ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1) Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής **αχ+βψ=γ,** όπου $\alpha,\beta,\gamma\in R$.

α) Λύση της γραμμικής αυτής εξίσωσης λέγεται κάθε ζεύγος (χ,ψ)=(χ_0,ψ_0) που την επαληθεύει.

π.χ. η εξίσωση 2χ-3ψ=7 έχει λύση την (χ,ψ)=(2,-1) αφού $2\cdot2-3\cdot(-1)=7\Leftrightarrow7=7$ δηλ. επαληθεύεται.

β) Η εξίσωση **αχ+βψ=γ** με $\alpha\neq0$ ή $\beta\neq0$ παριστάνει **ευθεία**

— Αν **α=0** τότε παίρνει την μορφή ψ=κ και είναι παρ/λη στον άξονα χ΄χ.

— Αν **β=0** τότε παίρνει την μορφή χ=κ και είναι παρ/λη στον άξονα ψ΄ψ.

γ) Κάθε γραμμική εξίσωση **αχ+βψ=γ με $\alpha\neq0$ ή $\beta\neq0$** έχει άπειρες λύσεις που αν τις παραστήσουμε γραφικά στο επίπεδο είναι σημεία της ευθείας αχ+βψ=γ και **αντίστροφα** κάθε σημείο της ευθείας ορίζει ζεύγος που είναι λύση της εξίσωσης.

2) Δύο γραμμικές εξισώσεις αποτελούν ένα **σύστημα .**

$$\begin{cases}\alpha_1\chi+\beta_1\psi=\gamma_1\\ \alpha_2\chi+\beta_2\psi=\gamma_2\end{cases}$$

α) Λύση τους συστήματος είναι κάθε ζεύγος (χ_0,ψ_0) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

β) Ισοδύναμα λέγονται δύο συστήματα που έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις.

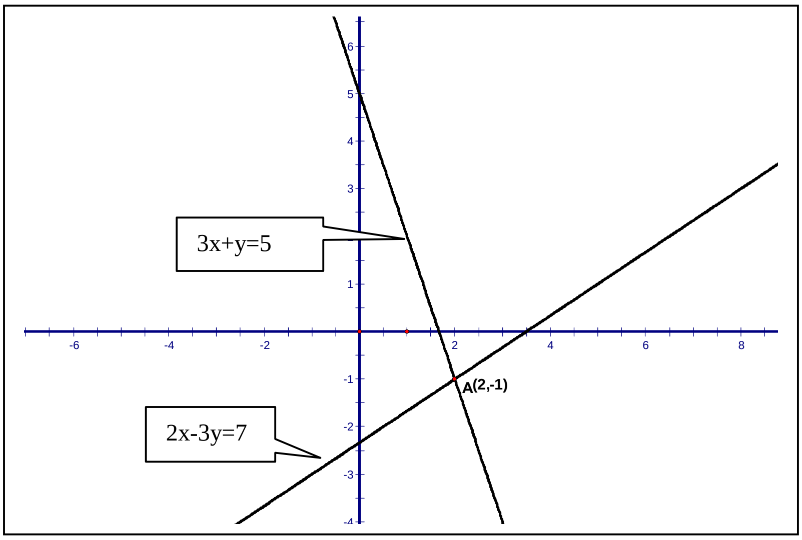
Γραφική επίλυση συστήματος

Παριστάνουμε γραφικά σε σύστημα αξόνων τις ευθείες ε_1και ε_2 που ορίζουν οι δύο εξισώσεις του συστήματος και στη συνέχεια

—**αν οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνονται** σε ένα σημείο βρίσκουμε τις συντ/νες αυτού του σημείου που θα είναι και η **μοναδική λύση** του (Σ).

—**αν οι ευθείες είναι παρ/λες** τότε το σύστημα δεν έχει λύση (**αδύνατο**)

—**αν οι ευθείες ταυτίζονται** τότε το (Σ) έχει **άπειρες λύσεις** που είναι και οι λύσεις της μιας εξίσωσής του. Σ' αυτή την περίπτωση οι δύο εξισώσεις του (Σ) είναι ισοδύναμες.



π.χ $\begin{cases}2x-3y=7\\3x+y=5\end{cases}$

Παριστάνουμε στο σύστημα αξόνων τις εξισώσεις του βρίσκοντας τις αντίστοιχες ευθείες .

Παρατηρώ ότι οι ευθείες τέμνονται στο σημείο Α(2,-1) οπότε το ζεύγος (x,y)=(2,-1) είναι η μοναδική λύση του (Σ).

ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

(Σ) $\begin{cases} \alpha_1\chi+\beta_1\psi=\gamma_1 \\ \alpha_2\chi+\beta_2\psi=\gamma_2 \end{cases}$

Βρίσκω τις ορίζουσες: $D=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ (Ορίζουσα συντελεστών) και

$D_x=\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ $D_\psi=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$.

Περιπτώσεις:

— Αν **D≠0** τότε το σύστημα έχει ***μια μοναδική λύση*** την **(χ,ψ)=** $\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_\psi}{D}\right)$

— Αν **D=0** και

- **D_χ≠0 ή D_ψ≠0** τότε το σύστημα είναι ***αδύνατο.***
- **$D_\chi=D_\psi=0$** και
  - **$\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0$**
    - **$\gamma_1\neq0$ ή $\gamma_2\neq0$** το(Σ) είναι ***αδύνατο.***
    - **$\gamma_1=\gamma_2=0$** το (Σ) είναι ***αόριστο.***
  - **κάποιο από τα $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ είναι ≠ 0** τότε το (Σ) έχει ***άπειρες λύσεις.***
    Οι εξισώσεις του (Σ) τότε είναι (συνήθως) ισοδύνα-μες και οι λύσεις του (Σ) είναι οι λύσεις της μιας εξίσωσής του.

Παράδειγμα

Για το σύστημα $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ 3x+y=5 \end{cases}$ έχουμε:

D= $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ = 2+9=11, D_x= $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ = 7+15= 22, D_y= $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ = 10-21= -11

Επειδή D=11≠0 το σύστημα έχει μια μοναδική λύση την (x,y) όπου:

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{22}{11}=2 \quad \text{και} \quad y=\frac{Dy}{D}=\frac{-11}{11}=-1$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Δίνεται η εξίσωση $2y + x = 7$.

α) Να δείξετε ότι το ζεύγος $(-1, 4)$ είναι λύση αυτής της εξίσωσης.

β) Αν $x = 5$ να βρείτε $y = ...$ ώστε το ζεύγος $(5, y)$ να είναι λύση της εξίσωσης.

γ) Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις της εξίσωσης $2y + x = 7$.

---

2. Οι x, y, λ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει: $x = 2 - 3\lambda$ και $y = 5 + 2\lambda$.

α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y.

β) Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, πού βρίσκονται τα ζεύγη (x, y) που επαληθεύουν την παραπάνω σχέση;

γ) Να γίνει γραφική παράσταση των ζευγών αυτών σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

---

3. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με όποια μέθοδο θέλετε:

i) $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ -2x + 3y = 28 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 7x - 4y = 102 \\ 5x + 4y = 42 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 4\sqrt{3}\,x - 5y\sqrt{2} = 8 \\ x\sqrt{3} - y\sqrt{2} = 1 \end{cases}$

---

4. Να λύσετε τα συστήματα :

i) $\begin{cases} x = 3y - 2 \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 0{,}5x + 0{,}2y = 16 \\ 1{,}5x + 0{,}5y = 4{,}5 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 3(x - 4) + 2(y + 2) = -9 \\ (x - 5) - 4(y - 3) = 30 \end{cases}$

---

5. Να λύσετε τα συστήματα :

i) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -3x + 6y = 3 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -3x + 6y = 13 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{2 - y}{5} \\ 2x = -\dfrac{y - 4}{2} \end{cases}$ v) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -3x + 7y = 0 \end{cases}$ vi) $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -3x + 6y = 0 \end{cases}$

---

6. Να βρεθούν οι σχετικές θέσεις των παρακάτω ευθειών:

