6. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

6.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

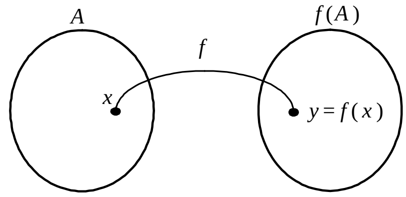
ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε ***συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β*** μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο x του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο y του συνόλου Β.

Το *y* ονομάζεται **τιμή της *f* στο *x*** και συμβολίζεται με $f(x)$.

Γράφουμε: $f:\ A \to B$

$x \to y = f(x)$.



— Το γράμμα *x*, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του *A* λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα *y*, που παριστάνει την τιμή της *f* στο *x*, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

— Το σύνολο Α λέγεται ***πεδίο ορισμού της f*** ενώ το σύνολο που έχει για στοιχεία του όλες τις τιμές της f για όλα τα x∈Α, λέγεται ***σύνολο τιμών της f*** και το συμβολίζουμε ***f(A).***

— Αν **Α⊆R** και **Β⊆R** τότε λέμε ότι η f είναι ***πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.***

Πεδίο Ορισμού

Όταν το $f(x)$ εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης είναι ***το "ευρύτερο" υποσύνολο του R στο οποίο το*** $f(x)$ ***έχει νόημα πραγματικού αριθμού.***

Έτσι, συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο λύσεων της ανίσωσης χ-2≥0, δηλαδή το διάστημα Δ=[2,+∞).

Προσέχουμε **για την εύρεση του πεδίου ορισμού** μιας συνάρτησης f της οποίας δίνεται ο τύπος της τα παρακάτω:

i) Οι **πολυωνυμικές** συναρτήσεις έχουν **πεδίο ορισμού το R**.

ii) Οι **παρανομαστές** όπου και αν εμφανίζονται, πρέπει να είναι **διαφορετικοί από το μηδέν.**

iii) Οι **υπόριζες ποσότητες** ανεξάρτητα από την τάξη του ριζικού, πρέπει να είναι πάντα **μη αρνητικοί αριθμοί**.

Παρατηρήσεις

α) Πολλές φορές μια συνάρτηση περιγράφεται με έναν τύπο που έχει κλάδους, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \le 2 \\ -2x + 3, & x > 2 \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της f στα σημεία -1, 2 και 3 εργαζόμαστε

- Για x = -1 <2, από τον κλάδο $f(x) = 2x^2 - 1$, έχουμε:

$$f(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

- Για $x = 2$, από τον κλάδο $f(x) = 2x^2 - 1$, έχουμε:

$$f(2) = 8 - 1 = 7.$$

- Για $x = 3 > 2$, από τον κλάδο $f(x) = -2x + 3$, έχουμε:

$$f(3) = -6 + 3 = -3.$$

β) Συνήθως, χρησιμοποιούμε το γράμμα f για τα συμβολισμό μιας συνάρτησης και το γράμμα x για το συμβολισμό του τυχαίου στοιχείου του πεδίου ορισμού της, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα.

Έτσι για παράδειγμα οι $\boldsymbol{f(x) = x^2+2012}$, $\boldsymbol{g(t) = t^2+2012}$ και $\boldsymbol{h(w) = w^2+2012}$ ορίζουν ουσιαστικά την ίδια συνάρτηση.

Δραστηριότητα 1

Ας υποθέσουμε ότι στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η μέγιστη μηνιαία θερμοκρασία για την πόλη της Θεσσαλονίκης το έτος 2003.

ΙΑΝ	ΦΕΒ	ΜΑΡ	ΑΠΡ	ΜΑΙΟΣ	ΙΟΥΝ	ΙΟΥΛ	ΑΥ Γ	ΣΕΠΤ	ΟΚΤ	ΝΟΕΜ	ΔΕΚ
-0,3°C	-0,8°C	4°C	11°C	13°C	20°C	20°C	25°C	20°C	15°C	12°C	2°C

Είναι η αντιστοιχία: Μήνας $\rightarrow$ Θερμοκρασία συνάρτηση;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δραστηριότητα 2

Είναι οι παρακάτω αντιστοιχίες συναρτήσεις; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Ημερομηνία γέννησης $\rightarrow$ άνθρωποι που έχουν γεννηθεί εκείνη την ημέρα.

β) Άτομο $\rightarrow$ Ημέρα γενεθλίων.

γ) Άτομο $\rightarrow$ Βάρος του ατόμου.

δ) Μαθητής της τάξης $\rightarrow$ Αριθμός τηλεφώνου.

6.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το ζεύγος δύο καθέτων αξόνων x΄x και y΄y στο επίπεδο με κοινή αρχή το σημείο O. Αν οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος τότε το σύστημα λέγεται **ορθοκανονικό.**

Ο οριζόντιος άξονας x΄x λέγεται **άξονας των τετμημένων** και ο κατακόρυφος άξονας y΄y **άξονας των τεταγμένων**.

Σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου αντιστοιχίζουμε ένα ζεύγος (α,β) και αντίστροφα. Γράφουμε Μ(α,β). Τα α,β λέγονται **συντεταγμένες** του Μ. (α:**τετμημένη** και β:**τεταγμένη**)

Παρατηρήσεις

— Ένα σημείο **Μ(x,y)** ανήκει στον **άξονα x΄x αν y=0** και στον **y΄y αν x=0.**

Συμμετρίες

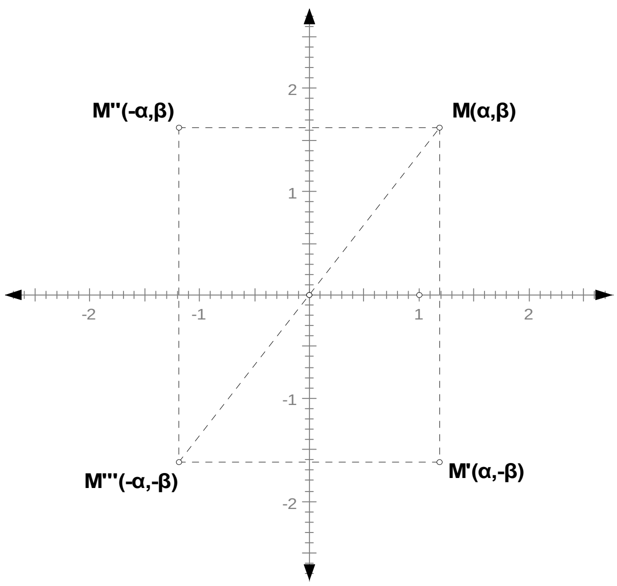
Δύο σημεία **συμμετρικά ως προς**

i) **τον άξονα x΄x** έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες.

ii) **τον άξονα y΄y** έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.

iii) **την αρχή Ο** έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

iv) **την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων** έχουν το ένα τετμημένη την τεταγμένη του άλλου και αντίστροφα.



