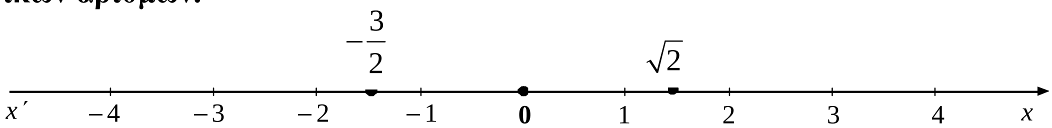
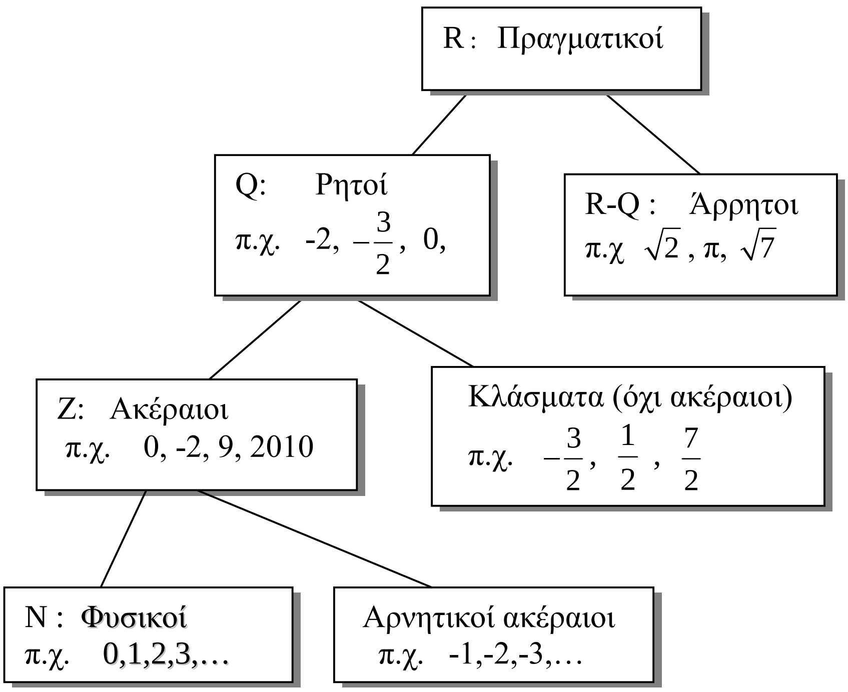
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- Οι αριθμοί 0,1,2,3,4,… είναι οι ***Φυσικοί αριθμοί.***
- Οι Φυσικοί αριθμοί μαζί με τους αντίθετούς τους αποτελούν τους ***Ακέραιους αριθμούς.*** Δηλαδή ακέραιοι είναι οι αριθμοί …,-3,-2,-1,0,1,2,3,…
- ***Ρητοί αριθμοί*** είναι αυτοί που έχουν (ή μπορεί να πάρουν) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.
- Υπάρχουν αριθμοί, που δεν μπορούν να πάρουν κλασματική μορφή (δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί). Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **άρρητοι** αριθμοί. Π.χ οι αριθμοί $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{5}$.
- Οι ***πραγματικοί αριθμοί*** αποτελούνται από τους **ρητούς** και τους **άρρητους** αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα , **του άξονα των πραγματικών αριθμών.**





Στους πραγματικούς αριθμούς ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και με τη βοήθειά τους , η αφαίρεση και η διαίρεση.
Οι ιδιότητες των πράξεων αυτών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ

<table>
<tr><th>ΙΔΙΟΤΗΤΑ</th><th>ΠΡΟΣΘΕΣΗ</th><th>ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ</th></tr>
<tr><td>Αντιμεταθετική</td><td>α+β=β+α</td><td>α·β=β·α</td></tr>
<tr><td>Προσεταιριστική</td><td>α+(β+γ)=(α+β)+γ</td><td>α·(β·γ)=(α·β)·γ</td></tr>
<tr><td>Επιμεριστική</td><td colspan="2">α·(β+γ)=α·β+α·γ</td></tr>
<tr><td>Ουδέτερο</td><td>α+0=α
Το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.</td><td>α·1=α
Το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολ/σμού</td></tr>
<tr><td></td><td>α+(-α)=0
α,-α λέγονται αντίθετοι</td><td>$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1$, $\alpha\neq 0$
$\alpha, \frac{1}{\alpha}$ λέγονται αντίστροφοι</td></tr>
<tr><td>Άλλες πράξεις:</td><td><u>Αφαίρεση</u>
α-β=α+(-β)</td><td><u>Διαίρεση</u>
$\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$, $\beta\neq 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Αν α=β και γ=δ τότε:
α+γ=β+δ
Μπορούμε να προσθέσουμε δύο ισότητες κατά μέλη.</td><td>Αν α=β και γ=δ τότε:
α·γ=β·δ
Μπορούμε να πολ/σουμε δύο ισότητες κατά μέλη.</td></tr>
<tr><td>Αν α=β τότε : α+γ=β+γ
Μπορούμε και στα δύο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό.</td><td>Αν α=β τότε : α·γ=β·γ
Μπορούμε και στα δύο μέλη μιας ισότητας να πολ/σουμε τον ίδιο αριθμό.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ισοδυναμίες</td><td>α=β⇔α+γ=β+γ</td><td>Αν γ≠0 τότε:
α=β⇔α·γ=β·γ</td></tr>
<tr><td></td><td>α·β=0⇔α=0 ή β=0
α·β≠0⇔α≠0 και β≠0</td></tr>
<tr><td>Κανόνας των προσήμων</td><td></td><td>(-1)·α=-α, (-α)·β=-αβ,
(-α)·(-β)=α·β</td></tr>
<tr><td>Κανόνας απαλοιφής παρενθέσεων</td><td>-(α+β)=-α-β
Ο αντίθετος ενός αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των αντίθετων των προσθετέων.</td><td>$\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}$
Ο αντίστροφος ενός γινομένου ισούται με το γινόμενο των αντίστροφων των παραγόντων.</td></tr>
<tr><td>Πράξεις κλασμάτων.</td><td>Πρόσθεση ομωνύμων
$\frac{\alpha}{\gamma}\pm\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha\pm\beta}{\gamma}$
Πρόσθεση ετερωνύμων
$\frac{\alpha}{\beta}\pm\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta\pm\beta\gamma}{\beta\delta}$</td><td>Πολ/σμός
$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$
Διαίρεση
$\frac{\alpha}{\beta}\div\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$</td></tr>
</table>

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Αναλογία λέγεται η ισότητα δύο λόγων, όπως $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ με β,δ≠0

Οι αριθμοί α,δ λέγονται ***άκροι όροι*** , ενώ οι β,γ ***μέσοι όροι***.

