ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ - ΠΡΟΟΔΟΙ

Ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1,2,3,...,ν,... στους πραγματικούς αριθμούς.

Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_1}$, *ο* αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται **δεύτερος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_2}$ κ.λ.π.

Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός ν καλείται **ν-οστός** ή **γενικός όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_\nu}$. Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε (α_ν).

Παράδειγμα: η ακολουθία με γενικό όρο αν=2ν-5 έχει τους όρους:

$$\alpha_1=2\cdot1-5=-3,\quad \alpha_2=2\cdot2-5=-1,\quad \alpha_3=2\cdot3-5=1,\ \ldots..$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις είναι δύσκολο να ορισθεί ο γενικός όρος της ακολουθίας οπότε η ακολουθία ορίζεται με ένα ***αναδρομικό τύπο***. Δίνεται δηλαδή ένας τύπος που δείχνει πως σχετίζονται δύο ή περισσότεροι όροι της ακολουθίας και ένας αναγκαίος αριθμός αρχικών όρων απ' όπου υπολογίζουμε τους όρους της ακολουθίας.

Ας θεωρήσουμε π.χ. την ακολουθία (α_ν), της οποίας ο πρώτος όρος είναι το 2, και ισχύει ότι $\alpha_{\nu+1}=2\alpha_\nu-1$, για κάθε $\nu\in N^*$. Τότε είναι $\alpha_2=2\alpha_1-1=2\cdot2-1=3$, $\alpha_3=2\alpha_2-1=2\cdot3-1=5$, …

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ	***ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ***
Κάθε ακολουθία α_ν με $\nu\in N^*$ για την οποία ισχύει ότι: $\boldsymbol{\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=\omega}$, για κάθε $\nu\in N^*$,όπου ω είναι σταθερός πραγματικός αριθμός. ***Δηλαδή κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο προσθέτοντας τον ίδιο πάντα πραγματικό αριθμό ω.*** **(ω :διαφορά)**	Κάθε ακολουθία α_ν με $\nu\in N^*$ για την οποία ισχύει ότι: $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\lambda$, για κάθε $\nu\in N^*$, όπου $\lambda\in R^*$. ***Δηλαδή κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο πολλαπλασιάζοντας με τον ίδιο πάντα πραγματικό αριθμό λ ≠0.*** **(λ : λόγος)**
Γενικός όρος: $\boldsymbol{\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega}$, $\nu\in N^*$	***Γενικός όρος:*** $\boldsymbol{\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}}$, $\nu\in N^*$
α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. ⇔ **2β=α+γ** Ο αριθμός $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$ λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ.	***α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π.*** ⇔ $\boldsymbol{\beta^2=\alpha\cdot\gamma}$ Ο αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.
Άθροισμα ν πρώτων όρων. $S_\nu=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)$ ή $S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]$	**Άθροισμα ν πρώτων όρων**. $S_\nu=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$, για λ≠1 Αν λ=1 τότε $S_\nu=\nu\cdot\alpha_1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΡΙΘΜ. ΠΡΟΟΔΩΝ

Πολλαπλής επιλογής

1. Από τις παρακάτω ακολουθίες αριθμητική πρόοδος είναι η

Α. 3, 6, 8, 10, 11, ...

Β. 2, 4, 8, 16, 32, ...

Γ. -3, 1, 5, 9, 13 , ...

Δ. -3, 0, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, ...

---

2. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_5 = 23$. Τότε η διαφορά ω είναι ίση με

Α. 3 **Β.** 4 **Γ.** 5 **Δ.** 1 **Ε.** 20

---

3. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_{10} = 2$ και $\omega = 3$. Τότε α_1 είναι ίσο με

Α. 5 **Β.** 1 **Γ.** - 1 **Δ.** 6 **Ε.** - 25

---

4. Σε μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 3$ και διαφορά $\omega = 4$ έχουμε $\alpha_\nu = 35$. Τότε το πλήθος ν των όρων της είναι

Α. 7 **Β.** 32 **Γ.** 31 **Δ.** 9 **Ε.** 8

---

5. Ο $10^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου : $10, 7, 4, \cdots$ είναι