Π.χ. Το σημείο Μ(-3,5) έχει συμμετρικό ως προς

τον άξονα x΄x το σημείο Μ(-3,-5)

τον άξονα y΄y το σημείο Μ(3,5)

την αρχή Ο το σημείο Μ(3,-5)

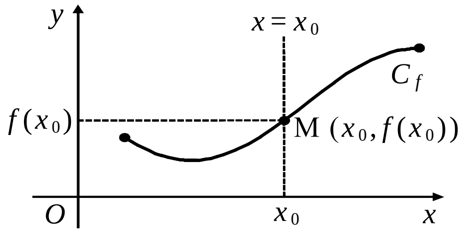
την διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων το σημείο Μ(5,-3).

— Η **απόσταση δύο σημείων** $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δίνεται από τον τύπο:

$$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Γραφική παράσταση της f

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.
Το σύνολο των σημείων $\mathbf{M(x,y)}$ για τα οποία ισχύει $\mathbf{y=f(x)}$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $\mathbf{M(x,f(x))}$, $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.



ΠΡΟΣΟΧΗ

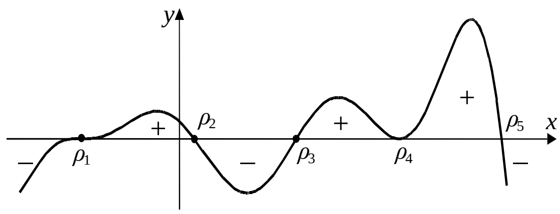
— Επειδή κάθε $\mathbf{x \in A}$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in R$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο.

— Η γραφική παράσταση της ***f τέμνει τον άξονα y΄y*** στο σημείο **A(0,f(0)).**

— Η γραφική παράσταση της ***f τέμνει τον άξονα x΄x*** στα σημεία ***(ρ,0)*** όπου ***f(ρ)=0.***

— Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης **f βρίσκεται πάνω** (αντίστοιχα κάτω) **από τον άξονα x΄x** στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της για τα οποία ισχύει ότι **f(x)>0** (f(x)<0).

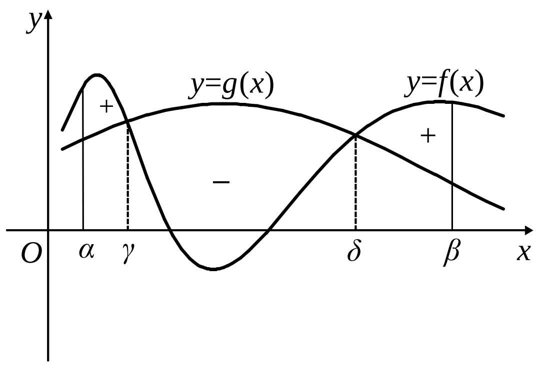
Η γραφική παράσταση της **f τέμνει τον άξονα x΄x** στα σημεία (ρ,0) όπου f(ρ)=0.



— Για να βρούμε τη **σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g στο [α,β]** των συναρτήσεων f,g αντίστοιχα, μελετάμε το **πρόσημο της διαφοράς**

$$\mathbf{f(x)-g(x) \text{ για } x \in [\alpha,\beta]} \ .$$

α) Αν **f(x)-g(x)>0** για κάθε x ενός διαστήματος Δ, τότε στο Δ η **C_f είναι ψηλότερα από τη C_g.**



β) Αν **f(x)-g(x)<0** για κάθε x ενός διαστήματος Δ, τότε στο Δ η **C_f είναι χαμηλότερα από τη C_g.**

γ) **Τα κοινά σημεία των C_f, C_g** είναι τα σημεία με τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης **f(x)-g(x)=0.**

— Όταν δίνεται η γραφική παράσταση $\mathbf{C_f}$, μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\mathbf{y=-f(x)} \quad \text{και} \quad \mathbf{y=|f(x)|}.$$

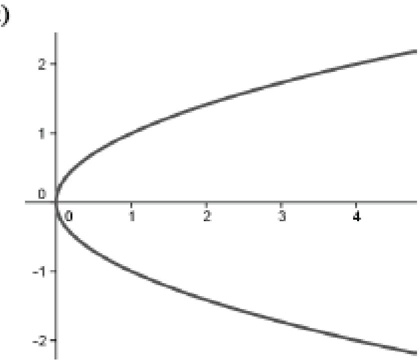
α) **Η γραφική παράστασης της συνάρτησης –f** είναι συμμετρική της $\mathbf{C_f}$, ως προς τον άξονα x΄x.

β) **Η γραφική παράσταση της | *f* |** αποτελείται από τα τμήματα της $\mathbf{C_f}$ που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

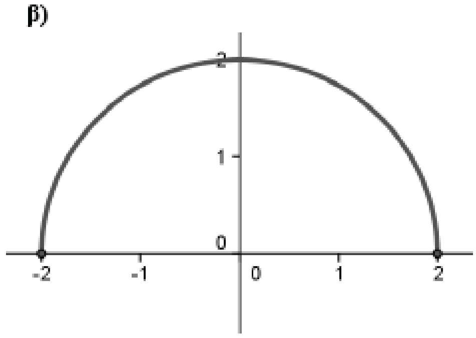
Δραστηριότητα 3

Είναι τα παρακάτω διαγράμματα γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων;
Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

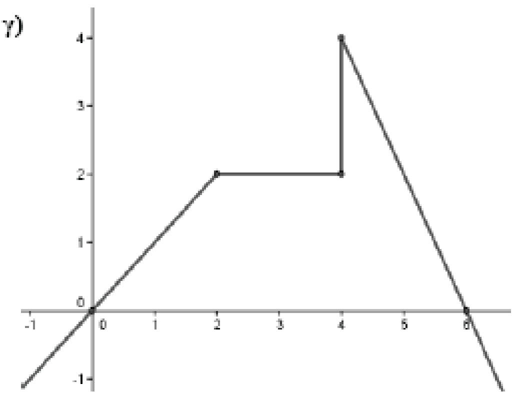
α)



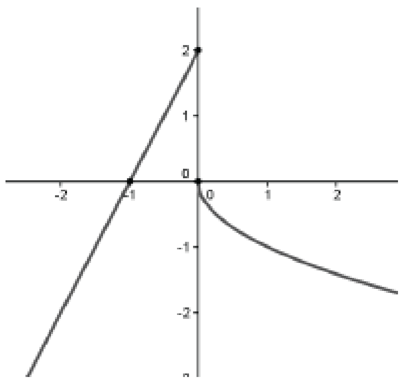
β)



γ)



δ)



Να συμπληρωθούν κατάλληλα τα κενά που υπάρχουν στις παρακάτω προτάσεις:

1. Αν f (x) = 3x - 2, x ∈ R να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) f (- 3) = ... β) f (α) = ... , α∈R

γ) f (3x) = ... δ) $f(x^2)$ =.....

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -3x, & x < -2 \\ 4, & -2 \le x < 1 \\ 3-2x, & x > 1 \end{cases}$

Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) f (-3) = ... β) f (-2) = ...

γ) f (0) = ... δ) f (1) = ...

3. Να συμπληρώσετε το πεδίο ορισμού Α των συναρτήσεων:

α) $\mathbf{f(x)} = \sqrt{-x+2}$ Α = ...

