ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Η συνεπαγωγή

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, ***όταν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q***, τότε λέμε ότι:

« ***ο P συνεπάγεται τον Q*** » και γράφουμε $\boxed{\mathbf{P \Rightarrow Q}}$.

Παράδειγμα: $x=3 \Rightarrow x^2=9$.

Ο ισχυρισμός **« P ⇒Q »** λέγεται συνεπαγωγή και πολλές φορές διαβάζεται ***«αν P, τότε Q».***

Ο P λέγεται ***υπόθεση*** της συνεπαγωγής, ενώ ο Q λέγεται ***συμπέρασμα*** αυτής.

Η Ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, ***όταν αληθεύει ο ένας από τους δύο, να αληθεύει και ο άλλος***, τότε λέμε ότι:

« ο P συνεπάγεται τον Q και αντιστρόφως » ή,

« ***ο P είναι ισοδύναμος με τον Q*** » και γράφουμε: $\boxed{\mathbf{P \Leftrightarrow Q}}$.

Παράδειγμα: $x=0 \Leftrightarrow x^2=0$.

Ο ισχυρισμός **P ⇔Q** λέγεται ***ισοδυναμία*** και αρκετές φορές διαβάζεται

«P αν και μόνο αν Q».

Ο σύνδεσμος «ή»

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P ή Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που ***ένας τουλάχιστον από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει***.

$$\boxed{\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0}$$

Ο ισχυρισμός «P ή Q» λέγεται ***διάζευξη των P και Q*** .

Για παράδειγμα η εξίσωση $(x^2 - 2x)(x^2 - 4)=0$ αληθεύει, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες $(x^2 - 2x)$ και $(x^2 - 4)$ είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η διάζευξη: $(x^2 - 2x = 0$ ή $x^2 - 4 = 0)$ ⇔ $(x=0$ ή $x=2$ ή $x=-2)$.

Ο σύνδεσμος «και»

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός P και Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που ***και οι δύο ισχυρισμοί αληθεύουν***.

$$\boxed{\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0}$$

Ο ισχυρισμός **«*P* και *Q*»** λέγεται **σύζευξη των *P* και *Q***

Για παράδειγμα η εξίσωση $(x^2 - 2x)^2+(x^2 - 4)^2 = 0$ αληθεύει, αν και μόνο αν και οι δύο όροι $(x^2 - 2x)$ και $(x^2 - 4)$ είναι ίσοι με το μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η σύζευξη : $(x^2 - 2x = 0$ και $x^2 - 4 = 0)$ ⇔ $x=2$.

Σύνολα

Σύνολο είναι μια συλλογή, μια ομάδα από αντικείμενα, διαφορετικά (διακεκριμένα) μεταξύ των, που τα θεωρούμε σαν ένα πράγμα, σαν μια ολότητα.
Ο παραπάνω ορισμός δόθηκε από τον Cantor.
Το σύνολο θα πρέπει να είναι ***«καλά ορισμένο ή καθορισμένο»,*** δηλαδή τα αντικείμενα που το απαρτίζουν θα πρέπει να αναγνωρίζονται μεταξύ τους, να καταλαβαίνουμε δηλαδή αν ένα αντικείμενο είναι ή δεν είναι στοιχείο του συνόλου.

Παραδείγματα συνόλων

- Το σύνολο των μαθητών της Α' Λυκείου του $2^{ου}$ Λυκείου Πεύκης.
- Οι νομοί της Κρήτης.
- Οι κάτοικοι ενός χωριού.
- Τα μέλη μίας οικογένειας.
- Το σύνολο Ν των φυσικών αριθμών
- Το σύνολο Ζ των ακέραιων αριθμών
- Το σύνολο Q των ρητών αριθμών.
- Το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.

Ο ***συμβολισμός*** ενός συνόλου δηλώνεται με ένα κεφαλαίο γράμμα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου (π.χ Α ,Β ,Γ, ...), ενώ τα αντικείμενα από τα οποία αποτελείται το σύνολο ονομάζονται ***στοιχεία ή μέλη*** του συνόλου και δηλώνονται με μικρά γράμματα των παραπάνω αλφαβήτων. Τα ***στοιχεία*** γράφονται μέσα σε άγκιστρα.
Π.χ. Το σύνολο Α = {α,β,γ}, Β={x,y,1,2}

Τα στοιχεία ενός συνόλου τα γράφουμε με οποιαδήποτε σειρά θέλουμε, δηλαδή δεν μας ενδιαφέρει ποιο θα γράψουμε πρώτο, ποιο δεύτερο, τρίτο κ.λ.π.