Α. - 14 **Β.** - 20 **Γ.** - 17 **Δ.** - 30 **Ε.** 0

---

6. Η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3\nu + 2$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω ίση με

Α. 5 **Β.** 2 **Γ.** - 1 **Δ.** 3 **Ε.** 10

---

7. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1 = 8$ και $\omega = 3$. Τότε ο νιοστός της όρος είναι ίσος με

Α. $\alpha_\nu = 8\nu + 3$ **Β.** $\alpha_\nu = 3\nu + 8$ **Γ.** $\alpha_\nu = 3\nu + 5$

Δ. $\alpha_\nu = 5\nu + 3$ **Ε.** $\alpha_\nu = \nu + 11$

---

8. Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_4 = x$ και $\alpha_6 = y$, τότε η διαφορά ω είναι ίση με

Α. $\frac{x+y}{2}$ **Β.** $\frac{x-y}{2}$ **Γ.** $y - \frac{x}{2}$ **Δ.** $\frac{y-x}{2}$ **Ε.** $\frac{y}{2} - x$

---

9. Η διαφορά της αριθμητικής προόδου : $\alpha + \beta, \alpha, \alpha - \beta, \cdots$ είναι

Α. α **Β.** β **Γ.** 2β **Δ.** $-\alpha$ **Ε.** $-\beta$

---

10. Από τις παρακάτω τριάδες **δεν** αποτελείται από διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου η

Α. 5, 20, 35 **Β.** - 5, 0, 5 **Γ.** 45, 20, - 5

Δ. 5, -10, -25 **Ε.** - 5, 20, 35

---

11. Αν οι αριθμοί 3k, k + 4, k - 1 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ο k είναι ίσος με

Α. 4 **Β.** 2 **Γ.** 5 **Δ.** 4,5 **Ε.** 1,5

---

12. Τα πολλαπλάσια του 3 μεταξύ του 5 και του 35 είναι

Α. 3 **Β.** 5 **Γ.** 8 **Δ.** 10 **Ε.** 30

---

13. Σε μια αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\omega > 0$ ισχύει

Α. $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3$ **Β.** $\alpha_4 = \alpha_1 + 4\omega$ **Γ.** $\alpha_3 = \alpha_4 - \omega$

Δ. $\alpha_4 = \alpha_3 - \omega$ **Ε.** $\alpha_4 + \alpha_3 = \alpha_7$

---

14. Σε μια αριθμητική πρόοδο με διαφορά ω, το άθροισμα δυο όρων της που ισαπέχουν από τα

άκρα της είναι

Α. Πολλαπλάσιο της διαφοράς ω.

Β. Παίρνει τιμές που εξαρτώνται από την τάξη των όρων αυτών.

Γ. Ίσο με το πλήθος ν.

Δ. Ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων της προόδου.

Ε. Ίσο με τον αριθμητικό μέσο της.

Ανάπτυξης

1. Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου δείξτε ότι οι αριθμοί $\alpha^2 - \beta \cdot \gamma$, $\beta^2 - \alpha \cdot \gamma$, $\gamma^2 - \alpha \cdot \beta$ είναι επίσης διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

---

2. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν *άθροισμα* 33 και *γινόμενο* 440.

---

3. Να βρείτε τέσσερις διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, οι οποίοι έχουν *άθροισμα* 16 και *γινόμενο άκρων* όρων 7.

---

4. Να βρείτε το πλήθος και το άθροισμα

α) των διψήφιων περιττών αριθμών β) των διψήφιων αρτίων αριθμών

γ) των διψήφιων φυσικών αριθμών δ) των διψήφιων πολλαπλασίων του 4.

---

5. Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας είναι $\alpha_\nu = 3\nu + 2$.

α) Να βρείτε τον επόμενο όρο $\alpha_{\nu+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της

δ) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 62

(Μπορούν να γίνουν και ανάλογα προβλήματα για $\alpha_\nu = 4\nu - 2$ ή $\alpha_\nu = -3\nu + 13$).