β) $\mathbf{g(x)} = \sqrt{2-|x|}$ Α = ...

γ) $\mathbf{h(x)} = \dfrac{3x+1}{-x^2+4}$ Α = ...

δ) $\mathbf{f(x)} = \dfrac{x^2-2x+5}{(1-x)(2x+3)}$ Α = ...

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ β) $f(x)=\dfrac{2x+3}{1-|x-2|}$ γ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-|x|}}{|x|-1}$

δ) $f(x)=\dfrac{x+2}{|x|-x}$ ε) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}$ δ) $f(x)=\sqrt[3]{2x-3}$

---

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{|x-1|-10}$ β) $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ γ) $h(x) = \dfrac{2x+2}{x^2-5x+6}$

δ) $k(x)=\dfrac{x+2}{|x-1|-3}$ ε) $l(x)=\dfrac{x}{|x-1|+3}$ στ) $m(x)=\sqrt{x^2+1}-76$

---

3. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με: Α(1,2), Β(1+2$\sqrt{3}$,4), Γ(1,6).

Να δειχθεί ότι είναι ισόπλευρο.

---

4. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & \text{άν} \quad x<1 \\ x^2-3x-4, & \text{άν} \quad x\geq 1 \end{cases}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρεθούν οι τιμές $f(0), f(1), f(-2), f(3)$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x)=0$.

---

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-1}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρεθεί το σημείο, στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$.

γ) Σε ποια σημεία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$;

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $\Sigma(2,-2)$ και $\Lambda(-2,3)$.

ε) Να απλοποιηθεί ο τύπος της f.

---

6. Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) με τους άξονες x ΄x και y ΄y των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

$f(x) = x^2 - 5x + 6$, $g(x) = \sqrt{x^2-4}$, $h(x) = \sqrt{x-2} + 3$.

---

7. Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 6x^2 - 2x + 1$ και $g(x) = 5x^2 + x - 1$.

---

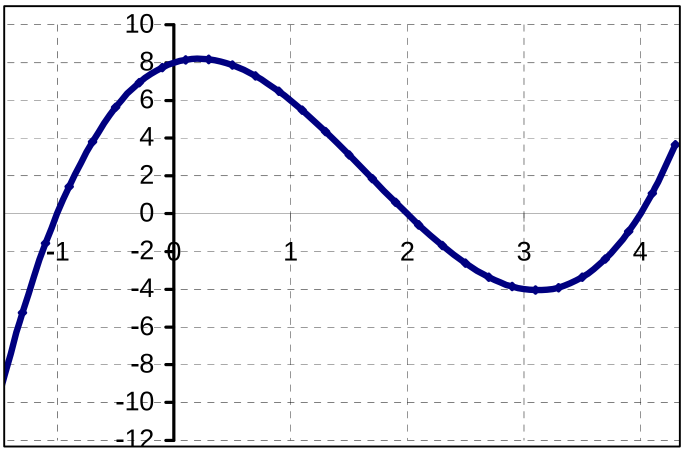
8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$ και $f(1)$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\leq 0$

δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)>0$.



---

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^3-16}{\sqrt{6-2|x-1|}+1}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να δείξετε ότι: $\dfrac{f(3)+f(-1)}{20}=\sqrt{2}-1$

iii) Να βρείτε τα σημεία A,B στα οποία η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, καθώς και την απόσταση (AB).

----

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=(x-1)(x-3)$ και $g(x)=(2x+3)^2-(x+4)^2$

i. Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(2)$, $f(-\frac{1}{2})$, $\mathrm{g}(0)$, $g(-\frac{4}{3})$.

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x)=0$ και $g(x)=0$.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)=(x-2)^2+f(2)$ και να βρείτε το πρόσημο της $f(x)$.

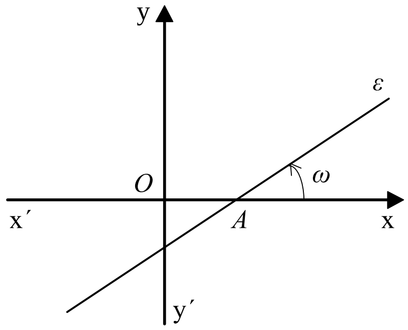
iv. α) Να βρείτε το πρόσημο της διαφοράς $g(x)-f(x)$

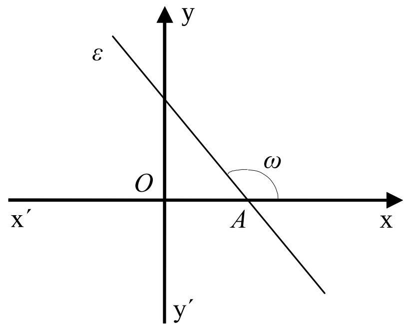
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

6.3 ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x)=αx+β

Γωνία που σχηματίζει ευθεία ε με τον άξονα x΄x - Συντελεστής διεύθυνσης

- Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A.





Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε τη λέμε γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

- Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία $\boldsymbol{\omega = 0}$.

Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $\mathbf{0^0 \leq \omega < 180^0}$.

Ως **συντελεστή διεύθυνσης** ή ως **κλίση** μιας ευθείας *ε* ορίζουμε την **εφαπτομένη της γωνίας *ω* που σχηματίζει η *ε* με τον άξονα χ΄χ**. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας *ε* συμβολίζεται συνήθως με λ_ε ή απλά με λ.

Είναι φανερό ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας *ε* είναι:

— **θετικός**, αν η γωνία *ω* είναι **οξεία**,

— **αρνητικός**, αν η γωνία *ω* είναι **αμβλεία** και

— **μηδέν,** αν η γωνία *ω* είναι **μηδέν**.

— Στην περίπτωση που η γωνία ***ω* είναι ίση με 90°**, δηλαδή όταν η ευθεία *ε* είναι κάθετη στον άξονα χ΄χ, **δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την *ε***.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=αx+β

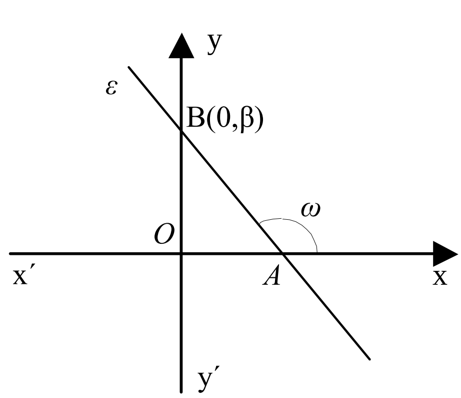
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης ***f(x)=αx+β*** είναι μια ***ευθεία γραμμή***, η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0,β) και σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία ω, για την οποία ισχύει: **εφω=α**

Ο αριθμός α επομένως είναι ο **συντελεστής διευθύνσεως** της ευθείας και καθορίζει την διεύθυνσή της.