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

■ Το σύμβολο $\in$ διαβάζεται ***«ανήκει»*** ή **«είναι στοιχείο του συνόλου»** ή **«περιέχεται** στο σύνολο...» και χρησιμοποιείται για να δηλώσουμε ότι το στοιχείο π.χ. α είναι στοιχείο του συνόλου Α.
Γράφουμε: **$\alpha \in$ Α.**

■ Το σύμβολο $\notin$ διαβάζεται ***«δεν ανήκει»*** ή ***«δεν είναι στοιχείο του συνόλου»*** .
Γράψουμε, **$\alpha \notin$ Α.**
Για παράδειγμα αν Α={ α. β , γ, δ }, τότε ισχύει: $ο \notin A$, $9 \notin A$, $\alpha \in A$, $\delta \in A$.

Παράσταση ενός συνόλου

Μπορούμε να παραστήσουμε ένα σύνολο Α με τους εξής παρακάτω τρόπους.

1. Με αναγραφή των στοιχείων του

Κατά τον τρόπο *αυτό*, γράφουμε τα στοιχεία του συνόλου Α μέσα σε άγκιστρα, μια φορά το καθένα, και τα χωρίζουμε μεταξύ τους με το κόμμα.

Παραδείγματα

- Το σύνολο Α ={α. β, ω , κ}
- Το σύνολο Ν= {0,1,2,3,4,...] των φυσικών αριθμών.
- Το σύνολο Ζ= {…,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...] των ακέραιων αριθμών.

2. Με περιγραφή των στοιχείων του

Αν τα στοιχεία του συνόλου έχουν κάποια χαρακτηριστική ιδιότητα, τότε το σύνολο Α δηλώνεται με τον τρόπο αυτό, ως εξής:

Γράφουμε τα άγκιστρα και μέσα σ' αυτά τοποθετούμε ένα γράμμα χ και στην συνέχεια δηλώνουμε την χαρακτηριστική ιδιότητα του χ.

Παραδείγματα

- Το σύνολο των άρτιων φυσικών, γράφεται ως εξής: Α={χ / χ είναι άρτιος φυσικός} ή Α = {χ/χ = 2κ, κ$\in$*N*}.

Το πλήθος τω ν στοιχείων ενός συνόλου Α ονομάζεται ***πληθικός αριθμός*** ή ***πληθάριθμος*** του συνόλου Α και συμβολίζεται με **Ν(Α).**

Κενό σύνολο

Είναι το σύνολο που ο πληθικός του αριθμός είναι ο φυσικός αριθμός 0 ή διαφορετικά, το σύνολο εκείνο που **δεν περιέχει *στοιχεία.***

Το κενό σύνολο συμβολίζεται με το σύμβολο: $\varnothing$ ή **{ }.** Ισχύει: **Ν($\varnothing$) = 0.**

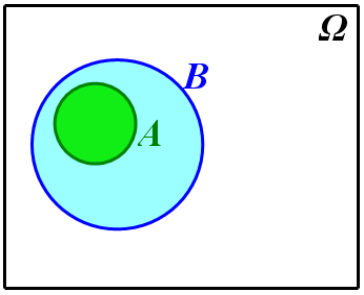
Ίσα σύνολα

Δυο σύνολα Α και Β θα λέγονται **ίσα** και θα το συμβολίζουμε με το σύμβολο Α = Β , αν κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του Β, και κάθε στοιχείο του συνόλου Β είναι και στοιχείο του Α, δηλαδή αν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

- Αν Α = {α,β,γ} και Β = { α, γ, β} τότε Α = Β
- Αν Α = {χ/χ-1 = 0, χ$\in$Ζ} και Β = {1} τότε Α = Β.

Υποσύνολο ενός συνόλου

Ένα σύνολο Α θα λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β και θα το συμβολίζουμε με το σύμβολο Α$\subseteq$Β, αν κάθε στοιχείο του συνόλου Α είναι και στοιχείο του Β.



Παραδείγματα

- Αν Α = {α,β,γ} και Β = { κ, α, 1, γ, β , 2} τότε Α$\subseteq$Β
- Αν Α = {χ/χ ,χ$\in$Q},τότε Α$\subseteq$R
- Ισχύουν οι σχέσεις: Ν $\subseteq$ Ζ $\subseteq$Q$\subseteq$R.