---

6. Μιας ακολουθίας το άθροισμα των ν πρώτων όρων της είναι $S_\nu = 3\nu^2 + \nu$.

α) Να βρείτε το άθροισμα των (ν-1) πρώτων όρων της

β) Να βρείτε τον νιοστό της όρο

γ) Να βρείτε τον όρο $\alpha_{\nu+1}$

δ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

ε) Να βρείτε την τάξη του όρου της που είναι ίσος με 100

---

7. Σ' έναν ουρανοξύστη 17 ορόφων, τα γραφεία του ιδίου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 300 $\in$ το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου ενοικιάζεται 20 $\in$ το μήνα ακριβότερα από ένα γραφείο του προηγουμένου ορόφου.

α) Ποιο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;

β) Πόσο ακριβότερο είναι ένα γραφείο του $15^{ου}$ ορόφου από ένα του $7^{ου}$ ορόφου;

γ) Σε ποιους ορόφους το ενοίκιο ξεπερνά τα 450 $\in$ το μήνα;

δ) Αν το πλήθος των γραφείων ενός ορόφου είναι μικρότερο κατά 2 από το πλήθος των γραφείων του αμέσως προηγουμένου ορόφου και ο $17^{ος}$ όροφος έχει 12 γραφεία, πόσα γραφεία έχει ο πρώτος όροφος;

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ — ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Ασκήσεις τύπου σωστό-λάθος

1.	Αν α, β, γ, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε $\beta - \alpha = \gamma - \beta$.	**Σ**	**Λ**
2.	Αν α, β, γ, διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$.	**Σ**	**Λ**
3.	Το άθροισμα $S_\nu = 1 + 2 + ... + \nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$.	**Σ**	**Λ**
4.	Η ακολουθία -2, 5, 8, ... είναι γεωμετρική πρόοδος.	**Σ**	**Λ**
5.	Η ακολουθία $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, ... είναι αριθμητική πρόοδος.	**Σ**	**Λ**
6.	Στη γεωμετρική πρόοδο 100, 50, 25, ... ο λόγος λ είναι $\frac{1}{2}$.	**Σ**	**Λ**
7.	Στη γεωμετρική πρόοδο 18, -9, $\frac{9}{2}$, $-\frac{9}{4}$ ... ο λόγος λ είναι $\frac{1}{2}$.	**Σ**	**Λ**
8.	Η αριθμητική πρόοδος 3, 7, 11, ... έχει $S_\nu = 4^\nu - 1$.	**Σ**	**Λ**
9.	Η γεωμετρική πρόοδος 4, 8, 16, 32, ... έχει $S_\nu = \frac{4}{3}(2^\nu - 1)$.	**Σ**	**Λ**
10.	Οι αριθμοί 7, 14, 21 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.	**Σ**	**Λ**
11.	Οι αριθμοί 3, 6, 12 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.	**Σ**	**Λ**
12.	Το 25 είναι γεωμετρικός μέσος των αριθμών 5 και 45.	**Σ**	**Λ**

Ανάπτυξης

1. Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_3 = 12$ και $\alpha_8 = 384$, να βρεθεί ο λ.

---

2. Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $\alpha_4 = 13$, $\alpha_6 = 117$ και $\alpha_\nu = 9477$, να βρεθεί ο ν.

---

3. Να βρεθεί το πλήθος ν των όρων μιας γεωμετρικής προόδου α_ν, αν έχουμε: $\alpha_1 = 4$, $\alpha_\nu = 972$ και $S_\nu = 1456$.

---

4. Να βρεθούν τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, οι οποίοι να έχουν άθροισμα 14 και γινόμενο 64.

---

5. Να βρεθούν τέσσερις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με θετικούς όρους, οι οποίοι να έχουν γινόμενο 16 και άθροισμα μεσαίων όρων 5.

---

6. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^\nu$.

α) Να βρεθεί ο όρος $\alpha_{\nu+1}$.

β) Να δειχθεί ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθεί ο λόγος λ και ο πρώτος της όρος α_1.