— Αν **α>0**, τότε $\mathbf{0^o<\omega<90^o}$

— Αν **α<0,** τότε $\mathbf{90^o<\omega<180^o}$

— Αν **α=0**, τότε $\mathbf{\omega= 0^o}$**.**



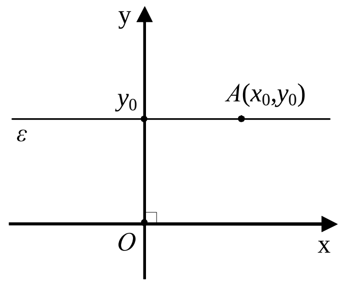
— Δεν ορίζεται ο συντελεστής διευθύνσεως ευθείας που είναι παράλληλη στον άξονα y΄y. Μια τέτοια ευθεία δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

— Δύο ευθείες **ε₁**και **ε₂** με εξισώσεις $y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $y=\alpha_2 x+\beta_2$ αντίστοιχα είναι :

παράλληλες αν $\alpha_1=\alpha_2$ και ***κάθετες αν*** $\alpha_1\cdot\alpha_2=-1$

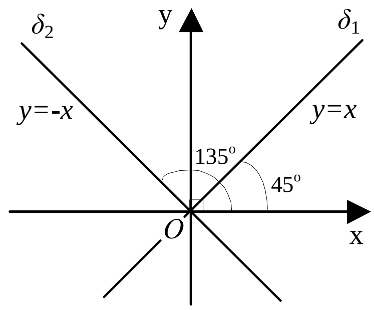
Ειδικές περιπτώσεις

i) Αν $\alpha = 0$, η συνάρτηση παίρνει την μορφή $f(x) = \beta$ και λέγεται **σταθερή συνάρτηση,** διότι η τιμή της είναι η ίδια για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν έχουμε μία τέτοια ευθεία που να διέρχεται από ένα σημείο $A(x_0,y_0)$ και να είναι παράλληλη στον x΄x έχει εξίσωση $y=y_0$.



ii) Αν **β=0** τότε παίρνει την μορφή **f(x)=αx** και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή O.

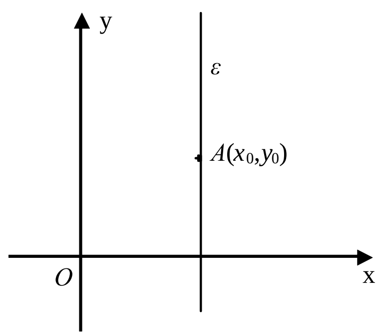
Ειδικότερα για **α=1** και **α=−1** οι ευθείες **y=x** και **y=-x** είναι οι διχοτόμοι των γωνιών των αξόνων.



iii) Οι ευθείες που είναι παράλληλες προς τον άξονα y΄y, δεν είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και δεν εκφράζονται με την μορφή ***f(x)=αx+β***.

Ωστόσο αν έχουμε μία τέτοια ευθεία που να διέρχεται από ένα σημείο $A(x_0,y_0)$ και να είναι παράλληλη στον y΄y έχει εξίσωση $x=x_0$.

(Όλα τα σημεία της έχουν τετμημένη x_0).



xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

6.4 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ – ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Κατακόρυφη μετατόπιση

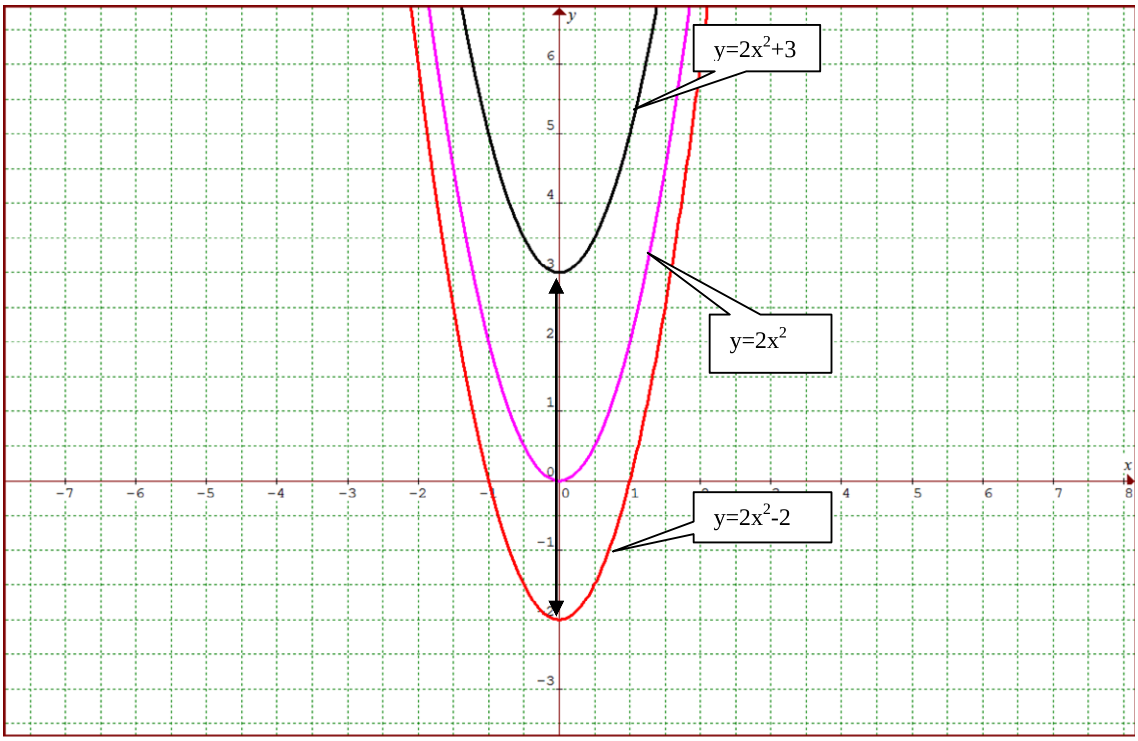
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:

$$f(x) = \varphi(x) + c, \text{ όπου } c \in \mathbb{R},$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες. (Προς τα ***πάνω αν c>0*** και προς τα ***κάτω αν c<0***).

Παράδειγμα:

- Για να γίνει η γραφ. παράσταση της $y=2x^2+3$, κάνω πρώτα την γραφ. παράσταση της $y=2x^2$ και στην συνέχεια την μετατοπίζω παράλληλα στον y΄y κατά ***3 μονάδες προς τα πάνω***.
- Για να γίνει η γραφ. παράσταση της $y=2x^2-2$, κάνω πρώτα την γραφ. παράσταση της $y=2x^2$ και στην συνέχεια την μετατοπίζω παράλληλα στον y΄y κατά ***2 μονάδες προς τα κάτω.***



