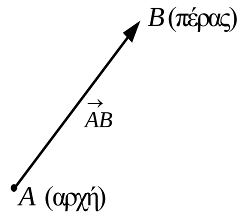
# ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

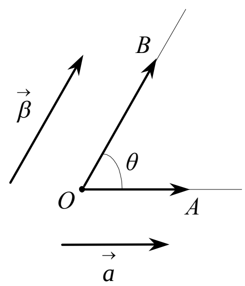
Στη Γεωμετρία το ***διάνυσμα*** ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα.
Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα.**




- Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος $\vec{AB}$, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $AB$, λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος $\vec{AB}$ και συμβολίζεται με $|\vec{AB}|$. Αν το διάνυσμα $\vec{AB}$ έχει μέτρο 1, τότε λέγεται **μοναδιαίο** διάνυσμα.
- Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{AB}$ λέγεται **φορέας** του $\vec{AB}$.
- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$, που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** διανύσματα
- Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε ***ομόρροπα*** και ***αντίρροπα.***
- Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.
- Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

## *Γωνία δύο διανυσμάτων*

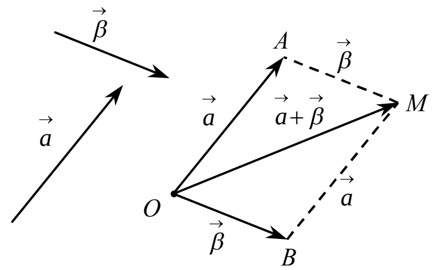
Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο $O$ παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ και $\vec{OB}=\vec{\beta}$. Την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, που ορίζουν οι ημιευθείες $OA$ και $OB$, την ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$** και τη συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ή $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})$ ή ακόμα, αν δεν προκαλείται σύγχυση, με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα $\theta$.




Η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου $O$. Είναι φανερό επίσης ότι $\mathbf{0^0 \le \theta \le 180^0}$ ή σε ακτίνια $\mathbf{0 \le \theta \le \pi}$ και ειδικότερα:

- $\theta = \mathbf{0}$, αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.
- $\theta = \pi$, αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.
- Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.
- Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία $\theta$ με $0 \le \theta \le \pi$.

## Πρόσθεση Διανυσμάτων




Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο $O$ παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το $A$ παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο ***κανόνα του παραλληλόγραμμου***. Δηλαδή, αν με αρχή ένα σημείο $O$ πάρουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathbf{OA}}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\mathbf{OB}}=\vec{\beta}$, τότε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο $OM$ του παραλληλόγραμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις $OA$ και $OB$.

## Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, αν $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε:

| | | |
|---|---|---|
| (1) | $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ | (Αντιμεταθετική ιδιότητα) |
| (2) | $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ | (Προσεταιριστική ιδιότητα) |
| (3) | $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$ | |
| (4) | $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$. | |

Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να συμβολίζουμε καθένα από τα ίσα αθροίσματα $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, το οποίο θα λέμε **άθροισμα των τριών διανυσμάτων** $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ **και** $\vec{\gamma}$ **.** Το άθροισμα περισσότερων διανυσμάτων $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,...,\vec{\alpha}_\nu$, $\nu\geq 3$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+...+\vec{\alpha}_\nu=(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+...+\vec{\alpha}_{\nu-1})+\vec{\alpha}_\nu.$$

Δηλαδή, ***για να προσθέσουμε*** $\nu$ ***διανύσματα*** $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,...,\vec{\alpha}_\nu$, τα καθιστούμε διαδοχικά, οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου. Επειδή μάλιστα ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, **το άθροισμα δε μεταβάλλεται αν αλλάξει η σειρά των προσθετέων ή αν μερικοί από αυτούς αντικατασταθούν με το άθροισμά τους**.

## Αφαίρεση Διανυσμάτων

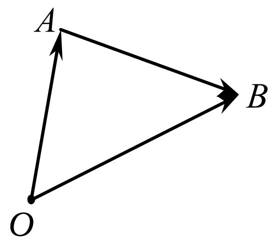
Η διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta}).$$

## *Διάνυσμα Θέσεως*

— Έστω *O* ένα σταθερό σημείο του χώρου **(σημείο αναφοράς)**.

Τότε για κάθε σημείο Α του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του *A*** ή **διανυσματική ακτίνα του Α**.




— **"Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής".**

Δηλαδή $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}$.

***Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων*** Γενικά ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\boxed{\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$$

Ειδικότερα ισχύει ότι: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, ενώ

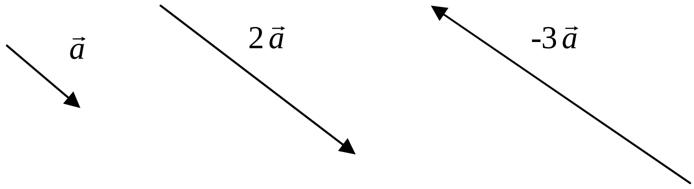
$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

## *Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα*

Έστω $\lambda$ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε **γινόμενο του $\lambda$ με το** $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι **ομόρροπο του** $\vec{\alpha}$ **, αν** $\lambda > 0$ και **αντίρροπο του** $\vec{\alpha}$ **,** αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο: $|\lambda\vec{\alpha}| = |\lambda||\vec{\alpha}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.



***Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα***

**(1)** $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ $\qquad$ $\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$

π.χ. $3(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=3\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ $\qquad$ $5(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=5\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$

**(2)** $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$ $\qquad$ $(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}$ **.**

π.χ. $(2+3)\vec{\alpha}=2\vec{\alpha}+3\vec{\alpha}$ $\qquad$ $(5-2)\vec{\alpha}=5\vec{\alpha}-2\vec{\alpha}$

**(3)** $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$ $\qquad$ $(-\lambda\vec{\alpha})=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})$

**(4)** $\lambda\vec{\alpha}=\vec{\mathbf{0}}\Leftrightarrow\lambda=\mathbf{0}$ **ή** $\vec{\alpha}=\vec{\mathbf{0}}$**.**

**(5) Αν** $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ **και** $\lambda\neq\mathbf{0}$**, τότε** $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ ***(Διαγραφή αριθμητικού παράγοντα)***

**(6) Αν** $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ **και** $\vec{\alpha}\neq\vec{\mathbf{0}}$**, τότε** $\lambda=\mu$ **.** ***(Διαγραφή διανυσματικού παράγοντα.)***

— **Γραμμικός συνδυασμός** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{\mathbf{v}}=\mathbf{\kappa}\vec{\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{\beta}}$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$ .

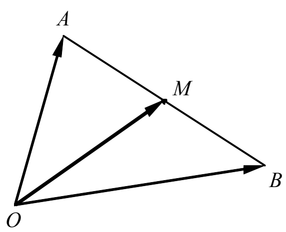
***Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων***

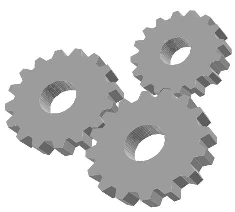
***ΘΕΩΡΗΜΑ***

Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε: $\qquad$ $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ , $\lambda\in\mathbf{R}$ .

— Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου $M$ του τμήματος $AB$:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\overrightarrow{\mathbf{OB}}}{\mathbf{2}}}$$



# *ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

**1.** Αν ΑΒΓΔΕΖ κανονικό εξάγωνο, με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$

α) Υπολογίστε τα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{AE}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

β) Δείξτε ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AZ} = 6\overrightarrow{B\Gamma}$.

---

**2.** Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ έτσι ώστε: $AE = Z\Gamma = \frac{1}{4}A\Gamma$

α) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο .

---

**3.** Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$ , αποδείξτε ότι τα $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα .

---

**4.** Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $3|\vec{\alpha}| = 4|\vec{\beta}| = 12|\vec{\gamma}|$, αποδείξτε ότι :

i) τα $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα και ii) τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα .

---

**5.** Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του επιπέδου Oxy.

i) Αν $x\vec{\alpha} = y\vec{\beta}$ τότε x=y=0 ,όπου $x, y \in R$.

ii) Αν $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \nu\vec{\alpha} + \rho\vec{\beta}$, τότε λ=ν και μ=ρ.

iii) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in R$ τα διανύσματα

$\vec{u} = (2x+1)\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{w} = (\frac{x^2}{2} + 8)\vec{\alpha} + (x+4)\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

---

**6.** α) Αν $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά διανύσματα με $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$, να δείξετε ότι $\lambda = \mu = 0$ .

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$ , $\vec{\gamma}$ τα οποία δεν είναι συγγραμμικά ανά δύο .

Αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha} + \vec{\gamma}$, να δείξετε ότι $\vec{\gamma} \parallel \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ .

---

**7.** Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του επιπέδου Οxy.
Αν $\overrightarrow{OA}=(x+1)\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB}=2x\vec{\alpha}+(3x-1)\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=-\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$ και τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά να προσδιορίσετε το $x\in R$.

---

**8.** Αν $\vec{OA}=2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-5\vec{\gamma}$ , $\vec{OB}=4\vec{\alpha}-\vec{\beta}+6\vec{\gamma}$ , $\vec{O\Gamma}=-2\vec{\alpha}+11\vec{\beta}-27\vec{\gamma}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά .

---

**9.** Έστω ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Αν ισχύει :
$(x+1)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{A\Gamma}=x\overrightarrow{B\Gamma}+(x-y)\overrightarrow{AM}$ , να προσδιορίσετε τους πραγμ. αριθμούς x,y.

---

**10.** Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ , Κ το κέντρο του , Μ το μέσον του ΚΓ. Δείξτε ότι :
$\vec{AB}+\vec{A\Delta}=4\vec{AM}-2\vec{A\Gamma}$ .

---

**11.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ , ΓΔ αντιστοίχως .
Να δείξετε ότι : i) $\vec{A\Delta}+\vec{B\Gamma}=2\vec{K\Lambda}$ και ii) $\vec{A\Gamma}+\vec{B\Delta}=2\vec{K\Lambda}$ .

---

**12.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ . Θεωρούμε σημείο Η τέτοιο ώστε
$\vec{AH}=-4\vec{AM}$ . Να δείξετε ότι : $\vec{AM}=\frac{1}{10}(\vec{HB}+\vec{H\Gamma})$ .

---

**13.** Θεωρούμε τις κάθετες χορδές ΑΒ , ΓΔ ενός κύκλου με κέντρο Ο , οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ. Αποδείξτε ότι $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}=2\vec{MO}$ .

---

**14.** Αν $\vec{A\Gamma}=-\kappa\vec{\Gamma B}$ και $\vec{A\Delta}=\kappa\vec{\Delta B}$ , να βρείτε τον $\kappa\in\Re$ ώστε το Γ να είναι το μέσο του τμήματος ΑΔ .

---

**15.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Μ τέτοιο ώστε $\vec{M\Gamma}=-2\vec{MB}$
Να αποδειχτεί ότι : $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Delta}+2\vec{AB}=\vec{0}$ .

---

**16.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Μ τέτοιο ώστε να είναι $3\vec{BM}+\vec{M\Gamma}=\vec{0}$ .
Να αποδειχτεί ότι : $3\vec{AB}=2\vec{AM}+\vec{A\Gamma}$ .

---

**17**. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστεί σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει:
$\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{\Gamma P}$.

---

**18.** Δίνονται τα σημεία Α , Β , Γ . Αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\vec{\delta} = 5\vec{MA} - 8\vec{M\Gamma} + 3\vec{MB}$ είναι σταθερό .

---

**19.** Να βρείτε σημείο Ρ του επιπέδου ενός τριγώνου ΑΒΓ , τέτοιο ώστε να ισχύει $\vec{AP} + 2\vec{BP} + 3\vec{\Gamma P} = \vec{0}$ .

---

**20.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Να βρείτε σημείο Ρ τέτοιο ώστε να ισχύει $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{P\Gamma} = \vec{P\Delta}$ .

---

**21.** Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί σημείο Μ, τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = \vec{0}$.

---

**22.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των μη παραλλήλων πλευρών του. Να αποδειχθεί ότι:

α) Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ είναι παράλληλο προς τις βάσεις του .

β) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma})$.

---

**23.** Αν ισχύει $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} - 5\overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

---

**24.** Αν ισχύει $7\vec{MB} + 3\vec{\Gamma M} = 4\vec{MA}$, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά .

---

**25.** Να αποδείξετε ότι αν $(\kappa + 2)\vec{PA} + 3\vec{PB} = (\kappa + 5)\vec{P\Gamma}$ τότε τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά .

---

**26.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ , Ε και Ζ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις :
$\vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ , $\vec{\Gamma E} = \frac{1}{2}\vec{B\Gamma}$ και $\vec{AZ} = \frac{3}{5}\vec{A\Gamma}$ .

α) Αν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{\Delta E}$ και $\vec{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ .

β) Αποδείξτε ότι τα σημεία Δ , Ε , Ζ είναι συνευθειακά .

---

**27.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζώστε να ισχύει

$\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$, $\overrightarrow{\text{ΑΖ}} = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΓΕ}} = \overrightarrow{\text{ΒΓ}}$.