ε_1: $2x + 3y = 7$ ε_2: $-x + y = 4$ ε_3: $-2x + 2y = 5$

---

7. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα για τις διάφορες τιμές του λ :

i) $\begin{cases} 3x + \lambda y = 3 \\ \lambda x + 3y = \lambda \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x + \lambda y = 0 \\ 6x + 9y = 3 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} \lambda x - 2y = 5 \\ \lambda x + 2\lambda y = \lambda \end{cases}$ iv) $\begin{cases} \lambda x + y\sqrt{2} = \lambda^2 \\ x\sqrt{2} + 2\lambda y = \sqrt{2} \end{cases}$

---

8. Να λυθούν τα συστήματα :

i) $\begin{cases} \lambda x - (\lambda - 1)y = \lambda \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda^2 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ \lambda x - 3\lambda y = 2\lambda - 3 \end{cases}$

---

9. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $\lambda x+y=3$ και ε_2 : $2x+(\lambda+1)y=6$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$ οι ευθείες ε_1 και ε_2 :

i) τέμνονται και να προσδιορίσετε το σημείο τομής τους
ii) είναι παράλληλες
iii) είναι κάθετες.

---

10 . Δίνεται το σύστημα : $\left\{\begin{matrix} (\lambda-2)x+5y=5 \\ x+(\lambda+2)y=5 \end{matrix}\right\}$

Να εξετάσετε για ποιες τιμές του $\lambda\in R$:

i) το σύστημα έχει μία μοναδική λύση , την οποία και να βρείτε
ii) το σύστημα είναι αδύνατο.

---

11. Δίνονται οι ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις $x - y = -1$ και $\lambda x - y = -1$ αντίστοιχα, $\lambda \in R$. Να βρείτε τις σχετικές τους θέσεις για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

---

12. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x , y ισχύει :

$D^2 + D_x^2 + D_y^2 - 4D - 2D_x + 5 = 0$.

α) Δείξτε ότι: $(D - 2)^2 + (D_x - 1)^2 + D_y^2 = 0$. β) Να βρεθούν τα x , y .

---

13. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x , y ισχύει :

$D_x^2 + D_y^2 = 2D_xD_y$, $D\neq 0$. Αν $x + y = 6$, να βρεθούν τα x , y .

---

14. Να προσδιοριστούν οι συντελεστές α και β στην εξίσωση $\alpha x + \beta y - 9 = 0$ εάν δοθεί ότι τα ζεύγη (1,1) και (- 1, 5) είναι λύσεις της εξίσωσης αυτής.

---

15. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία (0, 0), $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

---

16. Για ποιες τιμές των μ και ν η εξίσωση $x^2-(3\mu-4)x-2\nu=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 5;

---

17. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2Χ2 ισχύει ότι: $D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D - 6D_x + 4D_y - 14$.

Να λύσετε το σύστημα αυτό.

---

18. Δίνεται ένα γραμμικό σύστημα (Σ) δύο γραμμικών εξισώσεων 2Χ2 με αγνώστους

x, y ώστε: $|D-2|+|D_x+10|+|2D_y-8|=0$. Να λυθεί το σύστημα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Το σημείο (2, 2) ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x = 2$ Σ Λ

---

2. Το σύστημα $\begin{cases} \alpha x + \beta y = 0 \\ \kappa x + \lambda y = 0 \end{cases}$ έχει για λύση το (0, 0). Σ Λ

---

3. Το σύστημα $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases}$ είναι αόριστο. Σ Λ

---

4. Το σύστημα $\begin{cases} 3x - \beta y = \alpha \\ \beta x + 3y = \gamma \end{cases}$ έχει πάντα λύση. Σ Λ

---

5. Η εξίσωση $\kappa x + (\kappa + 1)\, y = \gamma$ παριστάνει πάντα ευθεία. Σ Λ

---

6. Κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ ισαπέχει από τους άξονες Σ Λ

---

7. Αν το σύστημα δύο εξισώσεων που παριστάνουν ευθείες είναι αδύνατο, οι ευθείες είναι παράλληλες. Σ Λ

---

8. Οι ευθείες $2x + 3y = 5$ και $4x + 6y = 10$ ταυτίζονται. Σ Λ

---

9. Αν $D = D_x = D_y = 0$, το σύστημα είναι πάντα αόριστο. Σ Λ

---

10. $(D - 1)^2 + (2D - 2)^2 = 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση. Σ Λ

---

11. Αν $D^2 + (D_x - 1)^2 = 0$, το σύστημα είναι αόριστο. Σ Λ

---

12. Αν $|D| + |5 - D_y| = 0$, το σύστημα είναι αδύνατο. Σ Λ

---

13. Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει ακριβώς δύο λύσεις. Σ Λ

---

14. Δύο ευθείες που οι εξισώσεις τους αποτελούν σύστημα με ορίζουσα διάφορη του μηδενός, μπορεί να είναι παράλληλες. Σ Λ

---

15. Δύο ευθείες που οι εξισώσεις τους αποτελούν σύστημα με ορίζουσα μηδέν πάντα ταυτίζονται. Σ Λ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

1. Σημειώστε δίπλα σε κάθε σύστημα την κατάλληλη έκφραση:

α) είναι αδύνατο, β) έχει άπειρες λύσεις, γ) έχει μία και μοναδική λύση.

Σ_1 $0x + y = 0$ $x + 0y = 0$	
Σ_2 $0x + 0y = 5$ $0x + 2y = 3$	
Σ_3 $0x + y = 7$ $0x + y = 2$	
Σ_4 $0x + 0y = 0$ $0x + 5y = 0$	
Σ_5 $x + 0y = 3$ $0x + y = -3$	
Σ_6 $0x + 0y = 0$ $0x + 0y = 12$	

2. Για τις ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ 4x + \beta_1 y = \gamma_1, \quad \alpha, \beta, \gamma, \beta_1, \gamma_1 \in R \end{cases}$$

ισχύουν κατά περίπτωση οι σχέσεις που αναγράφονται στη στήλη (Α).

Συμπληρώστε τη στήλη (Β) με μία από τις παρακάτω φράσεις:

α) είναι αδύνατο, β) έχει άπειρες λύσεις, γ) έχει μία και μοναδική λύση.

στήλη (Α)	**στήλη (Β)**
1. $D - 3 = 0$	
2. $\lvert D\rvert + \lvert Dx\rvert + \lvert Dy\rvert = 0$	
3. $D = 0$ και $\lvert Dx\rvert + \lvert Dy\rvert \neq 0$	
4. $\lvert D - 2\rvert = 0$	
5. $D^2 + (Dy + 1)^2 = 0$	

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛ/ΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Οι ευθείες $y - x = 1$ και $x + y = 1$ τέμνονται στο σημείο:

Α (0, - 1) Β (- 1, 0) Γ (0, 1) Δ (0, 0) Ε (1, 0)

---

2. Η ευθεία $- 2x = 6$ τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο:

Α (0, 3) Β (3, 0) Γ (0, - 3) Δ (- 3, 0) Ε (- 3, 3)

---

3. Οι ευθείες $x = 3$ και $y = - 2$ τέμνονται στο σημείο:

Α (3, 0) Β (0, - 2) Γ (3, - 2) Δ (- 2, 3) Ε (- 3, 2)

---

4. Αν το σύστημα $\begin{aligned} -3x + 2y &= \alpha \\ 6x - 4y &= \kappa\alpha \end{aligned}$ $\kappa, \alpha \in R^*$

έχει άπειρες λύσεις, το κ παίρνει μια από τις τιμές:

Α. 0 Β. 1 Γ. 2 Δ. - 2 Ε. – 1

---

5. Αν το σύστημα $\begin{aligned} 2x + \kappa y &= 0 \\ 6x + 9y &= 3 \end{aligned}$ είναι αδύνατο, το κ ισούται με:

Α. 3 Β. - 3 Γ. 0

Δ. οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό Ε. 2

---

6. Αν το σύστημα $\begin{aligned} \alpha x + 3y &= -9 \\ 2x - \ \ y &= \ \ 3 \end{aligned}$

επαληθεύεται για δύο ζεύγη τιμών των x, y, τότε το α ισούται με:

Α. - 2 Β. 3 Γ. - 9 Δ. – 6 Ε. 0

---

7. Αν οι ευθείες $y = 3$ και $y = 2x + \kappa$ τέμνονται στο σημείο Μ (- 1, 3), το κ ισούται με:

Α. 1 Β. 1 Γ. 5 Δ. – 5 Ε. 3

---

8. Αν η εξίσωση $\kappa x + \kappa(\kappa + 1)y = \gamma$ παριστάνει ευθεία, πρέπει οπωσδήποτε το κ να είναι:

Α. $\kappa \neq 1$ Β. $\kappa = 1$ Γ. $\kappa = 0$ Δ. $\kappa \neq 0$

Ε. οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

---

9. Αν $D_x + D_y = D$, $D \neq 0$ και $x = y$, τότε η λύση του συστήματος είναι:

Α. (1, 1) Β. (½, ½) Γ. (- 1, - 1) Δ. (0, 0) Ε. (- 2, - 2)

ΑΛΛΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1. Να λυθούν τα συστήματα :

i) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y+z=8 \\ x-3y-2z=1 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 2x+y+z=5 \\ x+2y+z=2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+z-x=2 \\ z+x-y=3 \end{cases}$

---

2. Να λυθούν τα συστήματα :

i). $\begin{cases} x+y+z=15 \\ y+z+t=20 \\ z+t+x=18 \\ t+x+y=16 \end{cases}$ ii). $\begin{cases} x+y-8=0 \\ 2x-y-7=0 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ y-z=0 \\ -x+2y=1 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} 2x+5y=15 \\ x-2y=3 \\ 3x+y=16 \end{cases}$ v) $\begin{cases} 2x+4y-z=6 \\ 2x+3y+5z=8 \end{cases}$

---

3. **α)** Να λυθεί το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} -3a+5\beta=7 \\ 5\alpha-4\beta=-3 \end{cases}$

β) Με τη βοήθεια της λύσης του συστήματος (Σ) να λυθούν τα συστήματα:

$(\Sigma_1):\begin{cases} -3|x-3|+5|y+4|=7 \\ 5|x-3|-4|y+4|=-3 \end{cases}$ $(\Sigma_2):\begin{cases} \dfrac{-3}{x-7}+\dfrac{5}{y+3}=7 \\ \dfrac{5}{x-7}-\dfrac{4}{y+3}=-3 \end{cases}$

$(\Sigma_3):\{|-3x+5y-7|+|5x-4y+3|=0$

---

4. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} -3x+5y=7 \\ |5x-4y|=3 \end{cases}$

---

5. Να λυθούν τα συστήματα :

i) $\begin{cases} y=2x^2 \\ -2x+y=4 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=41 \end{cases}$ iv) $\begin{cases} 2x-y=5 \\ x^2-xy=2x \end{cases}$

---

6. Να λυθούν τα συστήματα :

i) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-1}{5} \\ 5x+3y-2z=51 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ iii) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = 1 \\ \dfrac{yz}{y+z} = 2 \\ \dfrac{zx}{z+x} = 3 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} xy = 2 \\ yz = 4 \\ zx = 8 \end{cases}$ v) $\begin{cases} 7x^2 - y^2 = -19 \\ x^2 + 7y^2 = 33 \end{cases}$ vi) $\begin{cases} (x+2)(y-3) = 0 \\ (x+2y)(x-y+1) = 0 \end{cases}$

---

7. Να λυθούν τα συστήματα :

i) $\begin{cases} 2|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}+3| = 1 \\ 3|\mathbf{y}+3| - 2|\mathbf{x}| = 5 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = 3 \\ |\mathbf{x}+\mathbf{y}| = 2 \end{cases}$ iii) $\begin{cases} 3\sqrt{\mathbf{x}-1} + \sqrt[3]{\mathbf{y}+1} = 9 \\ 2\sqrt{\mathbf{x}-1} - \sqrt[3]{\mathbf{y}+1} = 1 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 = 5 \\ \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2 = 4 \end{cases}$ v) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}-1| + |2\mathbf{x}-\mathbf{y}| = 0$ vi) $\begin{cases} 2|\mathbf{x}| - \sqrt{\mathbf{y}} = 2 \\ \dfrac{4}{3}|\mathbf{x}| - 2\sqrt{\mathbf{y}} = -4 \end{cases}$