Οριζόντια μετατόπιση

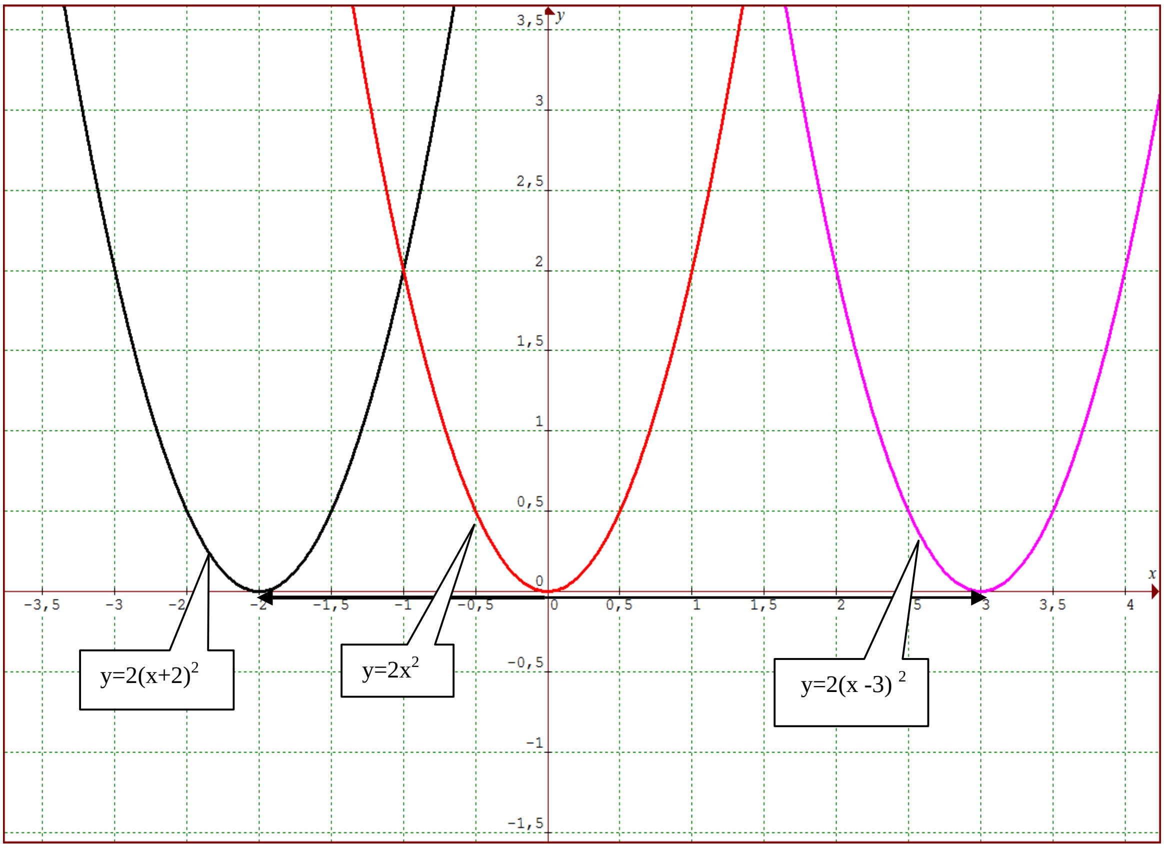
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:

$$f(x) = \varphi(x-c),\ \text{όπου}\ \ c \in \mathbb{R}\ ,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες. (Προς τα ***δεξιά αν c>0*** και προς τα ***αριστερά αν c<0***).

Παράδειγμα:

- Για να γίνει η γραφική παράσταση της $y=2(x-3)^2$, κάνω πρώτα την γραφική παράσταση της $y=2x^2$ και στην συνέχεια την μετατοπίζω παράλληλα στον x΄x κατά ***3 μονάδες προς τα δεξιά***.
- Για να γίνει η γραφική παράσταση της $y=2(x+2)^2$, κάνω πρώτα την γραφική παράσταση της $y=2x^2$ και στην συνέχεια την μετατοπίζω παράλληλα στον x΄x κατά ***2 μονάδες προς τα αριστερά.***



XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ «ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ»

1.	Οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ με εξισώσεις $ψ = - 3x + 4$ και $ψ = - 3x + 5$ αντίστοιχα είναι κάθετες.	
2.	Το πεδίο ορισμού της $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x}$ είναι το R.	
3.	Αν $f(x)=x^2 -4x+7$ τότε $f(3x) =9x^2-12x +7$.	
4.	Τα σημεία Α (α, β) και Β (- α, - β) του καρτεσιανού επιπέδου είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.	
5.	Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι το [1, 2] τότε $1 \le f(x) \le 2$ για κάθε x.	
6.	Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x > 2 \\ -2x & \text{αν } x < 2 \end{cases}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.	
7.	Η συνάρτηση $f(x) = x+1$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.	
8.	Ισχύει ότι: "$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} \Leftrightarrow f(x) = x+1$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$".	
9.	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x + 2009$ με πεδίο ορισμού το $A = [1,\ 4]$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 2009)$.	
10.	Το σημείο $A(1,\ 2)$ δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = 3x - 1$.	
11.	Η γωνία που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα $x'x$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[0^0, 180^0)$.	
12.	Υπάρχουν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης α_1, α_2 αντίστοιχα για τις οποίες να ισχύει ταυτόχρονα $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$.	
13.	Η ευθεία με εξίσωση $y = a^2 x + 3$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.	
14.	Οι ευθείες $y = 3$ και $y = 3x$ είναι παράλληλες.	
15.	Οι ευθείες $y = 2x + 3$ και $2x - y = 4$ τέμνονται.	
16.	Η απόσταση των σημείων $A(1,4)$ και $B(5,7)$ είναι ίση με 5.	
17.	Αν α_1, α_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - \sqrt{13}x - 3 = 0$ τότε οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \alpha_1 x + \sqrt{3}$ και $\varepsilon_2 : y = \alpha_2 x - \sqrt{13}$ είναι κάθετες.	
18.	Αν $\varepsilon_1 : y = 2x + 3$ και $\varepsilon_2 : y = 2 + 3x$, τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Δίνονται οι ευθείες $ε_1$: y=(3λ-1)x+4, $ε_2$: y=(λ+1)x+λ

Να βρεθεί ο $λ \in R$ ώστε:

i) Οι $ε_1,ε_2$ να είναι κάθετες

ii) Οι $ε_1,ε_2$ να είναι παράλληλες.

---

2. Δίνεται η ευθεία $y=(λ^2-5)x+λ-1$. Να βρεθεί ο $λ \in R$ ώστε:

α) Να είναι παράλληλη προς την ευθεία y=4x-7

β) Να είναι παράλληλη προς την ευθεία y=5

γ) Να είναι κάθετη προς την ευθεία y=x+2.

---

3. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\le 2 \\ -2x+3, & x>2 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} 2x, & x\le -1 \\ -2, & -1<x\le 2 \\ -2x+1, & x>2 \end{cases}$$

---

4. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

α) $f(x)=2|x|-3$ β) $f(x)=3|x-2|-2|x+1|+2$ γ) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$.

---

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x+λ$, $λ\in\mathbb{R}$.

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

B. Να βρείτε για ποια τιμή του λ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο Α(1,4).

C. Για $λ=3$

i) Να χαραχθεί η γραφική παράσταση της f.

ii) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $y=f(x)$.

iii) Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η C_f με τον άξονα $x'x$.

iv) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τους άξονες.