Σε κάθε αναλογία ισχύουν οι **ιδιότητες**: *(όπου υπάρχουν παρ/στές είναι διαφορετικοί του 0)*

i) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \alpha\cdot\delta=\beta\cdot\gamma$

Δηλαδή το γινόμενο των άκρων ισούται με το γινόμενο των μέσων όρων

ii) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$

Δηλαδή σε μια αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε την θέση των μέσων όρων της.
(Ισχύει και για τους άκρους)

iii) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$ ή $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta}$

Μπορούμε δηλαδή να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τους παρανομαστές από τους αριθμητές (και αντίστροφα) και να δημιουργήσουμε μια άλλη αναλογία.

iv) Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

Αν σε μια αναλογία δημιουργήσουμε ένα λόγο που να έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρανομαστή το άθροισμα των παρ/στών , τότε ο λόγος αυτός θα ισούται με τους λόγους της αναλογίας.

Γενικότερα ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\cdots=\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\alpha+\gamma+\cdots+\kappa}{\beta+\delta+\cdots+\lambda}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να γίνουν οι **πράξεις:**
2[4(2-5x)+3(2x-1)]-5[5(1-2x)-3].

---

2) Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ να **αποδεχθεί ότι** $\frac{\gamma}{\delta}=\frac{3\gamma-2\alpha}{3\delta-2\beta}$, όπου βδ(3δ-2β)≠0.

---

3) Αν οι αριθμοί χ,ψ,,ω είναι ανάλογοι των αριθμών 2,3,4 και έχουν άθροισμα 27, να **βρεθούν** οι χ,ψ,ω.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ- ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Ορίζουμε: **νυοστή δύναμη του α,** ***(συμβ.*** $\boldsymbol{\alpha^\nu}$ ***)*** το γινόμενο $\boldsymbol{\alpha^\nu = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot \ldots \cdot\alpha}$, όπου ν φυσικός που δηλώνει το πλήθος των παραγόντων και ν>1.

Επίσης ορίζουμε: $\boldsymbol{\alpha^1=\alpha}$ **,** ενώ για $\alpha\neq 0$ ότι: $\boldsymbol{\alpha^0=1}$ και $\boldsymbol{\alpha^{-\nu}=\dfrac{1}{\alpha^\nu}}$ **.**

π.χ. $4^1=4$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=1$, $5^{-3}=\dfrac{1}{5^3}$ και $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Πολ/σμός δυνάμεων με την ίδια βάση.	$\boldsymbol{\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu=\alpha^{\mu+\nu}}$	π.χ. $2^3\cdot 2^4=2^7$
Διαίρεση δυνάμεων με την ίδια βάση.	$\boldsymbol{\alpha^\mu:\alpha^\nu=\alpha^{\mu-\nu}}$	π.χ. $2^6:2^4=2^2$
Ύψωση γινομένου σε δύναμη.	$\boldsymbol{(\alpha\cdot\beta)^\nu=\alpha^\nu\cdot\beta^\nu}$	π.χ. $(\chi\cdot\psi)^3=\chi^3\cdot\psi^3$.
Ύψωση πηλίκου σε δύναμη.	$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$, $\boldsymbol{\beta\neq 0}$	π.χ. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{2^2}{3^2}$
Ύψωση δύναμης σε άλλη δύναμη.	$\left(\alpha^\mu\right)^\nu=\alpha^{\mu\cdot\nu}$	π.χ. $\left(3^2\right)^4=3^8$

Από το Γυμνάσιο γνωρίζουμε τις ταυτότητες:

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$
$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$$
$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$
$$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$
$$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$
$$\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$$

Επίσης αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι ταυτότητες:

$$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta} \qquad \boldsymbol{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$

$$\boldsymbol{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]}$$ (ταυτότητα του Euler).

Από την τελευταία προκύπτει ότι:

Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$ τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ (1)

Η παραπάνω σχέση χρησιμοποιείται πολλές φορές και στην παραγοντοποίηση παραστάσεων που εκφράζονται σαν άθροισμα τριών κύβων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να **συμπληρώσετε** τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες:
   i. $(\ldots - \ldots.)^{\cdots} = \chi^2 - \ldots.. + \psi^2$
   ii. $(\ldots - \ldots.)^{\cdots} = \chi^3 - \ldots\ldots.. + \ldots\ldots.. - \psi^3$
   iii. $(\ldots + \ldots.)^{\cdots} = \chi^2 + \ldots.. + \psi^2$
   iv. $(\ldots + \ldots.)^{\cdots} = \chi^3 + \ldots\ldots.. + \ldots\ldots.. + \psi^3$
   v. $(\chi-\psi)(\ldots. + \ldots.) = \chi^2 - \psi^2$
   vi. $\chi^3 - \psi^3 = (\ldots. - \ldots..)(\ldots.. + \ldots.. + \ldots..)$
   vii. $\chi^3 + \psi^3 = (\ldots. + \ldots..)(\ldots.. - \ldots.. + \ldots..)$

---

2) Να γίνουν οι **πράξεις:**

   α) $(x-3)^2=$ β) $(2x-3)^2=$ γ) $(-x-2)^2=$

   δ) $(x+1)^3=$ ε) $(x^2-2)^3=$ ζ) $(x^2-2y)^3=$

   η) $(x+3)(x-3)=$ θ) $(2x+3)(3-2x)=$ ι) $(x-2)(x^2+2x+4)=$

---

3) Να γίνουν οι **πράξεις**:

   α) $2x^2+x^2(x-2)^2-3(2-x)(x+2)=$ β) $3x(x-1)^3+(3x-2)^2-x^2(4x-1)=$

   γ) $(x-y-2)^2=$ δ) $(x^2-2y-1)^2=$

---

4) Να **αποδειχθούν** οι ταυτότητες:
   α) $\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)+1=(\alpha^2+3\alpha+1)^2$
   β) $(\alpha+\beta)^3-2\beta(3\alpha^2+\beta^2)=(\alpha-\beta)^3$
   γ) $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$
   δ) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^3-\alpha^4+\beta^4=2\alpha\beta(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$.

