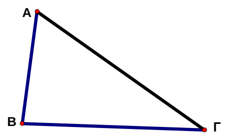
ΤΡΙΓΩΝΑ

Στοιχεία και είδη τριγώνων

Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, μεταξύ τους, προκύπτουν τρία είδη τριγώνων.

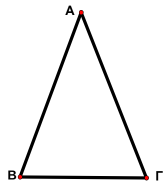
Έτσι, ένα τρίγωνο λέγεται:

- ***σκαληνό,*** όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες (σχ.1),



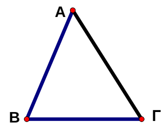
(σχ.1)

- ***ισοσκελές,*** όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.2).



(σχ.2)

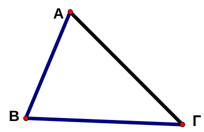
- ***ισόπλευρο,*** όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες (σχ.3).



(σχ.3)

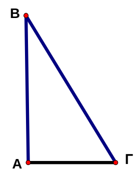
Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται:

- ***οξυγώνιο,*** όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες (σχ.4),



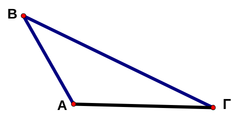
(σχ.4)

- ***ορθογώνιο,*** όταν έχει μια γωνία ορθή (σχ.5).



(σχ.5)

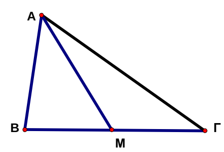
- ***αμβλυγώνιο,*** όταν έχει μια γωνία αμβλεία (σχ.6).



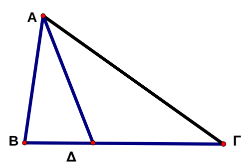
(σχ.6)

• Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

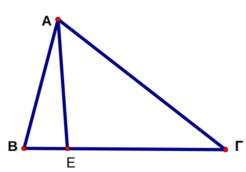
Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.
Κάθε τρίγωνο έχει τρείς διαμέσους μ_α ,μ_β ,μ_γ που αντιστοιχούν στις πλευρές του α ,β ,γ.



Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.
Κάθε τρίγωνο έχει τρείς διχοτόμους δ_α ,δ_β ,δ_γ που αντιστοιχούν στις πλευρές του α ,β ,γ.



Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο έχει τρία ύψη υ_α ,υ_β, υ_γ που αντιστοιχούν στις πλευρές του α ,β ,γ.



ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

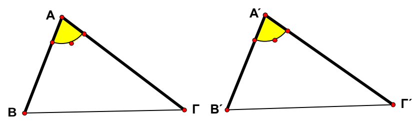
ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο ευθύγραμμα σχήματα, επομένως και ***δύο τρίγωνα, είναι ίσα αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται***. Συνεπώς:

- Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.
- Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

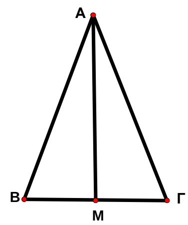
Θεώρημα (1ο Κριτήριο – Π.Γ.Π)



Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Δηλαδή: αν ΑΒ=Α΄Β΄, ΑΓ=Α΄Γ΄ και Α=Α΄ τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}=\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.

Πορίσματα



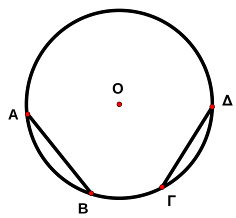
I) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
(Δηλαδή αν ΑΒ=ΑΓ τότε:
Β=Γ και η διχοτόμος ΑΜ είναι ταυτόχρονα διάμεσος και ύψος).

II) Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

III) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

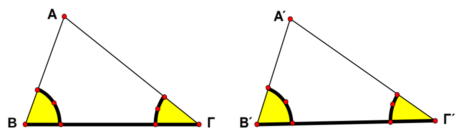
IV) Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Rightarrow AB=A\Gamma.$$



Θεώρημα (2ο Κριτήριο – Γ.Π.Γ)

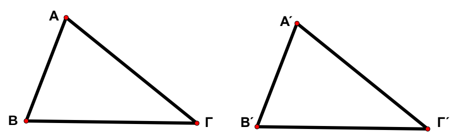
Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



Δηλαδή: αν ΒΓ=Β΄Γ΄, Β=Β΄ και Γ=Γ΄ τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}=\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.