---

6. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1 : y = (\lambda - 2)x + 11, \qquad \varepsilon_2 : y = 5x + \beta \quad \text{όπου } \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

Η ευθεία ε_2 διέρχεται από το σημείο $A(1,\ 15)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = 10$.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

γ) Αν $\lambda = 7$, να βρείτε το κοινό σημείο της ευθείας ε_1 με την ευθεία $y = 3x + 5$.

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(-3,\ -4)$ από την αρχή των αξόνων.

----

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{3}{4}x + 3$.

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες.

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(120,\ 93)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το σημείο $N\left(\frac{4}{3},\ \alpha^2 + 6\alpha - 3\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

ε) Να γράψετε την εξίσωση μιας ευθείας που να διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$ και να είναι παράλληλη προς τη γραφική παράσταση της f.

ζ) Να γράψετε την εξίσωση μιας ευθείας που να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $Z(0,\ 4)$ και να είναι παράλληλη προς τη γραφική παράσταση της f.

η) Να γράψετε την εξίσωση μιας ευθείας που να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο ίδιο σημείο στο οποίο τον τέμνει και η γραφική παράσταση της f και η οποία να έχει συντελεστή διεύθυνσης μηδέν.

θ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ευθεία $y = |\lambda - 1|x + 2012$ είναι παράλληλη προς τη γραφική παράσταση της f.

ι) Να βρείτε για ποια τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ η ευθεία $y = (\kappa+2)x - 1$ είναι κάθετη στη γραφική παράσταση της f.

ια) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

6.5 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΑΚΡΟΤΑΤΑ - ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

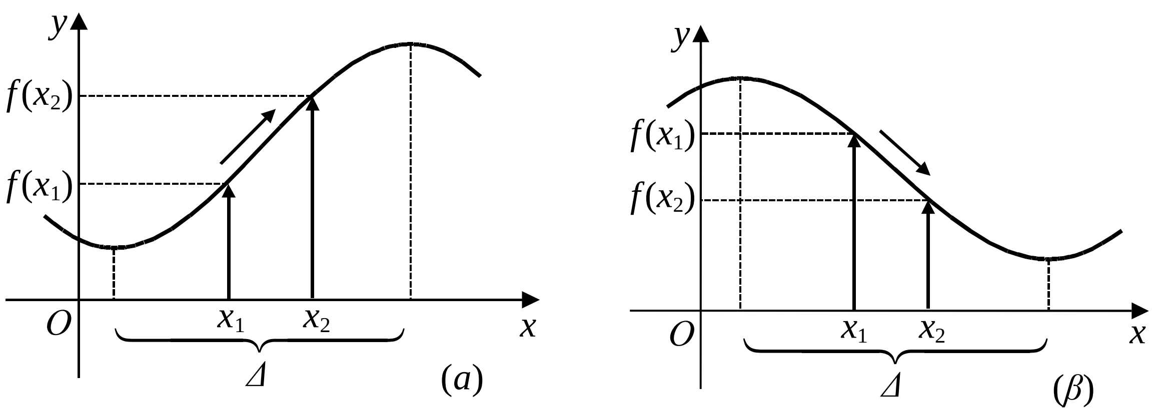
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

Μια συνάρτηση f λέγεται:

α) ***γνησίως αύξουσα*** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της (Σχ.α), όταν
για οποιαδήποτε $\chi_1,\chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1<\chi_2$ **ισχύει** $f(\chi_1)<f(\chi_2)$.

β) ***γνησίως φθίνουσα*** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της (Σχ.β), όταν
για οποιαδήποτε $\chi_1,\chi_2 \in \Delta$ με $\chi_1<\chi_2$ **ισχύει** $f(\chi_1)>f(\chi_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι ***γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα*** λέγεται **γνησίως μονότονη.**



Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ, γράφουμε $f\uparrow\boldsymbol{\Delta}$ (αντιστοίχως $f\downarrow\boldsymbol{\Delta}$).

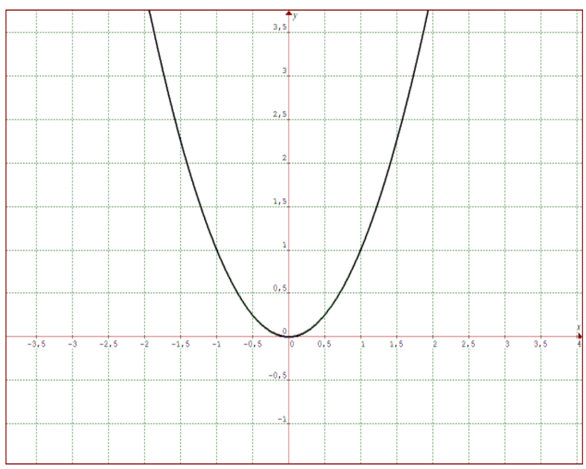
Παράδειγμα

i) Η συνάρτηση $f(x)=x^2$ με π.ο. το A=R.

Στο διάστημα [0,+∞) είναι γνησίως αύξουσα

γιατί για κάθε $\chi_1,\chi_2 \in [0,+\infty)$ με $\chi_1<\chi_2$ ισχύει

$\chi_1^2<\chi_2^2$ άρα $f(\chi_1)<f(\chi_2)$ ενώ



στο διάστημα (-∞, 0] είναι γνησίως φθίνουσα

γιατί για κάθε $\chi_1,\chi_2 \in (-\infty,0]$ με $\chi_1<\chi_2\leq 0$

ισχύει $-\chi_1>-\chi_2 \geq 0$ οπότε

$(-\chi_1)^2>(-\chi_2)^2 \Leftrightarrow \chi_1^2>\chi_2^2$

$\Leftrightarrow f(\chi_1)>f(\chi_2)$.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Μια συνάρτηση f με π.ο. το Α παρουσιάζει:

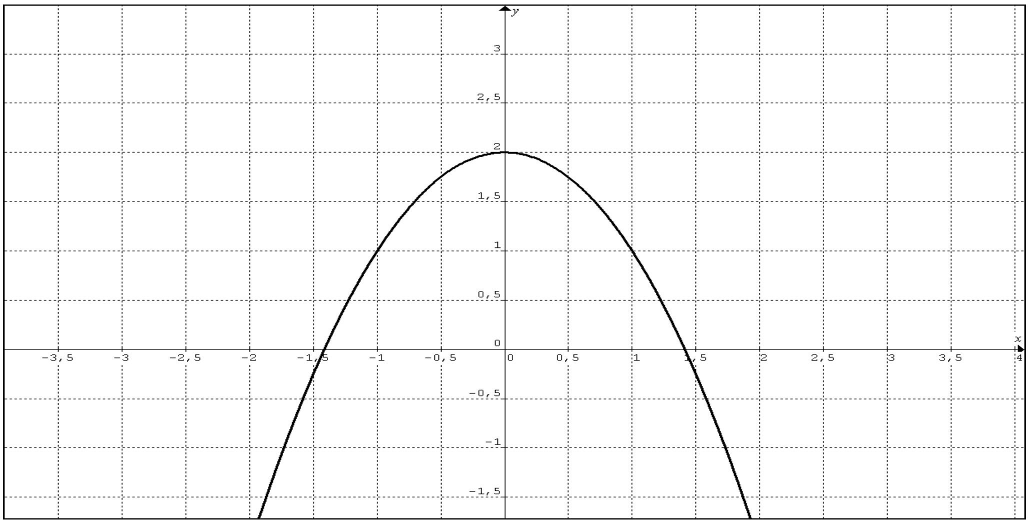
α) ***μέγιστο*** στο $\chi_0 \in A$ όταν $f(\chi) \leq f(\chi_0)$,για κάθε $\chi \in A$. **($f(\chi_0)$: μέγιστο της f)**