Βασικές ιδιότητες του υποσυνόλου

Η έννοια του υποσυνόλου, είναι μία σχέση η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

Α $\subseteq$ **Α ,** για κάθε σύνολο (αυτοπαθής ή ανακλαστική).

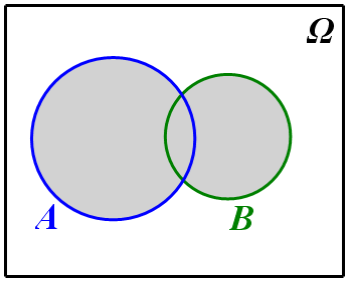
Αν **Α**$\subseteq$**Β** και **Β**$\subseteq$**Γ**, τότε **Α**$\subseteq$**Γ** (μεταβατική) .

Αν **Α**$\subseteq$**Β** και **Β**$\subseteq$**Α** ,τότε **Α= Β** (αντισυμμετρική).

Πράξεις συνόλων

Έστω Ω ένα ***βασικό*** (καθολικό) σύνολο και Α, Β δύο υποσύνολα του.

1. Η ένωση συνόλων



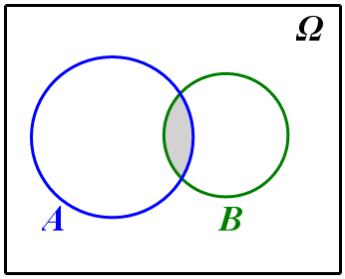
Με την βοήθεια των συνόλων Α και Β ορίζουμε ένα νέο σύνολο που το συμβολίζουμε με Α$\cup$Β και το ονομάζουμε **ένωση** των συνόλω ν Α και Β.

Το σύνολο **Α**$\cup$**Β** περιέχει εκείνα **τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα σύνολα Α, Β.**

Συμβολικά: **Α**$\cup$**Β ={**$\chi\in$**Ω/** $\chi\in$**Α ή** $\chi\in$**Β} .**

- Αν Α ={α, β , γ} και Β={ 1 , α, κ, β , χ} τότε Α$\cup$Β = {α, β, γ, 1, κ , χ}
- Αν Α ={1 , 2} και Β={$\chi\in$R / χ^2-4 = 0} , τότε Α$\cup$Β = {1 ,2,-2}.

2. Η τομή συνόλων



Με την βοήθεια των συνόλων Α και Β ορίζουμε ένα νέο σύνολο που το συμβολίζουμε με Α$\cap$Β και το ονομάζουμε **τομή** των συνόλων Α και Β.

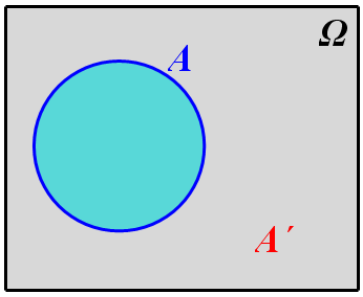
Το σύνολο **Α**$\cap$**Β** περιέχει **τα κοινά στοιχεία των συνόλων Α, Β.**

Συμβολικά: **Α**$\cap$**Β = {x** $\in$**Ω /** $\chi\in$**Α και** $\chi\in$**Β}.**

- Αν Α = {α, β , γ) και Β = { 1 , α, κ, β , χ} τότε
  Α$\cap$Β ={α, β }
- Αν Α = {1, 2} και Β = {$\chi\in$R / χ^2-1 = 0} , τότε: Α$\cap$Β = {1 }.

Δύο σύνολα Α και Β θα λέγονται ***ξένα*** μεταξύ τους αν Α$\cap$Β =$\varnothing$, δηλαδή αν δεν έχουν κοινά στοιχεία.

3. Το συμπλήρωμα ενός συνόλου



Με την βοήθεια του συνόλου Α ορίζουμε ένα νέο σύνολο που το συμβολίζουμε με Α' και το ονομάζουμε **συμπλήρωμα** του συνόλου.

Το σύνολο **Α'** περιέχει **τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α.**

Συμβολικά: **Α'= {** $\chi\in$**Ω /** $\chi\notin$**Α }.**

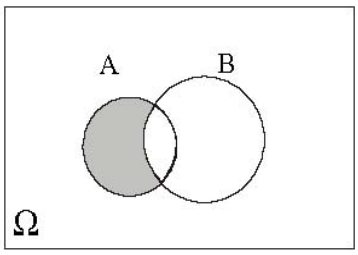
- Αν Α = {α, β ,γ} και Ω = {α, κ, β, χ, γ, δ}, τότε
  Α' ={κ , χ , δ }.
- Αν Α = {1 ,2} και Ω = {χ∈R/ $(\chi^2 - 1)(\chi^2 - 4) = 0$}, τότε: Α' ={-1 ,-2}.

