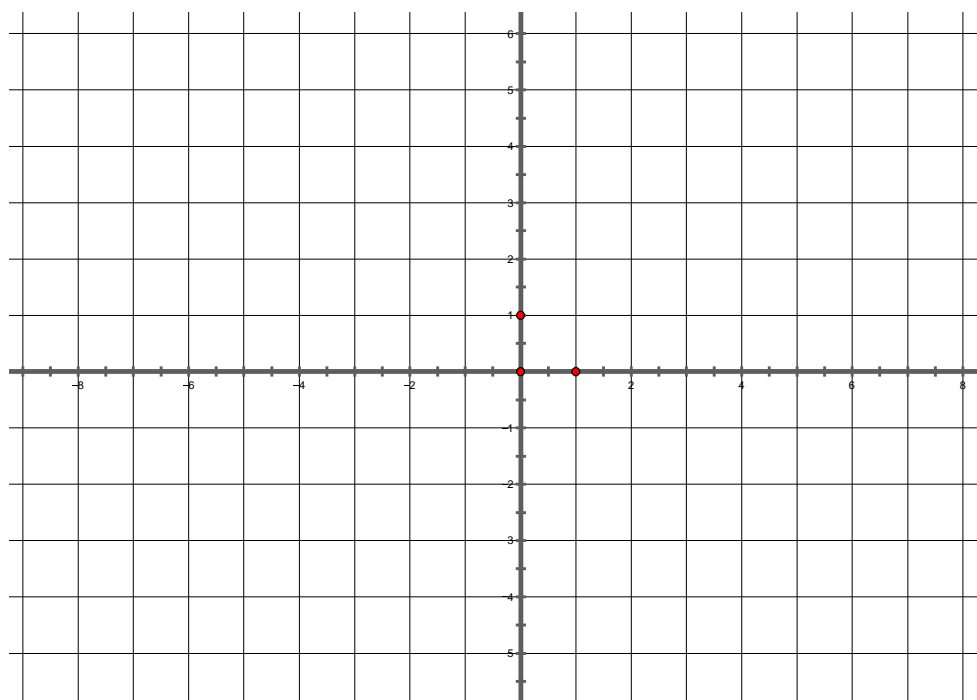


3) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 1 \\ 2x^2, & x > 1 \end{cases}$$



$$\beta) g(x) = \begin{cases} 3x + 5, & x \leq -2 \\ -2, & -2 < x \leq 1 \\ -2x^2, & x > 1 \end{cases}$$



4) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

i) $f(x)=x^2-3x+2$

ii) $g(x)= -2x^2-12x-20$.