β) ***ελάχιστο*** στο $\chi_0 \in A$ όταν $f(\chi) \geq f(\chi_0)$,για κάθε $\chi \in A$. **($f(\chi_0)$: ελάχιστο της f)**

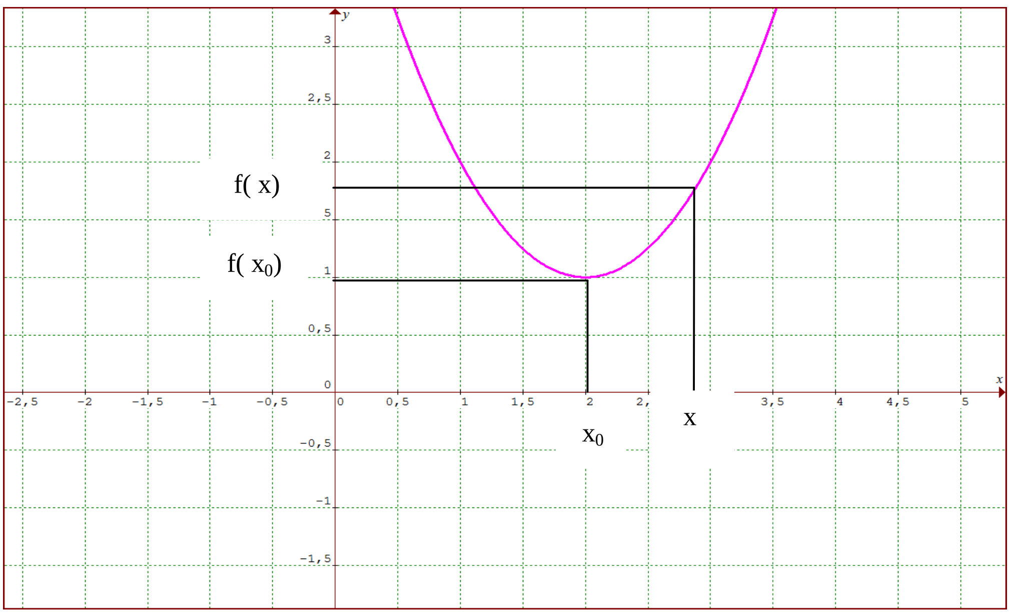
Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης ,αν υπάρχουν λέγονται **ακρότατα της f.**

Παραδείγματα

i) Η συνάρτηση $f(\chi)= -\chi^2+2$ με π.ο. το A=R ***παρουσιάζει μέγιστο στο*** $\chi_0=0$ το f(0)=2 αφού για κάθε $\chi \in A$ ισχύει ότι $-\chi^2+2 \leq 2$ δηλαδή $f(\chi) \leq f(0)$.



ii) Η συνάρτηση $f(\chi)= (x-2)^2+1$ με π.ο. το A=R ***παρουσιάζει ελάχιστο στο*** $\chi_0=2$ το f(2)=1 αφού για κάθε $\chi \in A$ ισχύει ότι $(x-2)^2+1 \geq 1$ δηλαδή $f(\chi) \geq f(0)$.



ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται :

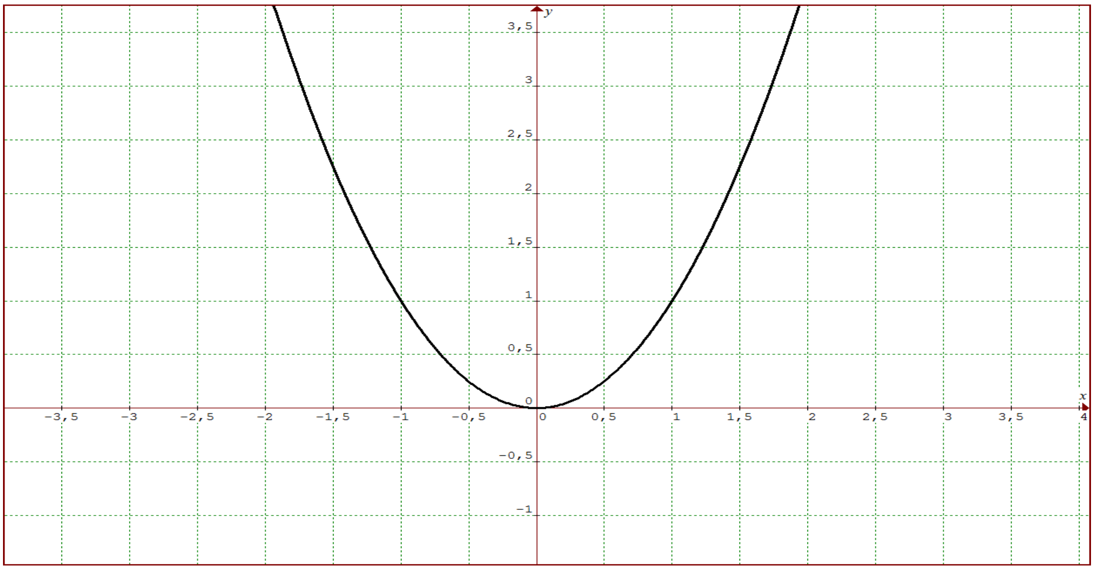
- ***Άρτια*** , αν για κάθε $\chi \in A$ ισχύει: **$-\chi \in A$** και **$f(-\chi)=f(\chi)$**
- ***Περιττή***, ,αν για κάθε $\chi \in A$ ισχύει: **$-\chi \in A$** και **$f(-\chi)=-f(\chi)$.**

Η γραφική παράσταση κάθε **άρτιας** συνάρτησης έχει ***άξονα συμμετρίας τον y΄y***, ενώ κάθε **περιττής** έχει ***κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων Ο.***