4. Διαφορά συνόλων

Με την βοήθεια των συνόλων Α και Β ορίζουμε ένα νέο σύνολο που το συμβολίζουμε με Α - Β και το ονομάζουμε **διαφορά *του* Β από το Α.**

Το σύνολο **Α - Β** περιέχει **τα στοιχεία του Ω που ανήκουν στο Α και δεν ανήκουν στο Β.**

Συμβολικά: **Α-Β = { χ∈Ω / χ∈Α και χ∉Β}.**



Αν Α = { α, β, γ} και Β = { α, 1 , β ,2 } , τότε Α-Β = {γ }, ενώ Β-Α = {1 , 2}.

Παρατήρηση: Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

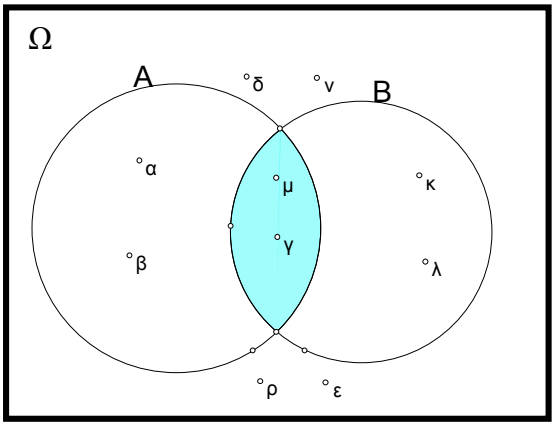
Α∩Β⊆Α, Α∩Β⊆Β, Α⊆Α∪Β, Β⊆Α∪Β,

Α⊆Ω , ∅⊆Α , ∅΄=Ω , Ω΄=∅,

(Α∩Β) ⊆ (Α∪Β), (Α∩Β)΄ = Α΄∪ Β΄, (Α∪Β)΄ = Α΄∩ Β΄,

Α∩(Β∪Γ)=(Α∩Β)∪(Α∩Γ) και **Α∪(Β∩Γ)=(Α∪Β)∩(Α∪Γ).**

Παραδείγματα



Αν **Ω={α,β,γ,δ,ε,κ,λ,μ,ν,ρ}** και **Α={α,β,γ,μ}, Β={κ,λ,μ,γ}** τότε:

Α ∪ Β = {α, β, γ, μ, κ , λ}
Α ∩ Β ={γ, μ }
Α' ={κ , λ , δ ,ε, ν, ρ}
Α-Β = {α, β }
Β-Α = {κ, λ}.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν είναι $(x^2-1)(x^2+x)=0$ να **βρεθεί** ο x.

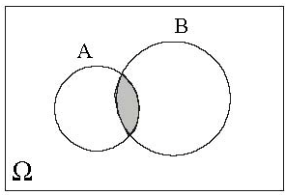
2. Αν είναι $(x^2-16)(x^2-4x) \neq 0$ να **βρεθεί** ο x.

3. Αν είναι $(x-3)(x+2)=0$ και $(x+2)(x-5)\neq 0$ να **βρεθεί** ο x.

4. Να **βρεθούν** οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση.

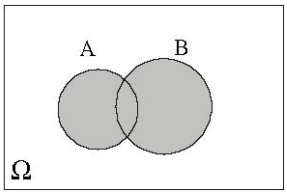
$$A=\frac{3x-6}{x(x-5)} \qquad B=\frac{5}{(2x-1)(x+3)}+\frac{x-5}{x(x-2)}$$

5. Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το σύνολο $A \cup B$.



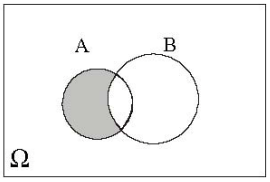
Σ **Λ**

6. Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το σύνολο $A \cup B$.



Σ **Λ**

7. Στο διπλανό σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το σύνολο $B - A$.