γ) Ποιος όρος της είναι ίσος με 3072;

---

7. Δίνεται η ακολουθία με $S_\nu = 2\,(3^\nu - 1)$

α) Να βρεθεί το $S_{\nu-1}$ β) Να βρεθεί το α_ν γ) Να βρεθεί το $\alpha_{\nu+1}$

δ) Να δειχθεί ότι αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθεί ο λ και ο α_1.

ε) Πόσους όρους της πρέπει να πάρουμε, για να έχουμε άθροισμα 484;

---

8. α) Αν οι αριθμοί 3, α, β είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και οι 3, α-6, β είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να βρείτε τους α, β.

β) Αν οι αριθμοί α, β, 12 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και οι α, β, 9 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να βρείτε τους α, β.

---

9. Ο Πέτρος γιορτάζοντας τα $12^{α}$ γενέθλιά του, ζήτησε από τους γονείς του για δώρο 50∈ και κάθε επόμενα γενέθλια να του αυξάνουν το ποσό κατά 10 ∈ μέχρι να γιορτάσει τα 21 χρόνια του.

Ο πατέρας του αντιπρότεινε τα εξής: ***"Θα σου δώσω τώρα 5 ∈ και κάθε επόμενα γενέθλιά σου θα σου διπλασιάζω το προηγούμενο ποσό".*** Ο Πέτρος σκέφτηκε λίγο και απέρριψε τη πρόταση του πατέρα του πιστεύοντας ότι όταν θα γιορτάζει τα $18^{α}$ γενέθλιά του με τη δική του πρόταση θα πάρει περισσότερα χρήματα.

α) Δικαιολογήσετε γιατί συμφωνείτε ή διαφωνείτε με την άποψη του Πέτρου.

β) Πόσα χρήματα θα πάρει με τη δική του πρόταση στα $21^{α}$ γενέθλιά του και πόσο θα έπαιρνε με την πρόταση του πατέρα του.

---

10. Η ακολουθία $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$ ονομάζεται ***ακολουθία Fibonacci*** (Leonardo di Pisa (Fibonacci), 1175-1250).

α) Ας αντιστοιχίσουμε, λοιπόν, τους φυσικούς αριθμούς ν με τους όρους της παραπάνω ακολουθίας $α_ν$, συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα:

ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$α_ν$	0	1									

β) Παρατηρήστε πως προκύπτουν οι όροι της ακολουθίας από τον $α_3$ και μετά.

Μπορείτε να υπολογίσετε το $12^{ο}$ όρο της ακολουθίας; Ποιες πληροφορίες χρειάζονται για τον υπολογισμό του $12^{ου}$ όρου;

γ) Ας προσπαθήσουμε να σκεφτούμε έναν κανόνα που θα μας βοηθά να βρίσκουμε οποιονδήποτε όρο της παραπάνω ακολουθίας.

---

11. Δέκα αδέλφια μοιράζονται 100 ευρώ. Κάθε αδελφός παίρνει **α** ευρώ περισσότερα από τον αμέσως μικρότερο του. Ο $7^{ος}$ στη σειρά αδελφός παίρνει 7 ευρώ.

α) Αποτελούν τα χρήματα που θα πάρουν τα αδέλφια όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

β) Πόσα χρήματα παίρνει ο κάθε αδελφός;

---

12. Ένα φυτό έχει ύψος 1,67cm στο τέλος της πρώτης εβδομάδας της ζωής του και συνεχίζει να ψηλώνει για 9 εβδομάδες ακόμα. Κάθε εβδομάδα ψηλώνει 4% περισσότερο από την προηγούμενη.

α) Αποτελούν τα ύψη του φυτού στο τέλος κάθε εβδομάδας όρους αριθμητικής ή γεωμετρικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

β) Αν η απάντηση στο (α) ερώτημα είναι καταφατική, να γράψετε το γενικό όρο της προόδου,

γ) Ποιο είναι το ύψος που πήρε το φυτό την $4^{η}$ εβδομάδα; (να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης)

δ) Ποιο θα είναι το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το φυτό;