Θεώρημα (3ο Κριτήριο – Π.Π.Π).

Αν δύο τρίγωνα έχουν και τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία , τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



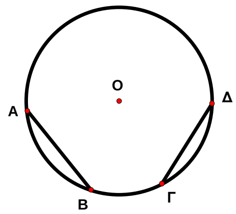
Δηλαδή: αν ΑΒ=Α΄Β΄, ΒΓ=Β΄Γ΄ και ΑΓ=Α΄Γ΄ τότε $\overset{\Delta}{AB\Gamma}=\overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$.

Πορίσματα

I) Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

II) Κάθε σημείο πού ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του. (Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο **γεωμετρικός τόπος** των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος).

III) Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.



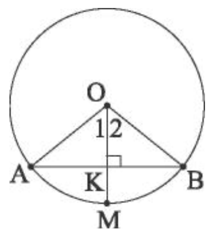
Δηλαδή: ΑΒ=ΓΔ $\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$,

και λόγω των προηγουμένων ισχύει η ισοδυναμία:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow AB=\Gamma\Delta.$$

IV) Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

V) Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ λέγεται ***απόστημα της χορδής ΑΒ*** και εκφράζει την απόσταση του κέντρου του κύκλου από την χορδή.
Δηλαδή, ***ο φορέας του αποστήματος*** μιας χορδής:



- διέρχεται από το κέντρο του κύκλου,
- είναι μεσοκάθετος της χορδής,
- διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο της χορδής.

Συμπεράσματα:

Όλες οι ***περιπτώσεις ισότητας τριγώνων*** διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- **δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες *(Π.Γ.Π),***
- **μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία *(Γ.Π.Γ),***
- **και τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία *(Π.Π.Π).***

ΙΣΟΤΗΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

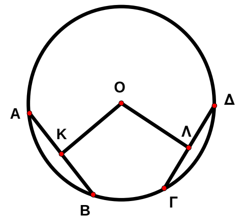
Οι ***περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων*** διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- **Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.**
- **Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία**

Θεώρημα

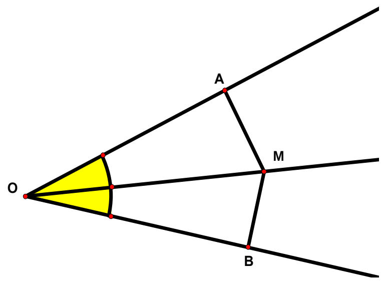
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες *αν και μόνο αν* τα αποστήματα τους είναι ίσα.



- Δηλαδή: ΑΒ=ΓΔ $\Leftrightarrow$ ΟΚ=ΟΛ

Θεώρημα

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της *και αντίστροφα* **κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.**



Δηλαδή:

ΜΑ=ΜΒ $\Leftrightarrow$ το Μ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας.

Άρα η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο ***γεωμετρικός τόπος*** των σημείων της που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

……………………………………………………………………………………

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος

Να γράψετε Σ στο τέλος της πρότασης αν αυτή είναι **Σωστή** και Λ αν είναι **Λάθος:**

a) Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν ίσες τις γωνίες τους. ………

b) Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν δυο πλευρές του ενός είναι ίσες με δυο πλευρές του άλλου μία προς μία και μία γωνία του ενός ίση με μία γωνία του άλλου………

c) Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν δυο γωνίες του ενός είναι ίσες με δυο γωνίες του άλλου μία προς μία και μία πλευρά του ενός ίση με μία πλευρά του άλλου……….

d) Η διάμεσος προς την βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ίσα τρίγωνα………

e) Κάθε σημείο της διχοτόμου ενός τριγώνου ισαπέχει από δύο πλευρές του τριγώνου………