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

α) παραστάσεων με δύο όρους

1) Βγάζουμε τους κοινούς παράγοντες αν υπάρχουν
2) Εξετάζουμε ,αν εφαρμόζεται κάποια από τις ταυτότητες :

$$\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$
$$\alpha^3- \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$
$$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

Παραδείγματα

i) $9\chi^2-1=(3\chi)^2-1^2=(3\chi-1)(3\chi+1)$

ii) $\chi^4-\chi=\chi(\chi^3-1)=\chi(\chi-1)(\chi^2+\chi+1)$

iii) $8\chi^3+27=(2\chi)^3+3^3=(2\chi+3)(4\chi^2-6\chi+9)$

β) παραστάσεων με τρεις όρους

1) Βγάζουμε τους κοινούς παράγοντες αν υπάρχουν
2) Εξετάζουμε άν εφαρμόζεται κάποια από τις ταυτότητες :

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$$
$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$$
$$\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta=(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$$

3) Κάνουμε διάσπαση κάποιου όρου και στη συνέχεια παρ/ση σε ομάδες.

Παραδείγματα

i) $4\chi^2+4\chi+1=(2\chi)^2 +2\cdot2\chi\cdot1+1^2=(2\chi+1)^2$

ii) $16\chi^2-40\chi\psi+25\psi^2= (4\chi)^2 -2\cdot4\chi\cdot5\psi+(5\psi)^2=(4\chi-5\psi)^2$

iii) $\chi^3+2\chi^2+\chi=\chi(\chi^2+2\chi+1)=\chi(\chi+1)^2$

iv) $\chi^2-4\chi+3=(\chi-1)(\chi-3)$ γιατί οι αριθμοί –1 και –3 έχουν γινόμενο 3 και άθροισμα -4 .

v) $\chi^3-3\chi+2=\chi^3-\chi-2\chi+2=\chi(\chi^2-1)-2(\chi-1)=\chi(\chi-1)(\chi+1)-2(\chi-1)=(\chi-1)(\chi^2+\chi-2)$
$=(\chi-1)(\chi+2)(\chi-1)=(\chi-1)^2(\chi+2)$

γ) παραστάσεων με τέσσερις η περισσότερους όρους

Συνήθως γίνεται ομαδοποίηση και στη συνέχεια βάζουμε κοινούς παράγοντες μεταξύ των όρων της κάθε ομάδας όπως στα παραδείγματα.

Παραδείγματα

i) $\alpha\chi-\beta\psi+\beta\chi-\alpha\psi=(\alpha\chi-\alpha\psi)+(\beta\chi-\beta\psi)=\alpha(\chi-\psi)+\beta(\chi-\psi)=(\chi-\psi)(\alpha+\beta)$.

ii) $\chi^2-6\chi+9-\psi^2=(\chi^2-6\chi+9)-\psi^2=(\chi-3)^2-\psi^2=(\chi-3-\psi)(\chi-3+\psi)$

iii) $\alpha^2\chi+\alpha\beta\chi+\beta\alpha\psi+\beta^2\psi-\alpha\gamma-\beta\gamma =(\alpha^2\chi+\alpha\beta\chi)+(\beta\alpha\psi+\beta^2\psi)-(\alpha\gamma+\beta\gamma)=\alpha\chi(\alpha+\beta)+\beta\psi(\alpha+\beta)-\gamma(\alpha+\beta)$
$=(\alpha+\beta)(\alpha\chi+\beta\psi-\gamma)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να **παραγοντοποιηθούν** οι παραστάσεις:

α) $4x^2-25$ β) $1-x^4$ γ) $(α+3)^2-4$ δ) $y^2-(2x-y)^2$

ε) $(2x+3y)^2-(3x-2y)^2$ στ) $x^4-4x^2y^2$ ζ) x^3+1 η) $8x^3-27y^3$

θ) $2x^9y+54y^7$ ι) $2x^3+128$ κ) x^7-x.

----

2) Να **παραγοντοποιηθούν** οι παραστάσεις:

α) $12x-20y+5z^2y-3z^2x$ β) $x^3-x^2y-xy^2+y^3$ γ) $9x^2-36y^2-30x+25$

δ) x^2-2x-y^2+1 ε) $5xy^3+10y^2-3αxy-6α$ στ) $α^2x+αβx+βαy+β^2y-αγ-βγ$.

----

3) Να **παραγοντοποιηθούν** οι παραστάσεις:

α) $2x^3+8x^2+8x$ β) $9α^4-6α^2β^2+β^4$ γ) $(x+y)^2-2(x+y)+1$

δ) $x^4-2x^2y^2+y^4$ ε) x^2-5x+6 στ) x^2+3x+2

ζ) x^4+2x^2-3 η) $x^2+2xy-3y^2$ θ) $5x^3-15x^2-20x$.

ι) $x^4-2x^3+x^2$ κ) $9x^{2ν}-30x^ν+25$.

----

4) Να γραφούν με **μορφή γινομένου** οι παραστάσεις:

α) $α^2-5α^3β-5αβ^3+β^2=$ β) $(χ-2)^2+3(χ^2-4)-5χ+10=$

γ) $9χ^5-16χ^3=$ δ) $(χ^3+1)^2-(χ^3-1)^2=$

ε) $(3χ+5)(χ-2)-(3χ+5)^2+15χ+25=$ ζ) $(4χ-3)^3-(χ-2)^3-(3χ-1)^3=$

η) $(χ+1)^3-8(χ-1)^3+(χ-3)^3=$

----

5) Να **παραγοντοποιηθούν** τα πολυώνυμα:

i) $χ^2+(2α+1)χ+α^2+α$ v) $α^4+α^2+1$

ii) $4χ^2ψ^2-(χ^2+ψ^2-ω^2)^2$ vi) $2αβ+1-α^2-β^2$

iii) $(5χ-10)(χ^2-1)-(7χ-14)(χ-1)^2$ vii) $4α^2+4α+1-4β^2+4β-1$

iv) $(χ^2-25)^2-(χ+5)^2$ viii) $(17χ^2-1)^2-64χ^4$

----

6) Να **παραγοντοποιηθούν** τα πολυώνυμα:

i) $(\chi+2)^2-6(\chi+2)+9$

ii) $\chi^2-2\chi-\psi^2+1$

iii) $\chi^2-2\chi\psi-3\psi^2$

iv) $6\chi(\chi+1)^4-2\chi^2(\chi+1)^3+12\chi(\chi+1)^5$

v) $4\alpha^3-4+16\alpha^2-\alpha$

vi) $\chi^4-2\chi^2\psi^2+\psi^4$

vii) $\chi^2-\psi^2+4\psi z-4z^2$

viii) $\chi(\chi+2)+1$

ix) $\chi^2+2\chi\psi-3\psi^2$

x) $\alpha^4+\alpha^2-20$

xi) $\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-1$

xii) $\chi^7-\chi^3$

xiii) $\alpha^3\beta^3-\alpha^3-\beta^3+1$

---

7) Να **απλοποιηθούν** τα κλάσματα:

$A=\dfrac{5x^2-15x}{5x^2-45}$ και $B=\dfrac{9(2x-1)^2-(2x+3)^2}{8(4x^2-12x+9)}$.

