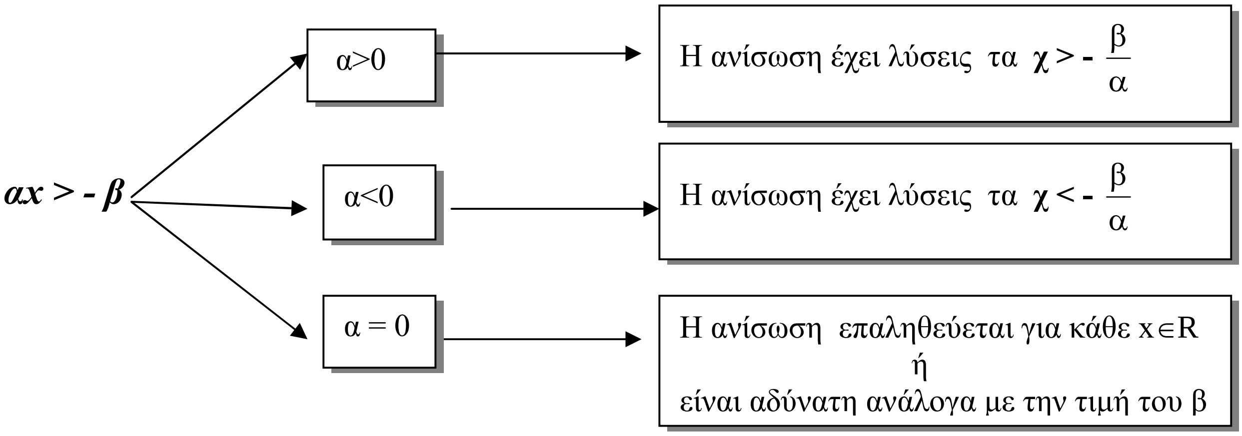
4. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΑΝΙΣΩΣΗ αx+β > 0



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γράψετε στο τέλος της κάθε πρότασης , ***«Σωστό»,*** αν αυτή είναι σωστή και **«Λάθος»,** αν αυτή είναι λάθος:

- Η ανίσωση 0χ > 1 αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς …………
- Η ανίσωση 0χ ≥ -1 αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς …………
- Η ανίσωση 0χ < 1 είναι αδύνατη …………
- Η ανίσωση 0χ > 0 είναι αδύνατη …………
- Η ανίσωση 0χ ≥ 1 αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς …………
- Για κάθε πραγματικό αριθμό χ ισχύει: $(χ – 2)^2 > 0$ …………
- Αν 0 < χ < 4 τότε χ = 1 ή χ = 2 ή χ = 3…………..
- Μπορούμε να γράφουμε 0 < χ < -1 ……………
- Η ανίσωση 3χ ≥ 0 αληθεύει για όλους τους μη αρνητικούς αριθμούς …………

---

2. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να σημειώσετε τις λύσεις τους πάνω σε άξονα.

α) $-x+\frac{3x-2}{2}-\frac{2}{7}\leq 1-\frac{5-2x}{14}$

β) $x-3+\frac{x-3}{5}\geq -\frac{1-(-x+4)}{3}+\frac{10-8x}{15}$ **γ)** (χ-2)(χ+2)<0.

---

3. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων και να τις σημειώσετε πάνω σε άξονα:

α) $-5x+7(x-2)<3(x-5)+1$ και $\frac{1}{2}(x-4)-x\geq 2(x-1)$

δ) $0<\frac{x}{2}-1+x-\frac{7-x}{6}$ και $1<\frac{x}{-2}+\frac{1-x}{3}-5$

---

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις (ως προς x) για τις διάφορες τιμές του λ :

α) (λ – 1)x ≥ λ β) λx – 2λ < 5x -10 .

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

1. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή

$\lvert χ-3 \rvert<δ$	$d(χ,3)<δ$	$3-δ<χ<3+δ$
$\lvert χ-5 \rvert<4$		
	$d(χ,2)<3$	

---

2. Συνδέστε με μια γραμμή κάθε στοιχείο της στήλης (Α) με το αντίστοιχο της (Β)

ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β	
Α.	$\lvert χ-3 \rvert<5$	1.	$χ<-5$ ή $χ>1$
Β.	$\lvert 2χ-4 \rvert\geq 6$	2.	$χ\leq -2$ ή $χ\geq 6$
Γ.	$d(1,χ)<3$	3.	$χ\leq -1$ ή $χ\geq 5$
Δ .	$\lvert χ+2 \rvert>3$	4.	$-2<χ<8$
Ε.	$d(χ,2)\geq 4$	5.	$-2<χ<4$

---

3. Να επιλυθούν οι **ανισώσεις:**

i) $\frac{2|x|-3}{4}-\frac{|x|+5}{3}\leq 3|x|-2$ ii) $\lvert 13x+25 \rvert\leq 48$

iii) $\lvert -2x+3 \rvert> 5$ iv) $\lvert 3x+2 \rvert>0$

v) $3\lvert x-2 \rvert> x+4$ vi) $3\lvert x \rvert-2x \leq 5$.

vii) $\frac{|2x-1|}{5}+\frac{1}{2} > \frac{|2x-1|}{2}$ viii) $|x-1| < |x-2|$

ix) $5\leq |x-10| \leq 7$ x) $-3\leq |x-2| \leq 8$

---

4. Να λυθούν οι **ανισώσεις:**

α) $x^2<25$ β) $x^2-9\leq 0$ γ) $2x^2-32\geq 0$ δ) $x^2-100>0$.

4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ - ΓΙΝΟΜΕΝΟ - ΠΗΛΙΚΟ

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ - ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$

<table>
<tr><th></th><th>Παραγοντοποίηση του $f(\chi)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$,</th><th>Πρόσημο του $f(\chi)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$</th></tr>
<tr><td>Αν Δ>0
x_1,x_2 ρίζες</td><td>Γράφεται:
$f(x)=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f(x)</td><td></td><td>Ομόσημο του α</td><td>0</td><td>Ετερόσημο του α</td><td>0</td><td>Ομόσημο του α</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Αν Δ=0
$x_0=-\frac{\beta}{2\alpha}$
διπλή ρίζα</td><td>Γράφεται:
$f(x)=\alpha(x-x_0)^2$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f(x)</td><td></td><td>Ομόσημο του α</td><td>0</td><td>Ομόσημο του α</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Αν Δ<0</td><td>Γράφεται:
$f(x)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$
Δεν παραγοντοποιείται</td><td>Είναι παντού ομόσημο του α</td></tr>
</table>

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ Β΄ΒΑΘΜΟΥ

Για την επίλυση ανισώσεων Β΄ βαθμού εργαζόμαστε όπως στα παρακάτω **παραδείγματα.**

Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $3x^2-5x+2<0$ β) $9x^2-12x+4>0$ γ) $-x^2+x-5<0$

α) $3x^2-5x+2<0$ $\Delta=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 2=25-24=1>0$ οπότε το τριώνυμο έχει ρίζες:

$x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{6}=\frac{5\pm 1}{6}$ δηλαδή $\chi_1=1$ ή $\chi_2=\frac{2}{3}$ και επομένως θα έχει πρόσημο:

x	$-\infty$		2/3		1		$+\infty$
$3x^2-5x+2$		+	0	—	0	+	

Άρα η ανίσωση $3x^2-5x+2<0$ έχει λύσεις τους αριθμούς x: $\frac{2}{3}<x<1$.

β) $9x^2-12x+4>0$ $\Delta=(-12)^2-4\cdot 9\cdot 4=144-144=0$ οπότε το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα:

$x_0=\frac{12}{2\cdot 9}=\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		2/3		$+\infty$
$9x^2-12x+4$		+	0	+	

Άρα η ανίσωση $9x^2-12x+4>0$ έχει λύσεις τους αριθμούς x: $x\neq\frac{2}{3}$

γ) $-x^2+x-5<0$ $\Delta=1^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)=1-20=-19<0$ άρα το τριώνυμο είναι παντού ομόσημο του α (δηλαδή αρνητικό) και επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Απλοποιήστε τις κλασματικές παραστάσεις:

α) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$ β) $\dfrac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 + x - 12}$ γ) $\dfrac{4x^2 - 9}{4x^2 - 12x + 9}$

δ) $\dfrac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 4x - 12}$ ε) $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$

---

2. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $-x^2 + 5x - 6 \le 0$ β) $-x^2 + 4x - 4 > 0$ γ) $-x^2 + x - 1 < 0$

δ) $2x^2 + x - 15 > 0$ ε) $5x^2 + 3x - 2 < 3x^2 - 2x + 10$ στ) $6x^2 - 8 < 2x^2 - 3x + 2$

ζ) $x^2 + 1 > 0$ η) $4x^2 + 5 > 0$.

---

3. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $(x - 1)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1) < 0$ β) $(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 2x + 6) \ge 0$

γ) $x^2(3 - x^2) < 0$ δ) $(1 - 2x^2)(-x + 7) \le 0$

ε) $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) > 0$ εάν $\alpha < \beta < \gamma$ στ) $(3x^3 - x^2)(x^2 - x + 1) < 0$

ζ) $3x^3 - 5x^2 + 2x \ge 0$ η) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 17x + 60} > 0$

θ) $\dfrac{-x^2 + 5x + 6}{x^2 + x - 6} > 0$ ι) $\dfrac{x + 1}{7 - x} > 2$.

---

4. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $\dfrac{x - 1}{x + 1} > 1 + \dfrac{2}{1 - x}$ β) $\dfrac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 3)(x - 4)} > 1$ γ) $\dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{x - 1}{x - 4} > \dfrac{3}{2}$

---

5. Για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

α) $\dfrac{3x + 5}{3x - 7} < 0$ β) $\dfrac{12x^2 + 13x - 14}{x - 2} < 0$

---

6. Για ποιες τιμές του x ισχύει η διπλή ανίσωση:

$$-2 < \frac{2x-1}{x^2-3x+2} < 1$$

---

7. Για ποιες τιμές του x το τριώνυμο $x^2 - 14x + 50$ παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 5 και μικρότερες του 26;

---

8. Να λυθεί η ανίσωση: $|x| > 4x$

---

9. Να δειχθεί ότι: $\frac{1}{3} \le \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \le 3$ για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x.

---

10. Για ποιες τιμές του x καθεμιά από τις παρακάτω ρίζες:

$A = \sqrt{2x^2 - 7x + 3}$, $B=\sqrt{x^2-4x+4}$, $\Gamma=\sqrt{x^2+9x+18}$, $\Delta= \sqrt{2x^2-x+1}$

έχει έννοια πραγματικού αριθμού;

---

11. Να δειχθεί ότι η ανίσωση $x^2 + 6\alpha x + 9\alpha^2 + 4 > 0$ αληθεύει για κάθε πραγμ. αριθμό x.

---

12. Να βρεθούν οι τιμές του μ για τις οποίες το τριώνυμο $(\mu - 5)x^2 - 3x + 4$ είναι θετικό για κάθε πραγματικό αριθμό x.

---

13. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{3x+1} < 2$.

---

14. Να δειχθεί ότι για κάθε $x \in (1, 4)$ το κλάσμα $A = \frac{x^2-5x+4}{x^2+2x+1}$ είναι αρνητικό.

---

15. Να λυθούν τα συστήματα των ανισώσεων.

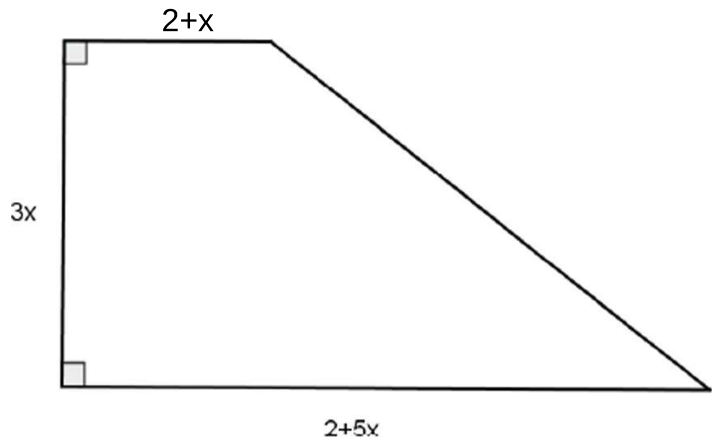
i) $-1 < \frac{2x-1}{(x+1)(x-2)} < 1$

ii) $\begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x \le 0 \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \\ 2x^2 - 5x - 7 > 0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x^2 + x - 6 \le 0 \\ x > 0 \end{cases}$

Δραστηριότητα .

Στο παρακάτω τραπέζιο (οι πλευρές του είναι σε m)



α) Να εκφράσετε την περίμετρο του Π ως συνάρτηση του χ. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Π(χ);

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του Ε ως συνάρτηση του χ. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε(χ);

γ) Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του χ, αν η περίμετρος του τραπεζίου είναι τουλάχιστον 39m και το εμβαδόν του το πολύ $99m^2$.