Σύγκριση τριγώνων - Μεθοδολογία

Σύγκριση τριγώνων κάνουμε κάθε φορά που επιδιώκουμε να αποδείξουμε ότι δύο ευθύγραμμα τμήματα ή δύο γωνίες είναι ίσες. Έτσι ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1^o. *Φτιάχνουμε ένα ικανοποιητικό (όσο πιο ακριβές είναι δυνατόν)* ***σχήμα.***

2^o. Εντοπίζουμε δύο τρίγωνα*, τα οποία με μια πρώτη παρατήρηση να δείχνουν ίσα και να έχουν απαραίτητα ως στοιχεία τα ζητούμενα τμήματα ή τις ζητούμενες γωνίες.*

3^o. *Τα παραπάνω τρίγωνα πρέπει οπωσδήποτε ανάμεσα στα* ***ίσα στοιχεία*** *τους να έχουν και μια πλευρά. Μόνο με ισότητα γωνιών δεν προκύπτει ποτέ ισότητα τριγώνων.*

4^o. *Ενδεχομένως τα ίσα στοιχεία των δύο τριγώνων που συγκεντρώθηκαν για τη σύγκριση, να μην* ***αρκούν****. Σ' αυτές τις περιπτώσεις πιθανόν να απαιτείται πρώτα η σύγκριση δύο άλλων τριγώνων, τα οποία να είναι τελικά ίσα και να μας εφοδιάσουν με νέα δεδομένα.*

5^o. *Ο νόμος (αρχή), τον οποίο εφαρμόζουμε μετά την ισότητα των τριγώνων είναι:*
«Απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές».
Τονίζουμε ότι εφαρμόζουμε την παραπάνω αρχή μόνο σε ίσα τρίγωνα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) οι διάμεσοι ΒΜ και ΓΝ είναι ίσες,

β) οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ είναι ίσες.

γ) τα ύψη ΒΚ και ΓΛ είναι ίσα.

---

2. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\hat{B} = \hat{E}$, ΑΒ=ΔΕ και τις διχοτόμους ΒΜ, ΕΝ ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

---

3. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ και τις διαμέσους ΒΜ και ΕΝ ίσες. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

---

4. Στο εξωτερικό ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΓΔ.

---

5. Σε ένα τρίγωνα ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ και πάνω σε αυτήν παίρνουμε τμήμα ΜΔ=ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

α)τα τρίγωνα ΑΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα

β)ΑΒ=ΔΓ

γ) $B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A}$.

---

6. Δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν κοινή την κορυφή Α και ίσες τις γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $\Delta\hat{A}E$. Να αποδειχθεί ότι ΒΔ=ΓΕ.

---

7. Να αποδείξετε ότι τα μέσα Μ και Ν των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, ισαπέχουν από τις ίσες πλευρές καθώς και από τη βάση ΒΓ του τριγώνου.

---

8. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Να αποδείξετε ότι οι κορυφές Β και Γ ισαπέχουν από την ευθεία ΑΜ.

---

9. Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α) τα ύψη που αντιστοιχούν σε δύο ίσες πλευρές τους είναι ίσα.

β) οι διάμεσοι που αντιστοιχούν σε δύο ίσες πλευρές τους είναι ίσες.

γ) οι διχοτόμοι που αντιστοιχούν σε δύο ίσες πλευρές τους είναι ίσες.

---

10. Δίνονται δύο ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου κέντρου Ο, των οποίων οι προεκτάσεις προς τα σημεία Β και Δ τέμνονται στο σημείο Σ. Να αποδειχθεί ότι:

α) ΣΒ=ΣΔ β) $ΣΟ \perp ΑΓ$

---

11. Ένα σημείο Α, εσωτερικό ενός κύκλου (O,R), ισαπέχει από δύο σημεία Β και Γ του κύκλου. Να αποδειχθεί ότι $ΑΟ \perp ΒΓ$.

---

12. Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τις γωνίας $\hat{A}$ και $\hat{Γ}$. Να αποδείξετε ότι $ΑΓ \perp ΒΔ$ (μεσοκάθετη).

---

13. Στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε αντιστοίχως, τέτοια ώστε $ΑΔ = ΑΕ$. Να δειχθεί ότι τα Δ, Ε ισαπέχουν από την ΒΓ και από τα άκρα της.

---

14. Να κάνετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ώστε ΑΒ<ΑΓ. Να προεκτείνετε την ΑΒ προς το Β και να πάρετε στην προέκτασή της σημείο Δ ώστε ΑΔ = ΑΓ. Έστω Ε σημείο της ΑΓ ώστε ΑΕ = ΑΒ. Να ενώσετε τα σημεία Δ και Ε και να δείξετε ότι ΔΕ = ΒΓ.

---

15. Να κάνετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Να προεκτείνετε την ΒΓ προς τα Β και Γ και να πάρετε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

---

16. Να κάνετε μία γωνία χΟψ. Στην πλευρά της Οχ να πάρετε δύο σημεία Α και Γ, (ΟΑ<ΟΓ). Στην πλευρά της Οψ να πάρετε δύο σημεία Β και Δ ώστε ΟΒ = ΟΑ και ΟΔ = ΟΓ. Αν Κ το σημείο που τέμνονται τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τότε:

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα.

β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΑΓ και ΚΒΔ είναι ίσα.

γ) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΚΔ και ΟΚΓ είναι ίσα.

δ) Να δείξετε ότι η ΟΚ είναι διχοτόμος της χΟψ.

---

17. Αν Μ, Ν είναι δύο σημεία του φορέα της διχοτόμου ΑΔ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ να δείξετε ότι $\mathrm{M}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{N} = \mathrm{M}\hat{\Gamma}\mathrm{N}$.

---

18. Από το μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ προς τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα.

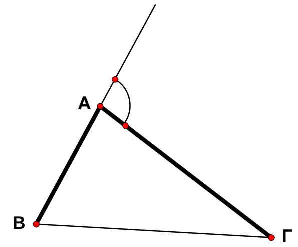
β) Να δείξετε ότι ΜΔ = ΕΑ και ΜΕ = ΔΑ.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΛΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Δηλαδή: $\hat{A}_{εξ} > \hat{B}$ και $\hat{A}_{εξ} > \hat{\Gamma}$.



Πορίσματα

(i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

(ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180°.

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

$$\boldsymbol{\beta > \gamma \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{\Gamma}}$$

Πορίσματα

i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

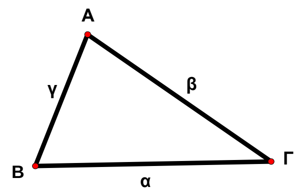
(ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

(iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

Τριγωνική ανισότητα - Θεώρημα

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

$$|\beta - \gamma| < \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta + \gamma}$$



Πόρισμα

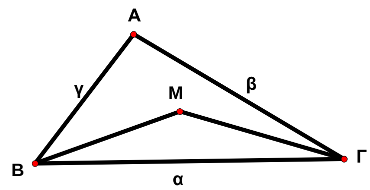
Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

(i) $\boldsymbol{B\hat{M}\Gamma > \hat{A}}$

(ii) **ΜΒ + ΜΓ<ΑΒ+ΑΓ.**

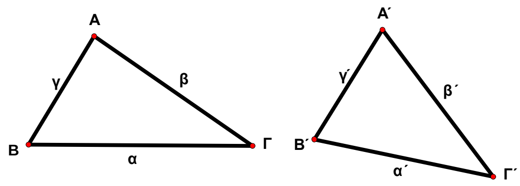


ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύουν ***δύο από τις επόμενες προτάσεις:***
(i) το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος,
(ii) το τμήμα ΑΔ είναι διχοτόμος,
(iii) το τμήμα ΑΔ είναι ύψος,
τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα



Δηλαδή: αν **β=β΄, γ=γ΄** και $\hat{A} > \hat{A}'$ τότε **α>α΄**

και αν **β=β΄, γ=γ΄** και **α>α΄** τότε $\hat{A} > \hat{A}'$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με Α=90 και Β>Γ και ΑΔ το ύψος του. Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ και ΑΒ.

---

2. Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ=ΑΓ, και Κ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΓ. Να αποδείξετε ότι: α) $A\hat{K}B > B$ και β) ΚΓ<ΚΒ.

---

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με Β>Γ και έστω Μ , Ν τα μέσα των ΑΒ , ΑΓ αντίστοιχα. Αν οι μεσοκάθετες ΑΒ , ΑΓ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο Κ , να αποδείξετε ότι:

α) ΑΜ<ΑΝ και β) ΜΚ>ΝΚ.

---

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ=ΑΓ. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $Β_{εξ}$ και $Γ_{εξ}$ τέμνονται στο Δ, να αποδείξετε ότι:

   α) το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές

   β) η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετη του τμήματος ΒΓ.

   γ) αν Μ το μέσο του ΒΓ, τότε ΒΜ<ΜΔ.

---

5. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε ΒΔ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ<ΒΓ.

---

6. Να αποδείξετε ότι η ημιπερίμετρος ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε πλευρά του.

---

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Από το Δ φέρουμε κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ, που τις τέμνουν στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΕΖ<ΒΓ.

---

8. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, η μεσοκάθετός του (ε) και σημείο Μ του ημιεπιπέδου (ε,Β), που δεν ανήκει στο φορέα του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι ΜΑ>ΜΒ.

---

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ<ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και σημείο Ε της πλευράς του ΑΓ ώστε ΑΕ=ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

   α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.

   β) ΔΒ<ΔΓ .

---

10. Σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

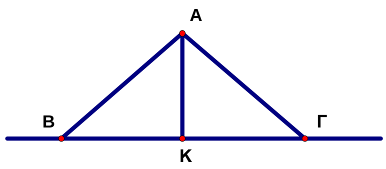
    i) $\upsilon_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$ ii) $\upsilon_\alpha > \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$ iii) $\tau < \upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < 2\tau$.

Κάθετα – πλάγια τμήματα

Θεώρημα

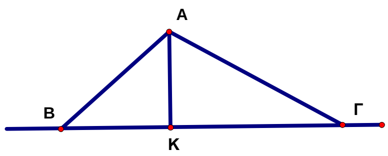
Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, και αντίστροφα.

Δηλαδή: **ΑΒ=ΑΓ** $\Leftrightarrow$ **ΚΒ=ΚΓ**.



Θεώρημα

Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:



- Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.

  ΑΚ < ΑΒ

- Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιότροπα άνισες και αντίστροφα.

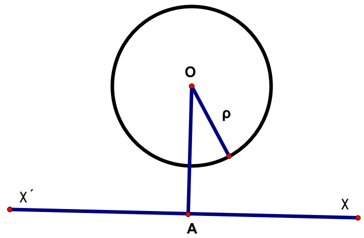
  Δηλαδή: **ΑΒ < ΑΓ** $\Leftrightarrow$ **ΚΒ < ΚΓ.**

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο,R) μια ευθεία x'x και την απόσταση **δ = ΟΑ** του κέντρου Ο από την x'x. Οι σχετικές θέσεις της ευθείας και του κύκλου εξαρτώνται από τη σχέση της απόστασης δ και της ακτίνας του κύκλου. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

δ > R

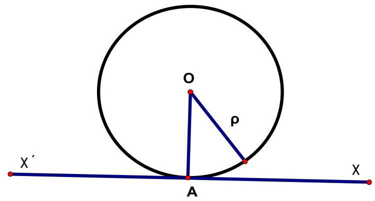
Τότε, η x'x δεν έχει ***κανένα κοινό σημείο*** με τον κύκλο και λέγεται ***εξωτερική*** ευθεία του κύκλου.



δ = R

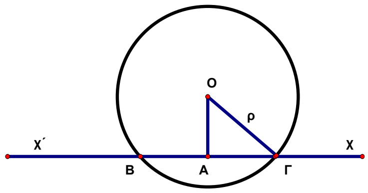
Τότε, η x'x έχει ***ένα μόνο κοινό σημείο*** με τον κύκλο και λέγεται ***εφαπτομένη*** του κύκλου στο σημείο Α.

Το σημείο Α λέγεται ***σημείο επαφής*** της ευθείας με τον κύκλο. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία x'x εφάπτεται του κύκλου (Ο,R) στο σημείο Α και είναι κάθετη στην ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής.



δ < R

Τότε, η x'x έχει ***δύο κοινά σημεία*** με τον κύκλο και λέγεται ***τέμνουσα*** ευθεία του κύκλου.



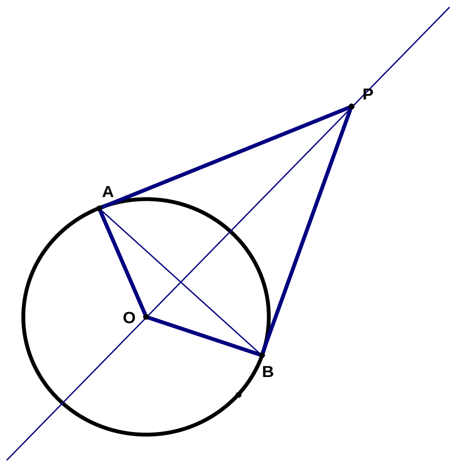
ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

Έστω ένας κύκλος (Ο, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο Ρ.

- Τα ***εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ*** του κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.
- Η ***διακεντρική ευθεία ΡΟ*** :

(i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,

(ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτινών που καταλήγουν στα σημεία επαφής.



Δηλαδή: **ΡΑ = ΡΒ** και

η ***ΡΟ είναι μεσοκάθετη*** στην ΑΒ και

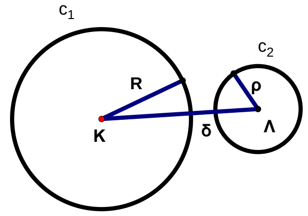
διχοτομεί τις γωνίες $A\hat{P}B$ και $A\hat{O}B$.

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται ***διάκεντρος*** των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ. Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτινών τους.

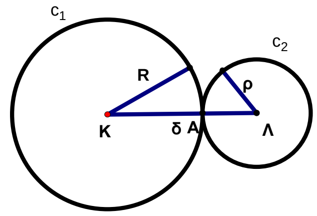
δ > R + ρ

Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου**.**
Οι κύκλοι **δεν** έχουν κοινά σημεία.



δ = R + ρ

Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά,** δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου.



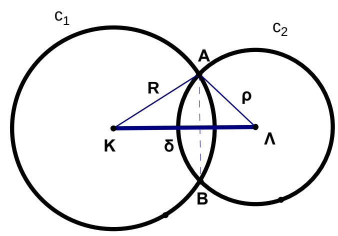
R-ρ<δ< R + ρ

Οι κύκλοι **τέμνονται,** δηλαδή έχουν **δύο** κοινά σημεία.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται ***κοινή χορδή*** των δύο κύκλων.

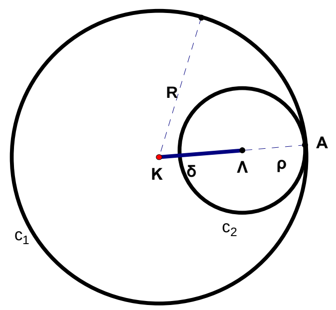
Ισχύει ότι: **Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.**

Στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι είναι ίσοι, δηλαδή έχουν R =ρ, τότε και η κοινή χορδή είναι ΑΒ είναι μεσοκάθετος της διακέντρου ΚΛ.



δ = R - **ρ**

Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά,** δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R).



δ < R – **ρ**

Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (Κ, R).
Οι κύκλοι **δεν** έχουν κοινά σημεία.