---

8) Να **απλοποιηθούν** τα κλάσματα:

$A=\dfrac{4x^2-20x}{2x^2-50}$ και $B=\dfrac{9(x+3)^2-(x-4)^2}{16x^2+40x+25}$.

---

9) Να **απλοποιηθούν** τα κλάσματα:

$A=\dfrac{3(x-2)-4x+8}{x-2}$ $B=\dfrac{(x^4-16)(x^2-x)}{(x^3-x)(x^3-4x)}$.

---

10) Να **δείξετε ότι** αν οι α,β είναι περιττοί ακέραιοι, τότε οι α±β είναι άρτιοι και ο αβ περιττός.

---

11) Αν α,β,γ πλευρές τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma}+\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha}+\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta}=0$, τότε να **αποδείξετε** ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

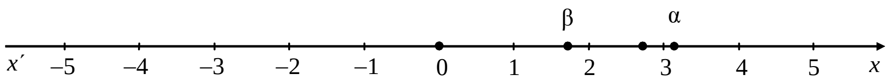
Ορισμός:

Λέμε ότι ο αριθμός **α είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό β**, και γράφουμε **α>β**, τότε και μόνο τότε όταν η διαφορά ***α-β είναι θετικός αριθμός.***

Δηλαδή: $\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0}$

Αντίστοιχα : **α<β ⇔ α-β<0.**

- Γεωμετρικά η ανισότητα **α>β** σημαίνει ότι ***ο αριθμός α είναι δεξιότερα του β πάνω στον άξονα .***



- Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει: **α>β ή α=β τότε γράφουμε α≥β.**

Από τον ορισμό των πράξεων προκύπτουν:

- $\boxed{(\alpha>0 \text{ και } \beta>0) \Rightarrow \alpha+\beta>0}$. (***Το άθροισμα δύο θετικών είναι θετικός***)
- $\boxed{(\alpha<0 \text{ και } \beta<0) \Rightarrow \alpha+\beta<0}$. (***Το άθροισμα δύο αρνητικών είναι αρνητικός***)
- (α,β είναι ομόσημοι) $\Rightarrow$ αβ>0 και $\dfrac{\alpha}{\beta}>0$

  (α,β είναι ετερόσημοι) $\Rightarrow$ αβ<0 και $\dfrac{\alpha}{\beta}<0$

  (Το γινόμενο και το πηλίκο δύο ομοσήμων είναι θετικός, ενώ των ετεροσήμων αρνητικός).

- Για κάθε πραγματικό α ισχύει: $\boldsymbol{\alpha^2\geq 0}$. ***(Το τετράγωνο κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός)***

Ιδιότητες ανισοτήτων

1) $\boxed{(\alpha>\beta \quad \text{και} \quad \beta>\gamma) \;\Rightarrow\; \alpha>\gamma}$ ***(μεταβατική ιδιότητα).***

2) $\boxed{\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma}$ ***(Πρόσθεση αριθμού και στα δύο μέλη μιας ανισότητας).***

3) $\boxed{\begin{cases} \alpha>\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\gamma>\beta\gamma \quad , \text{όταν } \gamma>0 \\ \text{ενώ} \\ \alpha>\beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha\gamma<\beta\gamma \quad , \text{όταν } \gamma<0 \end{cases}}$. ***(Πολ/σμός αριθμού και στα δύο μέλη μιας ανισότητας).***

4) $\begin{cases} (\alpha > \beta \ \text{ και } \ \gamma > \delta) \Rightarrow \ \alpha + \gamma > \beta + \delta \\ \begin{pmatrix} \alpha > \beta \ \text{ και } \ \gamma > \delta \\ \text{και} \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0 \end{pmatrix} \text{τότε } \alpha\gamma > \beta\delta. \end{cases}$

(*Πρόσθεση ανισοτήτων κατά μέλη*).

(*Πολ/σμός ανισοτήτων κατά μέλη*).

5) **Αν α,β ≥ 0 (α,β είναι μη αρνητικοί) και ν θετικός ακέραιος** , τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$\boxed{\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu}$ και $\boxed{\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu}$

6) Αν **αβ > 0 (α,β είναι ομόσημοι),** τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boxed{\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}}.$$

7) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς α και β ισχύει: $\boxed{\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta}$

8) $\boxed{\alpha > 0 \ \Rightarrow \ \alpha + \frac{1}{a} \geq 2}$ ενώ $\boxed{\alpha < 0 \ \Rightarrow \ \alpha + \frac{1}{a} \leq -2.}$

Διαστήματα

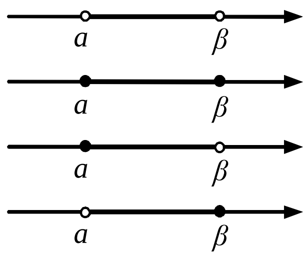
- Αν $\alpha < \beta$, τότε ονομάζουμε **διαστήματα με άκρα τα *α,β*** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

Αν $\alpha < x < \beta$ **ανοικτό διάστημα (α,β)**

Αν $\alpha \leq x \leq \beta$ **κλειστό διάστημα [α,β]**

Αν $\alpha \leq x < \beta$ **κλειστό-ανοικτό διάστημα [α,β)**

Αν $\alpha < x \leq \beta$ **ανοικτό-κλειστό διάστημα (α,β]**



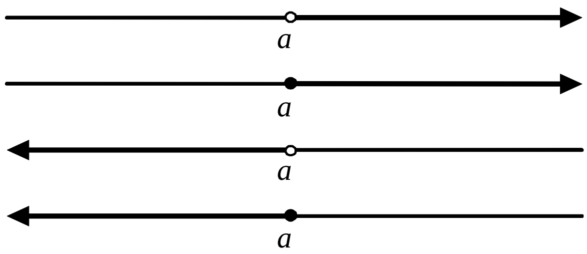
- Αν α∈R, τότε ονομάζουμε **μη φραγμένα διαστήματα με άκρο το α** καθένα από τα παρακάτω σύνολα:

(α,+∞) αν $x > \alpha$

[α,+∞) αν $x \geq \alpha$

(-∞,α) αν $x < \alpha$

(-∞,α] αν $x \leq \alpha$



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις, αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

α) Πόσοι αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στο $\frac{3}{8}$ και το $\frac{5}{8}$;

β) Υπάρχει αριθμός ανάμεσα στον 1,2 και στον 1,3; Αν ναι, γράψτε έναν.

γ) Υπάρχει πραγματικός αριθμός α μεγαλύτερος του $\frac{5}{8}$ με την ιδιότητα:

«ανάμεσα στον $\frac{5}{8}$ και τον α να μην υπάρχει άλλος αριθμός»;

δ) Υπάρχει ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

ε) Υπάρχει ο επόμενος πραγματικός αριθμός του 24,1; Αν ναι, ποιος είναι αυτός;

στ) Μπορείτε να βρείτε έναν αριθμό ανάμεσα στον 0,99... και στον 1;.

Ανάμεσα στον 0,899... και στον 0,9;

Τι παρατηρείτε;

ΔΙΑΤΑΞΗ — ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Συμπληρώστε τα κενά με το σύμβολο της ανισότητας.

i) Αν $\alpha>\beta$ τότε $\alpha+\gamma\ldots\beta+\gamma$

ii) Αν $\kappa<0$ τότε $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\kappa\ldots\beta\kappa$

iii) Αν $\alpha\beta>0$ και $\alpha<\beta$ τότε ${}^{1}/_{\alpha}\ldots{}^{1}/_{\beta}$

iv) Αν α,β είναι θετικοί τότε : $\alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha^4\ldots\beta^4$

v) Αν $\alpha\beta<0$ και $\alpha>\beta$ τότε ${}^{1}/_{\alpha}\ldots{}^{1}/_{\beta}$

vi) Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$ τότε $\alpha+\gamma\ldots\beta+\delta$

vii) $\alpha<\beta \Leftrightarrow -2\,\alpha\ldots-2\,\beta$

viii) $\alpha<\beta \Leftrightarrow -2+\alpha\ldots-2+\beta$

ix) $\alpha^2+\beta^2\ldots2\alpha\beta$

x) $(\alpha-2)^2\ldots0$.

---

2. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις με μία από τις εκφράσεις :

Α: ***«προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά»*** ,

Β: ***«προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς»***

Γ: ***«δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν προκύπτει ανισότητα ίδιας ή αντίθετης φοράς» :***

- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό τότε ………
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό τότε ………
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας πολ/σουμε τον ίδιο αριθμό τότε ………
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας πολ/σουμε τον ίδιο θετικό αριθμό τότε ………
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας πολ/σουμε τον ίδιο αρνητικό αριθμό τότε ……
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας διαιρέσουμε τον ίδιο θετικό αριθμό τότε……
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας διαιρέσουμε τον ίδιο αρνητικό αριθμό τότε……
- Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες της ίδιας φοράς τότε ………
- Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες της ίδιας φοράς τότε ………

---

3. Κυκλώστε το σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) ανάλογα στις παρακάτω προτάσεις:

Για κάθε $\alpha,\beta \in R$ ισχύει: $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2$	Σ	Λ
Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in R$ ισχύει: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$	Σ	Λ
Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in R$ ισχύει: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma$	Σ	Λ
Αν $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$ τότε $\alpha\gamma<\beta\delta$	Σ	Λ
$\chi=3 \Leftrightarrow \chi^2=9$	Σ	Λ
Αν $\chi>0$ τότε : $\chi<2 \Leftrightarrow \chi^2<4$	Σ	Λ
Μπορούμε πάντα να προσθέσουμε δύο ομοιόστροφες ανισότητες κατά μέλη	Σ	Λ
Μπορούμε πάντα να πολ/σουμε δύο ομοιόστροφες ανισότητες κατά μέλη	Σ	Λ
Αν $\alpha<0$ τότε ${}^1/_\alpha>0$	Σ	Λ

4. Να γίνει η σωστή αντιστοίχιση με βέλη μεταξύ των δύο στηλών

ΣΤΗΛΗ Α	***ΣΤΗΛΗ Β***
Ανισώσεις	***Διαστήματα***
$2<\chi\leq 5$	$\chi\in(-1,4)$
$-2\geq\chi$	$\chi\in[0,+\infty)$
$-1<\chi<4$	$\chi\in(2,5]$
$\chi\geq 0$	$\chi\in[2,5]$
$2\leq\chi\leq 5$	$\chi\in(-\infty,-2]$

5. Ερωτήσεις πολ/πλής επιλογής

i) Αν ισχύει $0<\alpha<\beta$ τότε σωστή είναι η διάταξη:
Α. $1<{}^{\alpha}/_{\beta}<{}^{\beta}/_{\alpha}$ Β. ${}^{\alpha}/_{\beta}<1<{}^{\beta}/_{\alpha}$ Γ. ${}^{\beta}/_{\alpha}<{}^{\alpha}/_{\beta}<1$.

ii) Αν $2<\chi<4$ και $-1<\psi<5$ τότε για την ποσότητα $\omega=\chi-2\psi$ ισχύει:
Α.$1<\omega<9$ Β. $4<\omega<6$ Γ. $-8<\omega<6$ Δ. $-2<\omega<20$

iii) Αν $3\chi-2<0$ και $-2\chi+6>0$ τότε:
Α. $\chi<-3$ Β. $\chi<{}^{2}/_{3}$ Γ. $\chi>-3$ Δ. $\chi<3$ Ε. ${}^{2}/_{3}<\chi<3$.

---

6. α) Έστω α , β δύο θετικοί αριθμοί με $\alpha<\beta$.

- Ο αριθμός $\alpha^2-\beta^2$ είναι θετικός ή αρνητικός και γιατί;
- **Συγκρίνετε** τον α^2 με τον β^2.

β) Έστω α , β δύο αρνητικοί αριθμοί με $\alpha<\beta$.

- Ο αριθμός $\alpha^2-\beta^2$ είναι θετικός ή αρνητικός και γιατί;
- **Συγκρίνετε** τον α^2 με τον β^2.

γ) Έστω α , β δύο αριθμοί με $\alpha<\beta$. Είναι σωστό ή λάθος ότι $\alpha^2<\beta^2$;

---

7. Έστω α , β δύο αριθμοί με $\alpha<\beta$.

α) Να **εξετάσετε** αν η διαφορά $(2\alpha-3\beta)-(\alpha-2\beta)$ είναι αριθμός θετικός ή αρνητικός;

β) Να **συγκρίνετε** τους αριθμούς $2\alpha-3\beta$ και $\alpha-2\beta$.

---

8. Έστω α , β δύο αριθμοί με $\alpha < 0 < \beta$.