Παραδείγματα

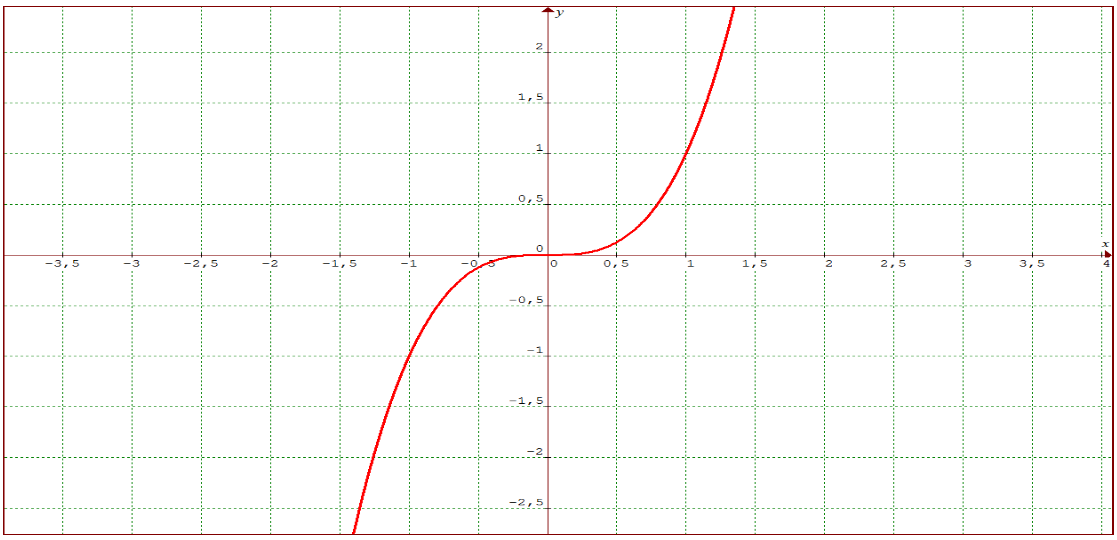
α) Η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^2$ έχει πεδίο ορισμού το A=R

Για κάθε $\chi \in A=R$ ισχύει ότι $-\chi \in A$ και $\mathbf{f(-x)}=(-x)^2=x^2=\mathbf{f(x)}$. Άρα η f είναι **άρτια**.



β) Η συνάρτηση $f(\chi)=\chi^3$ έχει π.ο. το A=R

Για κάθε $\chi \in A=R$ ισχύει ότι $-\chi \in A$ και $\mathbf{f(-x)}=(-x)^3= -x^3= \mathbf{-f(x)}$**.** Άρα η f είναι **περιττή.**



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τους τις συναρτήσεις

α) f(x)= 2x-3 β) f(x)=-3x+2 γ) f(x)= $\sqrt{x-2}$

δ) f(x)=3- $\sqrt{3-x}$ ε) f(x)= $2x^2$+3.

---

2) Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων αν υπάρχουν

α) f(x)= $3(x-1)^2+2$ β) f(x)= -2|x-1|-3 γ) f(x)=3+ $\sqrt{x-2}$ δ) f(x)= x^3

---

3) Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές.

α) f(x)=$5x^4-2x^6$ β) f(x)= $-x^3-x$ γ) f(x)= -3|x|-5

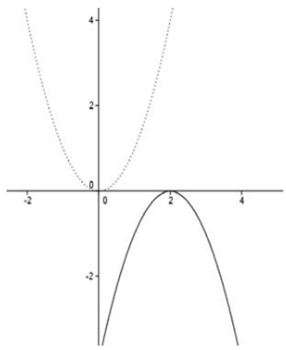
δ) f(x)=2|x-3|+1 ε) f(x)= $\sqrt{x+1}$.

---

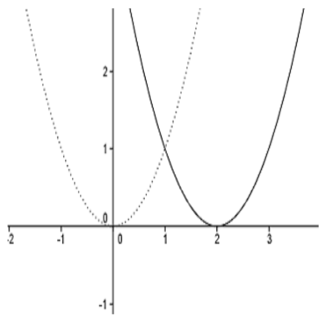
4) Να βρείτε ποια παραβολή είναι η γραφική παράσταση καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις, αιτιολογώντας την επιλογή σας:

α) f(x)= $(2-\chi)^2$ β) g(x)=x^2+2 γ) h(x)= (2-x)(x+2)

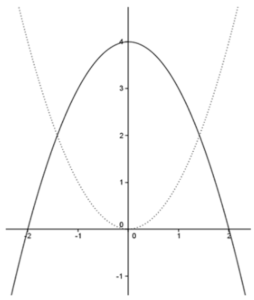
(A)



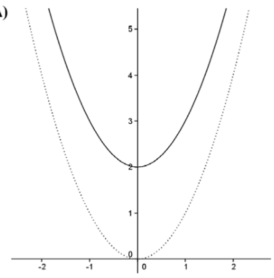
(B)



(Γ)



(Δ)



Να βρείτε τη συνάρτηση στην οποία αντιστοιχεί η παραβολή που δεν είναι γραφική παράσταση μιας από τις συναρτήσεις f, g και h.

Δραστηριότητα

Ένα κινητό που κινείται έτσι ώστε η απόσταση του (σε km) από ένα σημείο Α (που το θεωρούμε αρχή της μέτρησης) σε σχέση με το χρόνο (σε ώρες) φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στα ερωτήματα:

α) Ποια ήταν η διάρκεια της κίνησης;

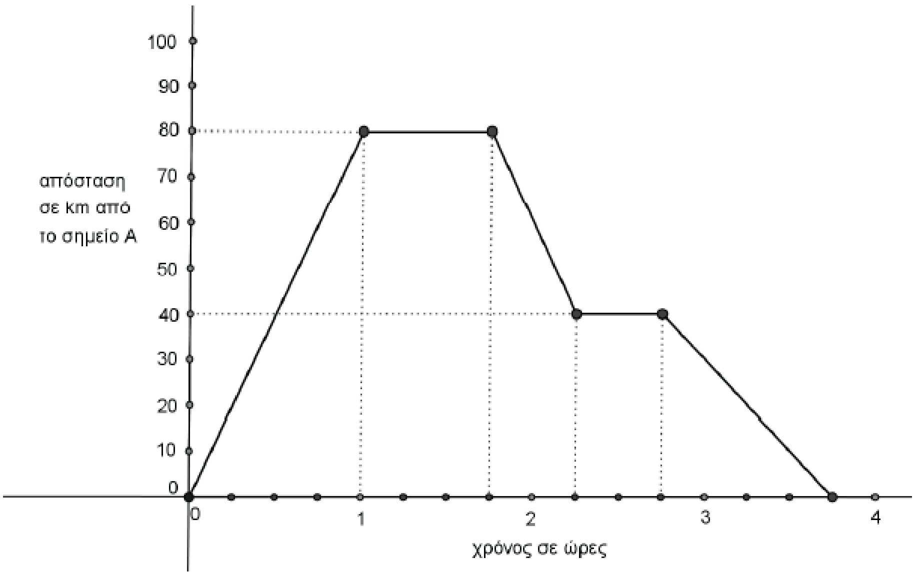
β) Πόσα χιλιόμετρα είναι η συνολική απόσταση;

γ) Πόσες φορές το κινητό έκανε στάση και για πόση ώρα;

δ) Πόσος χρόνος πέρασε μέχρι να κάνει την πρώτη στάση, τι απόσταση διήνυσε και ποια ήταν η ταχύτητά του σ' αυτό το χρονικό διάστημα;

ε) Σε τι απόσταση από το Α θα βρίσκεται: 45 λεπτά, 1 ώρα και 15 λεπτά , 1 ώρα και 33 λεπτά, 3 ώρες και 30 λεπτά και 4 ώρες μετά την αρχή της μέτρησης,

στ) Προσπαθήστε να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που περιγράφεται στο διάγραμμα.



XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX