

## ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

### Ορισμός

Δύο ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται *παράλληλες ευθείες*.

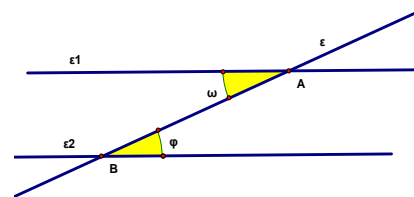
Οι *σχετικές θέσεις δυο ευθειών  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$* , οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι οι παρακάτω:

- i) ταυτίζονται                      ii) τέμνονται                      iii) παράλληλες.

### Θεώρημα

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.

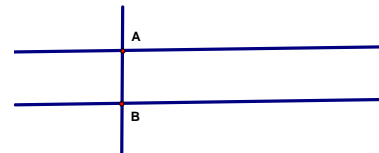
Δηλαδή αν  $\hat{\omega} = \hat{\phi}$  τότε  $\epsilon_1 // \epsilon_2$ .



### Πορίσματα

1) Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

2) Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.



### Αίτημα παραλληλίας (Ευκλείδειο αίτημα).

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

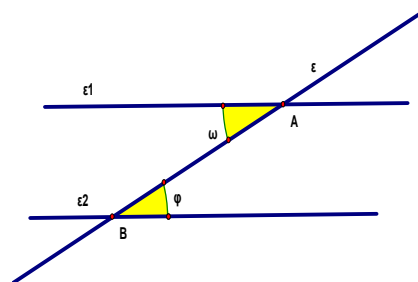
### Ιδιότητες παράλληλων ευθειών

1) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Δηλαδή αν  $\epsilon_1 // \epsilon_2$  τότε  $\hat{\omega} = \hat{\phi}$ .

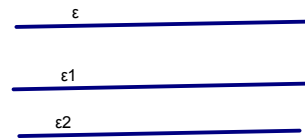
2) Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν

- i) τις *εντός εκτός και επί τα αυτά* μέρη γωνίες *ίσες*,
- ii) τις *εντός και επί τα αυτά* μέρη γωνίες *παραπληρωματικές*.

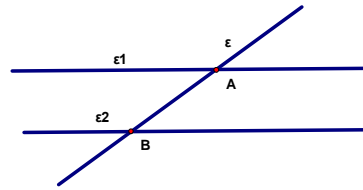


3) Αν δύο διαφορετικές ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία  $\epsilon$ , τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες,

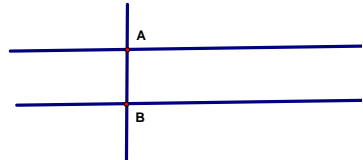
Δηλαδή αν  $\epsilon_1 // \epsilon$  και  $\epsilon_2 // \epsilon$ , τότε  $\epsilon_1 // \epsilon_2$ .



4) Αν δύο ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία  $\epsilon$  τέμνει τη μία από αυτές, τότε η  $\epsilon$  θα τέμνει και την άλλη.



5) Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

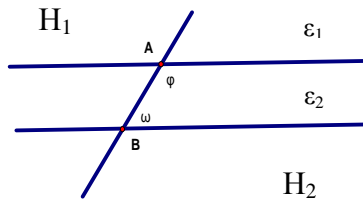


6) Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Αν  $\hat{\omega} + \hat{\phi} < 180^\circ$  τότε οι  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  τέμνονται στο  $H_2$ ,

Αν  $\hat{\omega} + \hat{\phi} > 180^\circ$  τότε οι  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  τέμνονται στο  $H_1$ ,

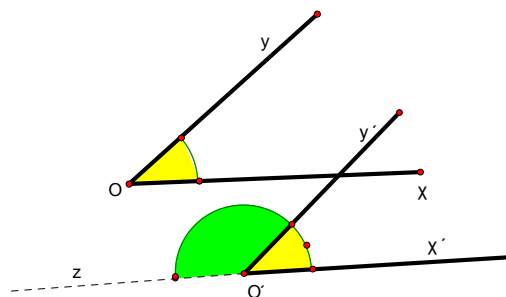
Αν  $\hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ$  τότε οι  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  είναι παράλληλες.



**Γωνίες με πλευρές παράλληλες – κάθετες.**

Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι:

- **ίσες** αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι:
- **παραπληρωματικές** αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

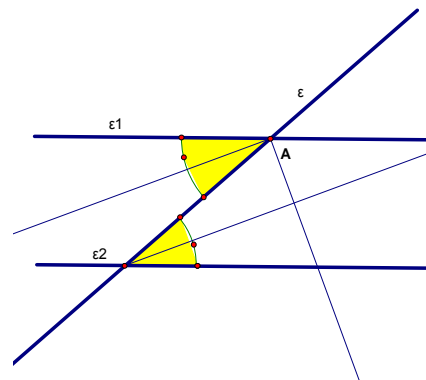


Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που οι γωνίες έχουν τις πλευρές τους **κάθετες**.

**Εφαρμογή**

Έστω  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  δύο παράλληλες που τέμνονται από ευθεία  $\epsilon$ , τότε:

- (i) Οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.
- (ii) Οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.

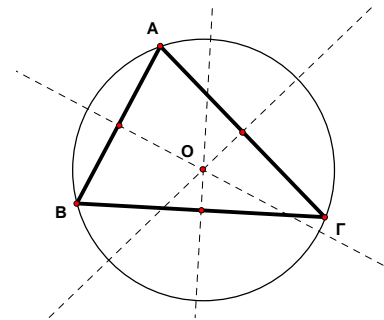


### Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

#### Θεώρημα

Οι τρεις **μεσοκάθετοι** των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

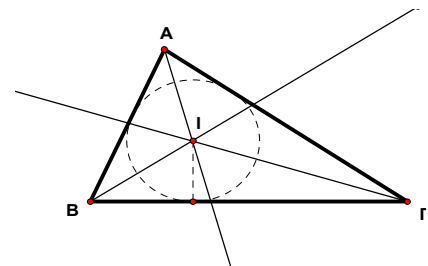
Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου και το κέντρο του **περίκεντρο**.



#### Θεώρημα

Οι **διχοτόμοι** των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

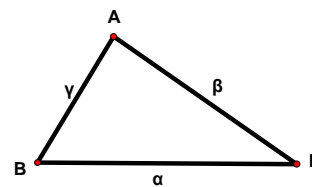
Ο κύκλος αυτός λέγεται **εγγεγραμμένος κύκλος** του τριγώνου και το κέντρο του **έγκεντρο**.



### Άθροισμα γωνιών τριγώνου (Θεώρημα)

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

$$\text{Δηλαδή, } \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ.$$



### Πορίσματα

- i) Κάθε **εξωτερική γωνία** τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
- ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν **δύο γωνίες ίσες**, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
- iii) Οι οξείες γωνίες ενός **ορθογώνιου τριγώνου** είναι συμπληρωματικές.
- iv) Κάθε **γωνία ισόπλευρου** τριγώνου είναι  $60^\circ$ .

### Άθροισμα γωνιών πολυγώνου

Το **άθροισμα των γωνιών κυρτού ν- γώνου** είναι  $2n-4$  ορθές.

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = (2n - 4)\text{ορθές} = (180n - 360)\text{μοίρες}.$$

Το **άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν - γώνου** είναι 4 ορθές.

$$A_{1εξ} + A_{2εξ} + A_{3εξ} + \dots + A_{νεξ} = 4\text{ ορθές} = 360\text{ μοίρες}.$$