Να **δικαιολογήσετε** ότι το γινόμενο $(\alpha - 1)(\beta - \alpha)(\beta + 2)(\alpha - \beta)$ είναι θετικός αριθμός.

---

9. **i)** Αν $x , y > 0$ να **δείξετε** ότι $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

ii) Αν $\alpha > 2$ να **δείξετε** ότι $\alpha^3 + \alpha > 2\alpha^2 + 2$.

---

10. Αν $2 \leq x \leq 4$ και $1 \leq y \leq 3$, να βρείτε **μεταξύ ποιων αριθμών** περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις :

α) $x + y$ β) xy γ) $x^2 + y^2$ δ) $x^3 + 2y$ ε) $x - y$ ς) $\frac{x}{y}$.

---

11. Να **δειχτεί** ότι :

α) $16x^2+16xy \geq -4y^2$

β) $9x^2 > 30x-26$

γ) $4x^2-12x+y^2+4y+13 \geq 0$

δ) $(2x^2+2y^2)(2z^2+2\omega^2) \geq (2xz-2y\omega)^2$.

---

12. Να **δειχτεί** ότι : $-\lambda^2-\kappa^2 \leq \frac{(\kappa-\lambda)(\kappa+\lambda)}{2} \leq \kappa^2$.

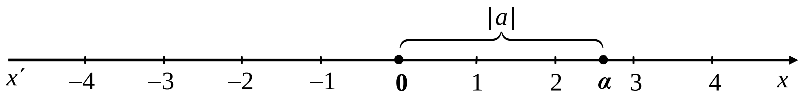
---

2. 3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α, λέγεται ο ίδιος ο αριθμός αν είναι μη αρνητικός και ο αντίθετός του αν είναι αρνητικός.

Δηλαδή: $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$ π.χ $|3|=3$, $|0|=0$, $|-2| = -(-2) = 2$.

Γεωμετρικά, η **απόλυτη τιμή του *α*** παριστάνει την ***απόσταση του αριθμού α από το μηδέν,***



Ιδιότητες

i) ***Για κάθε πραγματικό αριθμό x*** ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$|x| \geq 0$,

$|x| \geq x$, $|x| \geq -x$ δηλαδή: $-|x| \leq x \leq |x|$ και

$|x|^{2k} = x^{2k}$ όπου k θετικός ακέραιος.

---

ii) Αν **θ>0** τότε ισχύει: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \pm\theta$

π.χ. $|x| = 5 \Leftrightarrow x = \pm 5$

---

iii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$|3x-6| = 0 \Leftrightarrow 3x-6=0 \Leftrightarrow x=2$

---

iv) $|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = \pm\theta$

π.χ. $|2x+3| = |x+1| \Leftrightarrow 2x+3 = \pm(x+1) \Leftrightarrow 2x+3 = x+1$ ή $2x+3 = -x-1 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x = -\frac{4}{3}$

---

v) Αν **θ>0** τότε ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow x \in (-\theta, \theta) \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ και

$|x| > \theta \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\theta)$ **ή** $x \in (\theta, +\infty) \Leftrightarrow x < -\theta$ **ή** $x > \theta$.

π.χ. $|x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$

$|x| > 3 \Leftrightarrow x < -3$ ή $x > 3$

$|3x-2| \leq 7 \Leftrightarrow -7 \leq 3x-2 \leq 7 \Leftrightarrow -7+2 \leq 3x \leq 7+2 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq x \leq 3$

$|4x-3| \geq 5 \Leftrightarrow 4x-3 \leq -5$ ή $4x-3 \geq 5 \Leftrightarrow 4x \leq -2$ ή $4x \geq 8 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$ ή $x \geq 2$.

---

vi) $|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$ π.χ. $|2|\cdot|4| = |8|$

---

vii) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, όπου β≠0 π.χ. $\left|\dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{|3|}{|4|}$

---

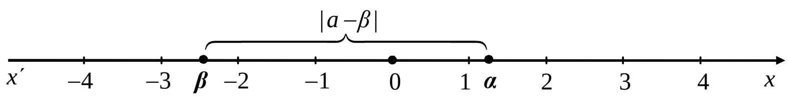
viii) $\boldsymbol{||\alpha| - |\beta|| \le |\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|}$.

Η ισότητα $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$ ισχύει όταν αβ≥0, δηλαδή όταν α,β είναι ομόσημοι ή κάποιος από αυτούς είναι 0.

---

ix) Η ***απόλυτη τιμή του*** $\alpha-\beta$ παριστάνει την **απόσταση των αριθμών *α* και *β*.**

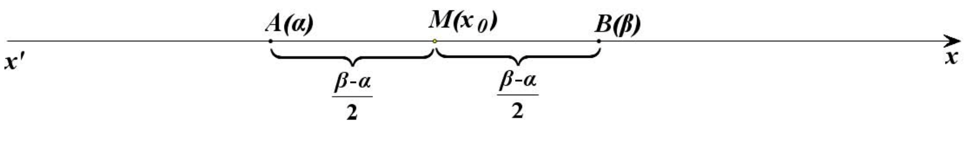
Δηλαδή: **d(α,β) =** $|\boldsymbol{\alpha-\beta}|$ **=** $|\boldsymbol{\beta-\alpha}|$**.**



Π.χ. η απόσταση των αριθμών -3 και 4 πάνω στην ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι:
d(-3,4) = $|-3-4| = |-7| = 7$

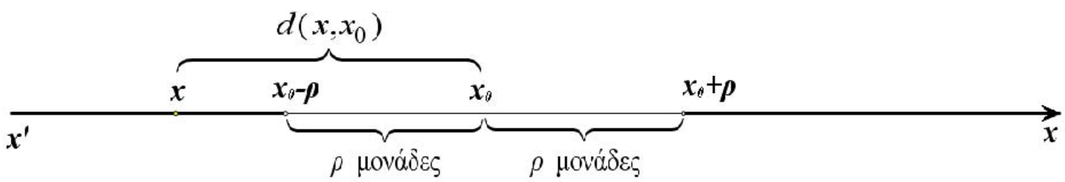
---

x) Αν Α και Β τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β του διαστήματος [α, β] αντιστοίχως τότε ο αριθμός $x_0 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσον Μ του τμήματος ΑΒ λέγεται **κέντρο** του διαστήματος [α, β], ενώ ο αριθμός $\rho = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$ **λέγεται ακτίνα του [α,β].**



---

xi) Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και ρ>0 ισχύει: $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0-\rho, x_0+\rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

1) Να κυκλώσετε το **σωστό** (Σ) ή **λάθος** (Λ) αντίστοιχα στις παρακάτω προτάσεις

1. $\lvert χ-2\rvert=\lvert 2-χ\rvert$	Σ	Λ
2. $\lvert χ\rvert>3 \Leftrightarrow χ>3$ ή $χ<-3$	Σ	Λ
3. $\lvert -5+4\rvert=\lvert -5\rvert+\lvert 4\rvert$	Σ	Λ
4. Η εξίσωση $\lvert χ+3\rvert+6=0$ είναι αδύνατη	Σ	Λ
5. $\lvert χ\rvert+\lvert ψ\rvert=0 \Leftrightarrow χ=0$ ή $ψ=0$	Σ	Λ
6. $\lvert α\rvert\geq α$	Σ	Λ
7. $\lvert -\lvert χ\rvert\rvert=\lvert χ\rvert$	Σ	Λ
8. $\lvert χ+4\rvert<6 \Leftrightarrow χ+4<6$	Σ	Λ
9. Αν $χ\leq 7$ τότε $\lvert χ-7\rvert=7-χ$	Σ	Λ
10. $\lvert χ^2-1\rvert+\lvert 2χ+2\rvert=0 \Leftrightarrow χ=-1$	Σ	Λ
11. $\lvert α\rvert+\lvert β\rvert=0 \Leftrightarrow α=β=0$.	Σ	Λ
12. $-\lvert x\rvert\leq x\leq\lvert x\rvert$	Σ	Λ

2) Ερωτήσεις πολ/πλής επιλογής

i). Η ισότητα $\lvert χ\rvert+\lvert ψ\rvert=\lvert χ+ψ\rvert$ ισχύει τότε και μόνο τότε όταν:

Α. $χ=0$ Β. $ψ=0$ Γ. $χ,ψ\in R$ Δ. $χ\cdot ψ\geq 0$ Ε. $χ\cdot ψ\leq 0$

ii). Η παράσταση $\frac{x}{|x|}+\frac{|\psi|}{\psi}$ $χ,ψ\in R^*$ ισούται με

Α. 2 αν $χ<0,ψ<0$ Β. 0 αν $χ\cdot ψ>0$ Γ. 1 αν $χ<0<ψ$ Δ. 0 αν $χ\cdot ψ<0$

iii). Η ισότητα $\lvert α\rvert+\lvert β\rvert=0$ ισχύει τότε και μόνο τότε όταν

Α. $α=0$ ή $β=0$ Β. $α\,β\geq 0$ Γ. $α=β=0$ Δ. $α=-β$ Ε. $α\,β\leq 0$

iv). Η ανισότητα $\lvert χ\rvert+χ\geq 0$ ισχύει τότε και μόνο τότε όταν

Α. $χ=0$ Β. $χ\geq 0$ Γ. $χ<0$ Δ. $χ\in R$.

---

3) Να **αποδειχθούν** οι σχέσεις:

Α) $\left|\frac{x}{y}\right| + \left|\frac{y}{x}\right| \geq 2$ αν $xy \neq 0$.

Β) $\left|\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ αν $\alpha\beta \neq 0$.

Γ). Αν $\psi|\chi| - \chi|\psi| + \chi|\chi| - \psi|\psi| = 0$, να δειχθεί ότι $|\chi| = |\psi|$.

Δ). Αν $|\chi-\psi| < \alpha$ και $|\psi-\omega| < \alpha$, να αποδειχθεί ότι $|\chi-\omega| < 2\alpha$.

----

4) Να **απλοποιηθούν** οι παραστάσεις:

Α= $3|\alpha-\beta| - 2|\beta-\gamma| + 4|\gamma-\alpha|$, αν $\alpha<\beta<\gamma$

Β= $|3x^2+2| + |x^2-2x+1| - |-x^2-3|$

Γ= $2|\chi| + 3\chi - 2$

Δ= $2|\chi-2| - 3|\chi+1| + 5$

Ε= $-5|\chi| + 2|3\chi-2| - 3\chi$

Ζ= $\frac{|x+1|}{x+1}$

Η= $\frac{|x+3| - |x-3|}{x}$

----

5) Αν $|x| \leq 3$ και $|y| \leq 1$, να **δείξετε ότι** :

i) $|4x+3y| \leq 15$

ii) $|x-y+10| \leq 14$.

2.4 ΡΙΖΕΣ - ΘΕΩΡΙΑ

Τετραγωνική ρίζα

Ορισμός : ***τετραγωνική ρίζα*** *ενός* ***μη αρνητικού αριθμού α*** *λέγεται* ***ο μη αρνητικός αριθμός x*** *που αν υψωθεί στο τετράγωνο ισούται με α.*

(Συμβ. $\sqrt{\alpha}$: τετραγωνική ρίζα του α)

$$\sqrt{\alpha} = x \Leftrightarrow x^2 = \alpha$$

π.χ $\sqrt{4} = 2$ γιατί $2^2=4$, $\sqrt{100} = 10$ γιατί $10^2=100$.

Προφανώς : $\sqrt{0} = 0$ και $\sqrt{1} = 1$ ενώ $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός **πραγματικού αριθμού α είναι συνήθως άρρητος αριθμός.**

ν-οστή ρίζα

Ορισμός : ***ν-οστή ρίζα*** *ενός* ***μη αρνητικού αριθμού α*** *λέγεται* ***ο μη αρνητικός αριθμός x*** *που αν υψωθεί στη ν-οστή δύναμη ισούται με α.* (Συμβ. $\sqrt[\nu]{\alpha}$: ν-οστή ρίζα του α).

Δηλ. αν α,χ είναι μη αρνητικοί αριθμοί και ν θετ. ακέραιος τότε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^\nu = \alpha$$

π.χ $\sqrt[3]{8} = 2$ γιατί $2^3=8$

Ειδικές περιπτώσεις:

$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$

$\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$ $(\textit{τετραγωνική ρίζα})$.

Ιδιότητες

1) Για **α≥0** ισχύει**:** $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$ όπου ν θετικός ακέραιος.

π.χ. $\sqrt[3]{2^3} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$

Γενικά για **α∈R** ισχύει: $\sqrt[2\kappa]{\alpha^{2\kappa}} = |\ \alpha\ |$ όπου κ είναι θετικός ακέραιος.

π.χ. $\sqrt[4]{(-2\ )^4} = |-2| = 2$.