Σ **Λ**

8. Αν A, B είναι δύο σύνολα του Ω, τότε ισχύει η ισότητα $A - B = A \cap B'$. **Σ** **Λ**

9. Αν A, B είναι δύο σύνολα του Ω τότε ισχύει η ισότητα $B\cap A = (B-A)\cup(A-B)$. **Σ** **Λ**

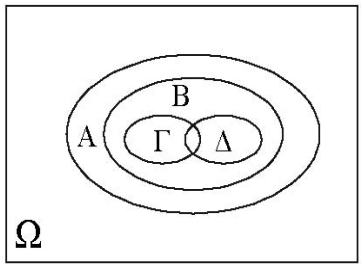
10. Δύο σύνολα λέγονται ξένα μεταξύ τους όταν $A \cap B = A$. **Σ** **Λ**

11. Τα σύνολα $A = \{1, 4, 7\}$, $B = \{4, 7, 11\}$ είναι ξένα μεταξύ τους. **Σ** **Λ**

12. Αν το σύνολο $B = \{2, 4, 6\}$, τότε $N(B) = 3$. **Σ** **Λ**

13. Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. Σ Λ

14. Οι σχέσεις από (i) μέχρι (xii) αναφέρονται στο διπλανό διάγραμμα του Venn. Βάλτε δίπλα το γράμμα (Σ) ή (Λ) αντίστοιχα αν η σχέση είναι σωστή ή λάθος.



i) $A \subseteq B$

ii) $B \subseteq A$

iii) $\Gamma \subseteq B$

iv) $\Delta \subseteq \Gamma$

v) $(\Gamma \cup \Delta) \subseteq A$

vi) $(\Gamma \cup \Delta) \subseteq B$

vii) $(\Gamma \cap \Delta) \subseteq \Gamma$

viii) $A \cup B = B$

ix) $A \cap B = B$

x) $(\Gamma \cap \Delta) \cup A = A$

xi) $B \cap \Delta = \Delta$

xii) $(\Gamma \cap B) \cap A = \Gamma$

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τα σύμβολα $\in$ και $\notin$ αν ο κάθε αριθμός ανήκει ή δεν ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-5,5				
π				
$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$\sqrt{144}$				
$-\frac{13}{3}$				
$\frac{40}{5}$				
$\sqrt{2}$				
$0,\overline{3}$				
-4				

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

Έστω Ω={1,2,3,...,10} ένα βασικό σύνολο και τρία υποσύνολα αυτού Α={1,2,4,7,8}, Β={3,4,8,10} και Γ={2,4,5,10}.

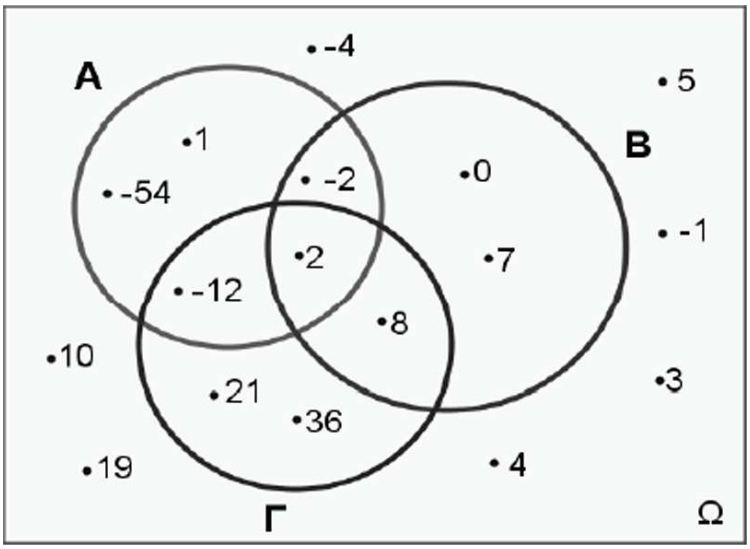
α) Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α, Β και Γ με διάγραμμα Venn.

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους καθώς και με διαγράμματα Venn τα σύνολα:

i) $A \cup B$ ii) $B \cap \Gamma$ iii) $A \cup (B \cap \Gamma)$ iv) $(A \cap B) \cup \Gamma$ v) $A \cap B \cap \Gamma$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ένα βασικό σύνολο Ω και τρία υποσύνολα του Α, Β και Γ.



α) Ποιο είναι το πλήθος των στοιχείων των συνόλων Α, Β και Γ;

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα:

i) $A \cup B$ ii) $B \cap \Gamma$ iii) $A \cup (B \cap \Gamma)$ iv) $A \cap B \cap \Gamma$ v) A'.