ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΡΗΤΟ - ΑΡΡΗΤΟ

Αν **α>0**, ***μ ακέραιος*** και ***ν θετικός ακέραιος***, τότε ορίζουμε:

$$\boxed{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$$

Επιπλέον, αν ***μ,ν θετικοί ακέραιοι***, ορίζουμε: $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

Παραδείγματα: $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$, $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, $5^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$, $0^{\frac{3}{4}} = 0$.

<u>Γενικότερα</u> μπορούμε να ορίσουμε ***δυνάμεις*** α^x ***με βάση α>0 και εκθέτη πραγματικό αριθμό x***, οι οποίες είναι επίσης πραγματικοί αριθμοί.

Π.χ. $3^{\sqrt{2}} \cong 4,7288015\ldots$(είναι άρρητος και εκφράζεται κατά προσέγγιση)

Για τις δυνάμεις αυτές ισχύουν οι γνωστές ***ιδιότητες*** των δυνάμεων:

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y} \qquad \alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y} \qquad \alpha^x \cdot \beta^x = (\alpha \cdot \beta)^x$$

$$\left(\alpha^x\right)^y = \alpha^{x \cdot y} \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{\alpha^x}{\beta^x}$$ όπου **α,β>0**

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Κάθε συνάρτηση της μορφής : ***f (x)=α^x ,α>0 και α≠1*** λέγεται **εκθετική συνάρτηση με βάση το α**

___**Πεδίο ορισμού*: A=R.***

___**Σύνολο τιμών : *f(A)=(0, +∞).***

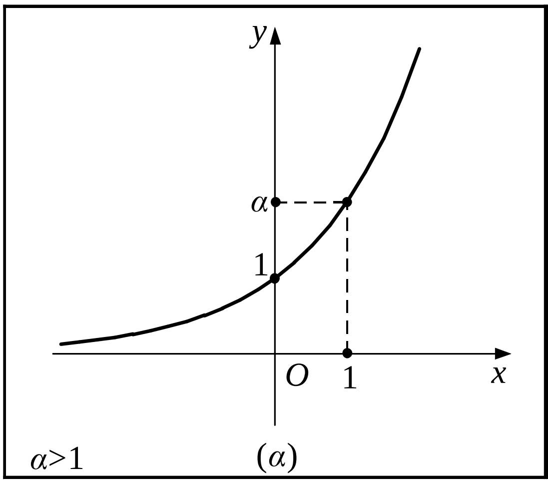
___**Μονοτονία** :

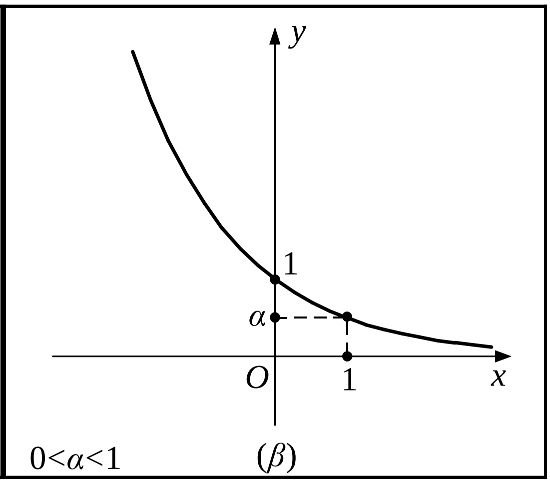
αν **α>1** τότε είναι ***γνησίως αύξουσα*** $(\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2)$

αν **0<α<1** τότε είναι ***γνησίως φθίνουσα*** $(\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2)$

Επίσης ισχύει ότι: $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

___**Γραφική παράσταση**: Καμπύλη όπως στα παρακάτω:





— Αν **α=e** , δηλαδή η συνάρτηση ***f(x)=e^x***, λέγεται απλά **εκθετική συνάρτηση (e>1)** και ισχύουν τα ανάλογα.

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού

Α. το διάστημα $[0,+\infty)$ **Β.** το διάστημα $(0,+\infty)$

Γ. το σύνολο R - {1} **Δ.** το σύνολο R **Ε.** το σύνολο R^*

----

2. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 3^x$ είναι

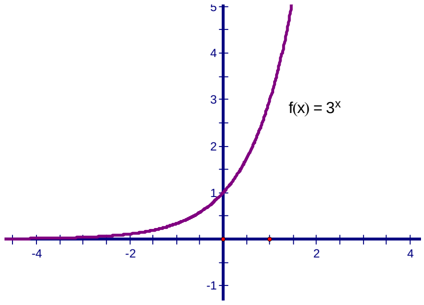
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(-\infty,0]$

Γ. το διάστημα $(-\infty,0)$

Δ. το διάστημα $(0,+\infty)$

Ε. το σύνολο R^*



----

3. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ είναι

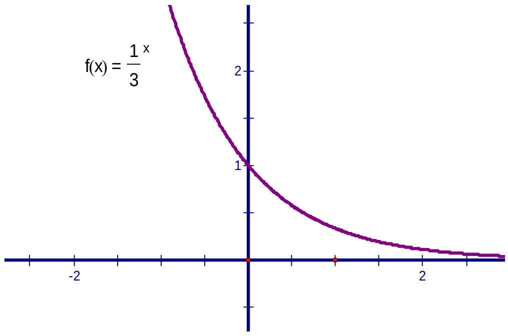
Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(-\infty,0]$

Γ. το διάστημα $(-\infty,0]$

Δ. το σύνολο R^*

Ε. το διάστημα $(0,+\infty)$



----

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2^x$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

Α. η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$

Β. η f έχει σύνολο τιμών το σύνολο R

Γ. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της

Δ. η γραφική της παράσταση τέμνει τον x΄x στο σημείο Α(0, 1)

Ε. η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x.

----

5. Έστω η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστή;

Α. η f είναι γνησίως αύξουσα στο R

Β. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Γ. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Δ. η γραφική παράσταση της f τέμνει τον y΄y στο σημείο Μ (0, 1/2)

Ε. η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x στο σημείο Ν (1, 0)

----

6. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x}$ είναι συμμετρική με την γραφική παράσταση της $f(x) = 5^{X}$ ως προς

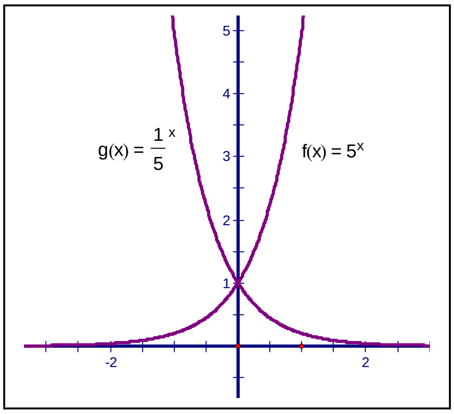
Α. τον άξονα x΄x

Β. τον άξονα y΄y

Γ. την ευθεία $y = \frac{1}{5}$

Δ. την ευθεία y = 5

Ε. κέντρο το Ο(0, 0)



---

7. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 2^{X}$ τότε ισχύει

Α. f (2) > f (3) **Β.** f (2) < f (3) **Γ.** f (2) ≥ f (3)

Δ. f (2) = 2f (3) **Ε.** f (2) = f (3)

---

8. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ τότε ισχύει

Α. f (2) < f (3) **Β.** f (2) ≤ f (3) **Γ.** f (2) > f (3)

Δ. f (2) = 3f (3) **Ε.** f (2) = f (3)

---

9. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 3^{X}$ τότε **δεν** είναι σωστή η

Α. f (0,5) < f (0,8) **Β.** f (-2) > f (-3) **Γ.** $f\left(\frac{1}{5}\right) > f\left(\frac{1}{7}\right)$

Δ. f (1, 3) > f (-1, 3) **Ε.** $f(\sqrt{3}) > f(\sqrt{5})$

---

10. Αν α > 0, μ, ν θετικοί ακέραιοι με ν ≥ 2 τότε το $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ισούται με

Α. $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}$ **Β.** $\left(\sqrt{\alpha^{\mu}}\right)^{\nu}$ **Γ.** $\left(\sqrt{\alpha^{\nu}}\right)^{\mu}$ **Δ.** $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα.

---

11. Το $32^{\frac{1}{5}}$ ισούται με

Α. $\frac{1}{32^5}$ **Β.** 2 **Γ.** $-\frac{1}{2}$ **Δ.** 32^{-5} **Ε.** $\frac{1}{\sqrt[5]{32}}$.

---

12. Αν $3^{\sqrt{x}} = 27$, τότε το x είναι

Α: 27 **Β:** 1/9 **Γ:** 0 **Δ:** 3 **Ε:** 9

---

13. Δίνεται η εξίσωση $2^{x^2-5x+10} = 16$. Τότε το x είναι

Α. 1 ή -1 **Β.** 2 ή 3 **Γ.** -2 ή -3 **Δ.** 0 **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα.

---

14. Αν $2^{2^x} = 16$, τότε το x είναι

Α. 4 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** -1 **Ε.** -2

---

15. Αν $f(x) = 2^x$, τότε το $f(f(2))$ ισούται με

Α. 16 **Β.** 8 **Γ.** 32 **Δ.** 1 **Ε.** 4

---

16. Η εξίσωση $3^x + 2^x = 2$ έχει λύση τον αριθμό

Α. -2 **Β.** -1 **Γ.** 1 **Δ.** 2 **Ε.** 0

---

17. Η εξίσωση $3^x + 3^{-x} = -1$

Α. έχει λύση ένα θετικό αριθμό **Β.** έχει λύση ένα αρνητικό αριθμό

Γ. έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό $\neq 0$ **Δ.** είναι αδύνατη

Ε. έχει λύση την $x = 0$.

---

18. Δίνεται η ανίσωση $3^{x-2} > 1$. Τότε ισχύει

Α. $x > 2$ **Β.** $x = 0$ **Γ.** $x < 2$ **Δ.** $x \le 2$ **Ε.** $x = 2$.

---

19. Δίνεται η ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \geq 1$. Τότε ισχύει

Α. $x \geq 2$ **Β.** $x = -1$ **Γ.** $x \le 1$ **Δ.** $x > 1$ **Ε.** $x > 2$

---

20. Δίνεται η ανίσωση $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \geq \frac{16}{81}$. Τότε ισχύει

Α. $x \geq 16$ **Β.** $x \le 4$ **Γ.** $x > 4$ **Δ.** $x = 16$

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα.

---

21. Η ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^{x} < 2$ αληθεύει

Α. Για $x \in (-\infty,-1)$ **Β.** Για $x \in (-\infty,-1]$ **Γ.** Για $x \in (-\infty,0)$

Δ. Για $x \in (-1,+\infty)$ **Ε.** Για κάθε $x \in R$.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3^{2x}=\frac{1}{81}$ ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=27$ iii) $2^{-x}=32$

iv) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=27$ v) $\frac{1}{2^{x}}=16$ vi) $\sqrt{3^{x+1}}=3\sqrt{3^{x-1}}$.

---

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2^{x^2-5x+6}=1$ ii) $\left[3^{\left(x^2-9\right)}\right]^{(x-2)}=1$ iii) $(1+\sqrt{3})^{x^4-5x^2+4}=1$

iv) $4^{3x}=2^4\cdot 16^{\frac{x}{2}}$ v) $2^x-4\sqrt{2^x}=0$.

---

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{10+2^x}{4}=\frac{9}{2^{x-2}}$ ii) $9^x-2\,3^x-3=0$ iii) $3^{2x-2}+3^x=4$

iv) $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$ v) $2^x-5\sqrt{2^x}+4=0$ vi) $5\cdot 2^x=2^{x+3}-3\sqrt{2}$.

---

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $3^{x+1}-28+9\cdot 3^{-x}=0$ ii) $2^{x-2}-3^{x-3}-2^{x-3}+3^{x-4}=0$.

---

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(x^2-5x+5)^{x+2}=1$ ii) $e^{2x}+e=e^x+e^{x+1}$

---

6. Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $3^{x^2-7x+6}<1$ ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}<\left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$ iii) $(0{,}5)^{5x-x^2-1}<0{,}125$

iv) $4^x-6\cdot 2^x+8<0$ v) e^{2x}-$3e^x$+$2<0$. vi) $2^x+2^{1-x}<3$

---

7. Να λύσετε τα συστήματα

i) $\begin{cases}9^{x+1}=3^{y+3}\\4^{x+y}=8\cdot 2^x\end{cases}$ ii) $\begin{cases}2^{x^2-5x+6}=1\\x+y=8\end{cases}$ iii) $\begin{cases}2^{x-1}\cdot 4^y=1\\3^x\cdot 3^{y-1}=9\end{cases}$ iv) $\begin{cases}3^x-5^y=4\\9\cdot 3^{-x}+5^y=6\end{cases}$

---

8. i) Να βρείτε το ($\alpha \neq 5$) ώστε η $f(x)=\left(\frac{1-\alpha}{\alpha-5}\right)^x$ να είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε το α, ($\alpha \neq 0$) ώστε η $g(x)=\left(1-\frac{5}{\alpha}\right)^x$ να είναι γνησίως φθίνουσα.

---

9. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\left(1-k^2\right)^x$.

i) Για ποιες τιμές του k ορίζεται η f;

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του k για τις οποίες η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να βρείτε το k ώστε η γραφική παράσταση της f (x) να περνάει από το σημείο $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

iv) Να βρείτε τις τιμές του k ώστε η γραφική παράσταση της f (x) να περνάει από το σημείο Σ (2, 1).

---

10. Να δεχθεί ότι οι ρίζες της εξισώσεως $3\cdot2^{3x}-19\cdot2^{2x}+38\cdot2^x-24=0$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

---

11. Σ' ένα ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται ένα αντιπυρετικό φάρμακο. Η θερμοκρασία (πυρετός) Θ (t) του ασθενούς t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου δίνεται από τον τύπο $\Theta(t)=36+4\left(\frac{1}{2}\right)^t$ σε βαθμούς Κελσίου.

i) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο.

ii) Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την φυσιολογική τιμή των 36,5°C.

iii) Αν η επίδραση του αντιπυρετικού διαρκεί 4 ώρες πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου.

---

12. Ένα δείγμα 5 Kgr ενός ραδιενεργού ισοτόπου διασπάται σύμφωνα με τον τύπο: $Q(t)=Q_o\cdot e^{-kt}$ όπου Q (t) παριστάνει την ποσότητα που απομένει μετά από χρόνο t, $Q_o=Q(0)$ η αρχική ποσότητα (για t = 0) και k σταθερά που εξαρτάται από το υλικό. Αν το μισό του αρχικού δείγματος διασπάστηκε σε 10 min., να βρείτε πόση ποσότητα ραδιενεργού υλικού θα έχει απομείνει μετά από 40 min.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

____*Ορισμός*: αν **0<α≠1** και **θ>0** τότε: $\log_\alpha\theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$

____*Ειδικές περιπτώσεις*: **δεκαδικός** $\log\theta=\log_{10}\theta$
Φυσικός ή νεπέρειος $\ln\theta=\log_e\theta$

____**Ιδιότητες**: **Παραδείγματα:**

$\log_\alpha\alpha=1$	$\log_2 2=1$, $\log 10=1$, $\ln e=1$
$\log_\alpha 1=0$	$\log_3 1=0$, $\log 1=0$, $\ln 1=0$
$\log_\alpha \alpha^x=x$ ($\ln e^x=x$)	$\log_3 3^5=5$, $\log 10^2=2$, $\ln e^7=7$
Αν x>0 τότε: $\alpha^{\log_\alpha x}=x$, ($e^{\ln x}=x$)	$5=2^{\log_2 5}$, $3=10^{\log 3}$, $7=e^{\ln 7}$
$\log_\alpha(x\cdot y)=\log_\alpha x+\log_\alpha y$ με x,y>0	$\log_2 3+\log_2 5=\log_2 15$
$\log_\alpha(x:y)=\log_\alpha x-\log_\alpha y$ με x,y>0	$\log 10-\log 2=\log 5$
$\log_\alpha x^k=k\log_\alpha x$, όπου x>0 και $k\in R$	$\ln 2^3=3\ln 2$
Τύπος αλλαγής βάσης: Αν 0<α,β≠1 και θ>0 τότε: $\log_\alpha\theta=\dfrac{\log_\beta\theta}{\log_\beta\alpha}$	$\log_3 5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

—— Λέγεται κάθε συνάρτηση της μορφής: $f(x)=\log_\alpha x$, όπου $0<\alpha\neq1$

_____**Πεδίο ορισμού** : $A=(0,+\infty)$

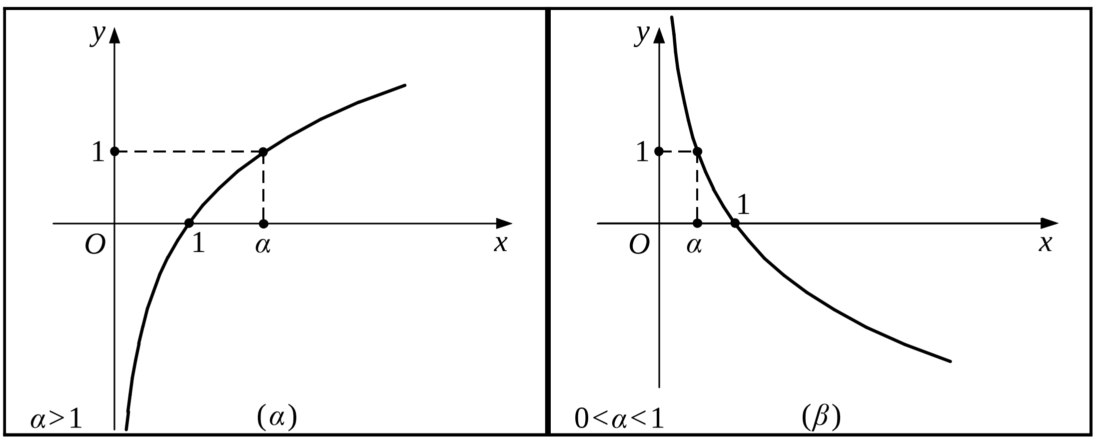
_____**Σύνολο τιμών** : $f(A)=R$

_____**Μονοτονία** : αν **α>1** τότε είναι **γν. αύξουσα** ($\log_\alpha x_1<\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1<x_2$)

αν **0<α<1** τότε είναι **γν. φθίνουσα.** ($\log_\alpha x_1<\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1>x_2$)

Επομένως: $\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$

_____**Γραφική παράσταση**: Καμπύλη όπως στα παρακάτω σχήματα.



(Εξισώσεις – Ανισώσεις)

Πρέπει να προσέχουμε τα παρακάτω !!

1. Η εξίσωση $\log_\alpha f(x)=k$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

   $f(x)=\alpha^k$, με τον περιορισμό $f(x)>0$.

---

2. Αν η εξίσωση είναι της μορφής $f(\log_\alpha x)=0$ μπορούμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό $y=\log_\alpha x$, οπότε η εξίσωση γίνεται: $f(y)=0$.

---

3. Η εξίσωση $\log_\alpha f(x)=\log_\alpha g(x)$ με $0<\alpha\neq 1$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=g(x)$ και τους περιορισμούς $f(x)>0$, $g(x)>0$.

---

4. Η εξίσωση $\log_{\alpha(\chi)} f(x)=\log_{\alpha(\chi)} g(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=g(x)$ και τους περιορισμούς $0<\alpha(x)\neq 1$, $f(x)>0$, $g(x)>0$.

---

5. Αν η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε περιέχει λογαρίθμους με διαφορετικές βάσεις, τότε συνήθως μετατρέπουμε τους λογαρίθμους αυτούς στην ίδια βάση.

Αντίστοιχα και για τις ανισώσεις (προσοχή στην μονοτονία των συναρτήσεων)

6. Η ανίσωση $\log_\alpha f(x)<\log_\alpha g(x)$ με $0<\alpha\neq 1$ είναι ισοδύναμη με την

   $f(x)<g(x)$ αν $\alpha>1$

   ή $f(x)>g(x)$ αν $0<\alpha<1$.

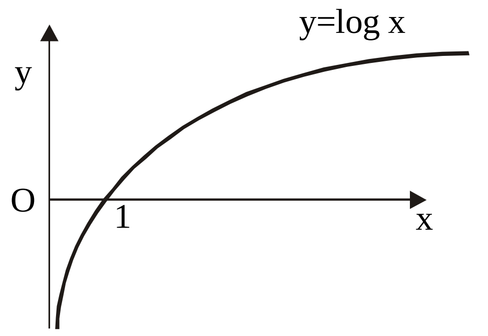
   Δεν πρέπει να ξεχνάμε περιορισμούς: $f(x)>0$ και $g(x)>0$.

Ερωτήσεις τύπου «Σωστό - Λάθος»

1. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta > 0$ ισχύει η ισοδυναμία. $\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$.	**Σ**	**Λ**
2. Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha \alpha^x = \alpha$	**Σ**	**Λ**
3. Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$	**Σ**	**Λ**
4. Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha 1 = 1$	**Σ**	**Λ**
5. Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει ότι $\log_\alpha \alpha = 1$	**Σ**	**Λ**
6. Αν $\theta > 0$ ισχύει ότι $\log(10\theta) = 1 + \log\theta$	**Σ**	**Λ**
7. Αν $\theta > 0$ και $\theta \neq 10$ ισχύει ότι $\log\left(\frac{\theta}{10}\right) = 1 - \log\theta$	**Σ**	**Λ**
8. Αν $\theta > 0$ και $\theta \neq 10$ ισχύει ότι $\log\theta^{10} = \theta$	**Σ**	**Λ**
9. Ισχύει ότι $\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}$	**Σ**	**Λ**
10. Ισχύει ότι $\ln 27 = \left(e^3\right)^9$	**Σ**	**Λ**

11. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log x$

Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.



i) Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$.	**Σ**	**Λ**
ii) Η f έχει σύνολο τιμών το R	**Σ**	**Λ**
iii) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R	**Σ**	**Λ**
iv) Η f έχει άξονα συμμετρίας τον x΄x.	**Σ**	**Λ**
v) Η f έχει ασύμπτωτη του αρνητικού ημιάξονα των y΄y	**Σ**	**Λ**
vi) Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $g(x) = 10^x$ ως προς την ευθεία $y = x$.	**Σ**	**Λ**
vii) Ισχύει ότι $f(2) < f(3)$	**Σ**	**Λ**
viii) Το σημείο (1,0) ανήκει στην γραφική παράσταση της f.	**Σ**	**Λ**
ix) Το σημείο (0,1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f.	**Σ**	**Λ**
x) Το σημείο (10,1) ανήκει στην γραφική παράσταση της f.	**Σ**	**Λ**

12. Ισχύει ότι:

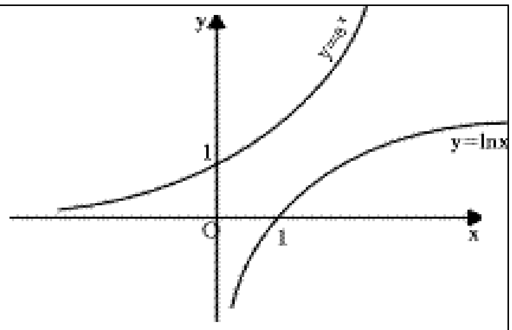
i) $\log x > \ln e$, για κάθε $x > 0$	**Σ** **Λ**
ii) $\log x^{-2} < \ln e^{-2}$ για κάθε $x > 0$	**Σ** **Λ**
iii) $\log 10^2 = 2$	**Σ** **Λ**
iv) $\ln e^3 = 3$	**Σ** **Λ**
v) $\log\frac{10}{e} = 1 - \log e$	**Σ** **Λ**

13. i) Αν $x < y$ τότε $\log x < \log y$	Σ Λ
ii) Αν $x < y$ τότε $\ln x > \ln y$	**Σ** **Λ**
iii) Αν $x < y$ τότε $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} y$	**Σ** **Λ**
iv) Αν $x < y$ τότε $\log_3 x > \log_3 y$	**Σ** **Λ**

14. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους

$f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$.

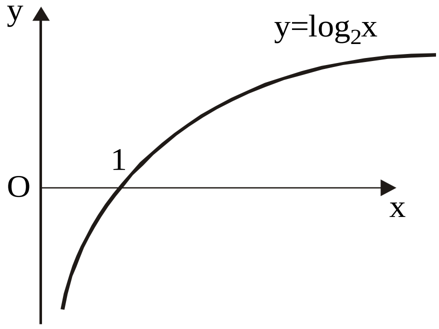
Να χαρακτηρίσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:



i) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g είναι συμμετρικές ως την ευθεία $y = x$.	**Σ** **Λ**
ii) Οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν τέμνονται.	**Σ** **Λ**
iii) Οι γραφική παράσταση της f τέμνει τον x΄x στο (1,0).	**Σ** **Λ**
iv) Η γραφική παράσταση της g τέμνει τον y΄y στο (0,1).	**Σ** **Λ**
v) Ισχύει ότι $f(2) < g(2)$	**Σ** **Λ**
vi) Ισχύει ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right)$	**Σ** **Λ**
vii) Η f και η g είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις στα πεδία ορισμού τους.	**Σ** **Λ**

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_2 x$ είναι



Α. το διάστημα $[0,+\infty)$

Β. το διάστημα $(0,+\infty)$

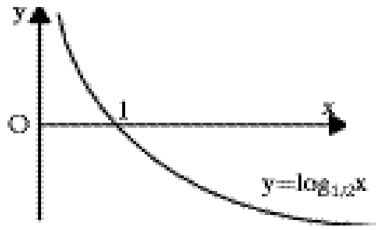
Γ. το σύνολο R

Δ. το σύνολο R*

Ε. το σύνολο R -{1}

---

2. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ είναι



Α. το διάστημα $(0,+\infty)$

Β. το διάστημα $[0,+\infty)$

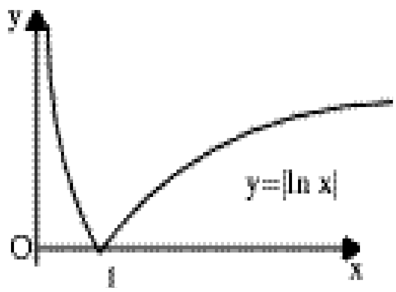
Γ. το σύνολο R

Δ. το σύνολο R*

Ε. το σύνολο R-{1}

---

3. Για την συνάρτηση με τύπο $f(x) = |\ln x|$ **δεν** ισχύει ότι



Α. έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$

Β. έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[0,+\infty)$

Γ. έχει ελάχιστο το 0 για x =1

Δ. είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Ε. τέμνει τον άξονα y΄y.

---

4. Η ισοδυναμία $\mathbf{\log_\alpha x = y \Leftrightarrow x = \alpha^y}$ ισχύει πάντοτε με τις προϋποθέσεις

Α. $x \in R$ και $\alpha > 0$ **Β.** $x \in [0,+\infty)$ και $0 \le \alpha \ne 1$ **Γ.** $x \in (0,+\infty)$ και $ο < \alpha \ne 1$

Δ. $x \in R$ και $\alpha \ne 1$ **Ε.** $x \ge 0$ και $\alpha \ge 0$.

---

5. Αν $\log_x 32 = 5$ τότε το x είναι ίσο με

Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** 2 **Γ.** -2 **Δ.**1 **Ε.** 10

---

6. Αν $\log_3 x = 4$ τότε το x είναι ίσο με

Α. 7 **Β.** 12 **Γ.** 64 **Δ.** 81 **Ε:** 9

---

7. Αν $\log_2 64 = x$ τότε το x είναι ίσο με

Α. 32 **Β.** 16 **Γ.** 128 **Δ.** 12 **Ε.** 6

---

8. Η παράσταση $3^{\log_3 5}$ είναι ίση με

Α. 1 **Β.** log5 **Γ.** 5 **Δ.** log3 **Ε.** 0

---

9. Η παράσταση $\log_\alpha \alpha$ με $0<\alpha\neq 1$ είναι ίση με

Α. α^2 **Β.** 1 **Γ.** α **Δ.** 0 **Ε.** 2^α

---

10. Η παράσταση $\log_\alpha 1$ με $0 < \alpha \neq 1$ είναι ίση με

Α. α^2 **Β.** 1 **Γ.** α **Δ.** 0 **Ε.** 2 α

---

11. Η παράσταση $\log 100^2$ είναι ίση με

Α. 4 **Β.** 2 **Γ.** 10 **Δ.** 100 **Ε.** 10.000

---

12. Η παράσταση log2 + log7 είναι ίση με

Α. log9 **Β.** log14 **Γ.** $\log\frac{7}{2}$ **Δ.** log5 **Ε.** 2log7

---

13. Η παράσταση log12 - log3 είναι ίση με

Α. log9 **Β.** log15 **Γ.** log36 **Δ.**12log3 **Ε.** log4

---

14. Η παράσταση $\log 2^3$ είναι ίση με

Α. log6 **Β.** log5 **Γ.** 2log3 **Δ.** 3log2 **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

---

15. Η παράσταση $\frac{\log 2}{\log 3}$ είναι ίση με

Α. $\log\frac{2}{3}$ **Β.** $\log_2 3$ **Γ.** $\log_3 2$ **Δ.** $\log\frac{3}{2}$ **Ε.** τίποτα από τα προηγούμενα

---

16. Η παράσταση $\frac{1}{2}\log25+\frac{1}{3}\log8$ είναι ίση με

Α. $\frac{1}{6}$ **Β.** $\frac{1}{6}\log200$ **Γ.** $\frac{5}{6}\log34$ **Δ.** 1 **Ε.** log200

---

17. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η

Α. $\log_5 2<\log_5\frac{1}{2}$ **Β.** $\log_5 2\leq\log_5\frac{1}{2}$ **Γ.** $\log_5 2>\log_5\frac{1}{2}$ **Δ.** $\log_5 2=\log_5\frac{1}{2}$

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα.

---

18. Από τις παρακάτω σχέσεις σωστή είναι η

Α. $\log_{\frac{1}{3}}5<\log_{\frac{1}{3}}7$ **Β.** $\log_{\frac{1}{3}}5\leq\log_{\frac{1}{3}}7$ **Γ.** $\log_{\frac{1}{3}}5=\log_{\frac{1}{3}}7$ **Δ.** $\log_{\frac{1}{3}}5>\log_{\frac{1}{3}}7$

Ε. τίποτα από τα προηγούμενα.

---

19. O $\log(4-x^2)$ ορίζεται αν

Α. $x > 2$ **Β.** $-2 < x < 2$ **Γ.** $x < -2$ **Δ.** $x = 2$ **Ε.** $x = -2$.

---

20. O $\log|x-1|$ **δεν** ορίζεται αν

Α. $x > 1$ **Β.** $x \neq 1$ **Γ.** $-1 < x < 1$ **Δ.** $x < -1$ **Ε.** $x = 1$.

---

21. Η συνάρτηση $f(x) = \log(x-6) + \log(7-x)$ ορίζεται αν

Α. $x = 6$ **Β.** $x < 6$ **Γ.** $x > 7$ **Δ.** $x = 7$ **Ε.** $6 < x < 7$.

---

22. Αν $\log[\log(x-2)] = 0$ τότε το x είναι ίσο με

Α. 12 **Β.** 2 **Γ.** 3 **Δ.** 4 **Ε.** 10.

---

23. Αν ισχύει log (ημx)= 0 τότε είναι

Α. $x=2κπ+\frac{π}{2}$ **Β.** $x=2κπ+\frac{π}{4}$ **Γ.** $x = 2κπ$

Δ. $x = 2κπ+π$ **Ε.** $x=2κπ-\frac{π}{2}$

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(1+x)=\log(1-x)$ ii) $\log 2+\log x=\log(21-x)$

iii) $\log(1+x)=1+\log(1-x)$ iv) $\ln\frac{x}{2}=\frac{\ln x}{2}$.

---

2. Να λύσετε την εξίσωση: $2\log(2x-1)-\log(3x-2x^2)=\log(4x-3)-\log x$

---

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x(\log 10-\log 5)=\log(4^x-12)$ ii) $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$

iii) $\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1$ iv) $\ln(\sigma\upsilon\nu x)=0$.

---

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$ ii) $\log_2(\log_2 x)=\log_4(\log_4 x)$

iii) $\log_4[\log_3(\log_2 x)]=0$.

---

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(x+1)+2\cdot\log\sqrt{5x}=2$ ii) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10$

iii) $\frac{\log x}{\log x+2}+\frac{\log x+3}{\log x-1}=\frac{11}{2}$ iv) $\log\frac{2x}{3}+\log(\frac{5x}{4}+2)=2\cdot\log(x-1)$

v) $\log[\log(2x^2+x-11)]=0$ vi) $\frac{1}{2}\log(x+2)+\log\sqrt{x-3)}=1+\log\sqrt{3}$

---

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\log[\log(\log x)]<0$ ii) $\ln[\ln(\ln x)]\leq 0$

iii) $\ln^4 x-5\ln^2 x+4\leq 0$ iv) $\ln^3 x-6\ln^2 x+11\ln x-6<0$

v) $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2+2x+1\right)>0$ vi) $\frac{1+\log_\alpha^2 x}{1+\log_\alpha x}>1$ με $0<\alpha<1$

---

7. α) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{3}}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log\sqrt{3}} = 0$.

---

8. i) Να αποδείξετε ότι: $3^{\log x} = x^{\log 3}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log x} = 54 - x^{\log 3}$.

---

9. Να λύσετε την εξίσωση: $(x+1)^{\log(x+1)} = 100(x+1)$.

---

10. Αν σε μία αριθμητική πρόοδο ($α_ν$) ο πρώτος όρος είναι $α_1 = \log_3 3$ και ο δεύτερος όρος της είναι $α_2 = \log_3 81$.

α) Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log_ω x^3} - 9 \cdot 3^{\log_ω x^2} - 9 \cdot 3^{\log_ω x} + 81 = 0$.

---

11. Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς που οι φυσικοί τους λογάριθμοι έχουν άθροισμα 2 και γινόμενο -8.

---

12. i) Να αποδείξετε ότι $x^{\log y} = y^{\log x}$ με $x, y > 0$

ii) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{x \cdot y} = 1 \end{cases}$

iii) Αν οι λύσεις του (ii) είναι ρίζες της εξίσωσης:

$\log[\log(x^2 + x\log θ - 110)] = 0$ να βρείτε το $θ \in R_+^*$

---

13. Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε να ισχύει:

$$\log x + \log x^3 + \log x^5 + \cdots + \log x^{2ν-1} = 2ν^2.$$

---

14. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \Re$ οι αριθμοί:

$\log_3 \frac{1}{x+1}$, $\log_3\sqrt{2x}$, $1 + 2\log_3 2 + \log_3 7$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π.

---

15. Αν σε μία γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$) ισχύει $α_ρ = k \cdot α_1$, όπου ο $α_ρ$ ο όρος τάξεως ρ, α ο πρώτος της όρος, και λ ο λόγος της να αποδείξετε ότι: $(ρ-1)\log λ = \log k$.

---

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\log x}{\log 2}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της ii) Να δειχθεί ότι f(3)+2f(6)-3f(3)=2.

---

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της. ii) Να δειχθεί ότι f(x)=-f(-x).

---

18. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x)=\sqrt{1-|\log x|}$ ii) $f(x)=\log_x(1-x^2)$

iii) $f(x)=\log_{x^2-1}(1-x)$ iv) $f(x)=\log[1-\sqrt{x}]$

v) $f(x)=\sqrt{2\log^2 x+\log x-3}$ vi) $f(x)=\sqrt{\log^3 x-3\log x+2}$

vii) $f(x)=\dfrac{1}{\log^2 x-3\log x+2}$ viii) $f(x)=\dfrac{1}{2|\log x|-1}$

---

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2\ln 2$

γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα χ΄χ.

---

20. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{1+\ln x}+\dfrac{1}{1-\ln x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)>4$.