---

2) Αν **α, β ≥ 0**, τότε :

i) $\begin{cases} \sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta} \\ \dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}} \quad (\beta\neq 0) \end{cases}$ π.χ $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{10}$, $\dfrac{\sqrt[7]{15}}{\sqrt[7]{3}}=\sqrt[7]{5}$

Προσοχή !!! είναι **λάθος** να γράψουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha}\pm\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\pm\beta}$.

ii) $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}=\alpha\sqrt[\nu]{\beta}$ π.χ. $\sqrt[3]{2^3 5}=2\sqrt[3]{5}$

iii) $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha}$, π.χ. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[12]{2}$

iv) $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, π.χ. $\sqrt[12]{3^9}=\sqrt[4]{3^3}$

---

3) Αν **α, β ≥ 0** (μη αρνητικοί) τότε ισχύει: $\alpha<\beta\Leftrightarrow\sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}$.

π.χ $2<3\Leftrightarrow\sqrt[5]{2}<\sqrt[5]{3}$.

---

4) <u>Δυνάμεις με εκθέτη ρητό</u>

*Αν α>0, **μ ακέραιος** και **ν θετικός ακέραιος** , τότε ορίζουμε:* $\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$

*Επιπλέον, αν **μ, ν θετικοί ακέραιοι**, ορίζουμε:* $0^{\frac{\mu}{\nu}}=0$.

Παραδείγματα: $2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}$, $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$, $5^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

<u>ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2</u>

Δίνεται η παράσταση:

$$\left(\sqrt[6]{2^3}+4\right)\cdot\left(\sqrt[6]{2^3}-4\right)$$

α) Να υπολογίσετε την παράσταση με χρήση υπολογιστή τσέπης.

β) Να υπολογίσετε την παράσταση χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες.

γ) Να συγκρίνετε τις δυο μεθόδους ως προς την ακρίβεια του αποτελέσματος.

ΡΙΖΕΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να **απλοποιηθούν** οι ρίζες:

α) $\sqrt{144}$ β) $\sqrt{225}$ γ) $\sqrt{23^2}$ δ) $\sqrt{(-3)^2}$ ε) $\sqrt{(-13)^2}$

στ) $\sqrt{x^2y^4}$ ζ) $\sqrt{\alpha^2\beta^3}$ η) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}$ θ) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{13}\right)^2}$.

---

2) Να **απλοποιηθούν** οι ρίζες:

α) $\sqrt[3]{216}$ β) $\sqrt[4]{625}$ γ) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{512}}$ δ) $\sqrt{0{,}0009}$ ε) $\sqrt[3]{\dfrac{64x^6y^9}{125}}$.

---

3) Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$ $B=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

α) Να **υπολογίσετε** τις τιμές των παραστάσεων A , B.

β) Να **δείξετε** ότι η τιμή της παράστασης $\Gamma = A\cdot B$ είναι ίση με 1.

---

4) Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\left(\sqrt{2}+1\right)^3$, $B=\left(\sqrt{2}-1\right)^3$

α) Να **υπολογίσετε** τις τιμές των παραστάσεων A , B

β) Να **δείξετε** ότι η τιμή της παράστασης $\Gamma = A\cdot B$ είναι ίση με 1

---

5) Αν ισχύει ότι $0< x <1$, να **απλοποιηθεί** η παράσταση: $A=\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-2x+1}$.

---

6) Να βρεθούν για τις πραγματικές τιμές του x οι **παραστάσεις:**

$A=\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ $B=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}$ $\Gamma=\sqrt{(2x+1)^2}-\sqrt{(5-x)^2}$.

---

7) Να γίνουν οι πράξεις και να **απλοποιηθούν** οι παραστάσεις:

α) $\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^2}$ β) $\dfrac{\sqrt[5]{3^4}\cdot\sqrt[5]{3^8}}{\sqrt[5]{3^2}}$ γ) $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{50}$

δ) $\dfrac{\sqrt{32}+\sqrt{50}+\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$ ε) $\sqrt[3]{35-2\sqrt{11+\sqrt{25}}}$ στ) $\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+1}$

ζ) $\sqrt[3]{\left(4-\sqrt{7}\right)\cdot\left(4+\sqrt{7}\right)}\cdot\sqrt[3]{3}$ η) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$ θ) $\sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8}$.

---

8) Να **απλοποιηθούν** τα ριζικά:

α) $\sqrt{\sqrt[4]{16}}$ β) $\sqrt{5\sqrt[4]{5\sqrt[5]{5}}}$ γ) $\sqrt{3\sqrt[4]{2\sqrt[3]{3\sqrt[5]{2}}}}$

δ) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ ε) $\sqrt{9\text{-}4\sqrt{5}}$ στ) $\sqrt{7\text{-}4\sqrt{3}}$

ζ) $\sqrt{36\chi^4+12\chi^2+1}$ η) $\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\beta\sqrt[4]{\alpha^2\beta^4}}}$ θ) $\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\beta}\sqrt[4]{\frac{\beta^3}{\alpha^2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^3}}}}$ α, β θετικοί.

---

9) Να γίνουν οι πράξεις και να **απλοποιηθούν** οι παραστάσεις:

α) $\sqrt[5]{\alpha^2}\cdot\sqrt[15]{\alpha^4}$ β) $\sqrt[12]{\alpha^7}\cdot\sqrt[20]{\alpha^3}\cdot\sqrt[15]{\alpha^2}$ γ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$ δ) $\sqrt[12]{\alpha^5}\div\sqrt[4]{\alpha}$

ε) $\sqrt[15]{3^{10}}\div\sqrt[10]{3^3}$ στ) $-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{297}-\sqrt[3]{54}$ ζ) $8\sqrt{20}+3\sqrt{80}-2\sqrt{500}$.

---

11) Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα σε **ισοδύναμα με ρητό παρ/στη:**

$\alpha)\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$ β) $\frac{2}{\sqrt[5]{2^3}}$ γ) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ δ) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ ε) $\frac{x\text{-}\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

στ) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ ζ) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ η) $\frac{8}{\sqrt[3]{5}-1}$ θ) $\frac{3}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$

---

12) Να **συγκρίνετε** τους αριθμούς :

α) $\sqrt{2}$ και $\sqrt[3]{3}$ β) $\sqrt{11}$ και $\sqrt{6}+\sqrt{5}$

γ) $2-\sqrt{3}$ και $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ δ) $\sqrt{47}$ και $\sqrt{26}+\sqrt{6}$

---

13) Να **αποδείξετε** ότι:

α) $\sqrt{7}+\sqrt{3}>\sqrt{10}+1$ β) $\sqrt{10+2\sqrt{10}}>\sqrt{2}+\sqrt{5}$ γ) $\sqrt{26}+2<\sqrt{13}+\sqrt{17}$.