α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{ΔΕ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΔΖ}}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$.

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

---

**28.** Έστω το παρ/μο ΑΒΓΔ και $\vec{\alpha} = \overrightarrow{\text{ΑΒ}}$, $\vec{\beta} = \overrightarrow{\text{ΑΔ}}$. Έστω Ε σημείο της ΒΓ και Ζ σημείο της ΔΓ τέτοια , ώστε $\overrightarrow{\text{ΒΕ}} = \overrightarrow{\text{ΕΓ}}$, $\overrightarrow{\text{ΖΓ}} = 3\overrightarrow{\text{ΔΖ}}$. Αν Ρ το σημείο τομής των ΔΕ και ΒΖ, να αποδεχθεί ότι : $\overrightarrow{\text{ΑΡ}} = \dfrac{2}{5}\vec{\alpha} + \dfrac{4}{5}\vec{\beta}$.

---

**29.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i) $\left|\overrightarrow{\text{ΜΑ}}\right| = \left|\overrightarrow{\text{ΜΒ}}\right|$ ( ΑΒ : γνωστό ευθύγραμμο τμήμα )

ii) $\overrightarrow{\text{ΑΜ}} \,//\, \overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ ( ΑΒΓ : γνωστό τρίγωνο )

iii) $\left|\overrightarrow{\text{ΑΜ}}\right| = 2$ ( Α : γνωστό σημείο ).

---

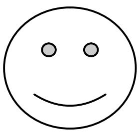
**30.** Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 4 . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει : $\left|\overrightarrow{\text{ΜΑ}} + \overrightarrow{\text{ΜΒ}}\right| = \left|4\overrightarrow{\text{ΜΑ}} - 4\overrightarrow{\text{ΜΒ}}\right|$.

---

**31.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Δ της ΒΓ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου του τριγώνου για τα οποία ισχύει :

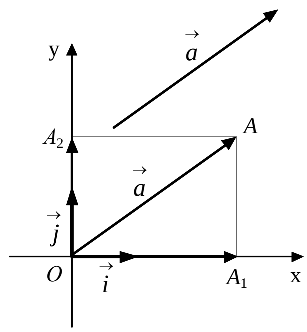
$\overrightarrow{\text{ΜΑ}} + \overrightarrow{\text{ΜΒ}} + \overrightarrow{\text{ΜΓ}} = \lambda\,\overrightarrow{\text{ΑΔ}}$ , όπου το λ διατρέχει το διάστημα [-1 , 2] .

---



# Συντεταγμένες Διανύσματος

Έστω *Oxy* ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα του επιπέδου ***"Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$ ".***




Τα διανύσματα $\overrightarrow{\mathbf{OA_1}}=\mathbf{x\vec{i}}$ και $\overrightarrow{\mathbf{OA_2}}=\mathbf{y\vec{j}}$ λέγονται **συνιστώσες** του διανύσματος $\vec{\alpha}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντιστοίχως, ενώ οι αριθμοί $x, y$ λέγονται συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$ στο σύστημα *Oxy* .

Πιο συγκεκριμένα, ο **x** λέγεται **τετμημένη** του $\vec{\alpha}$ και ο **y** λέγεται **τεταγμένη** του $\vec{\alpha}$ .

**"Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες".**

Καθένα από τα ίσα διανύσματα με τετμημένη $x$ και τεταγμένη $y$, θα το συμβολίζουμε με το διατεταγμένο ζεύγος $(x, y)$. Γράφουμε τότε: $\vec{\alpha}=(x,y)$ .

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε έχουμε:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,y_1+y_2) \quad \text{και} \quad \lambda\vec{\alpha}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$$

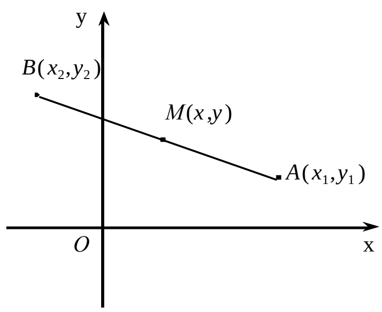
<u>*Γενικότερα,*</u> για το γραμμικό συνδυασμό $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$ έχουμε:

$$\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)+(\mu x_2,\mu y_2)=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2).$$

## Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $\mathrm{A}(x_1,y_1)$ και $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι $(x,y)$ είναι οι συντεταγμένες του μέσου *M* του *AB*.

Τότε ισχύει:



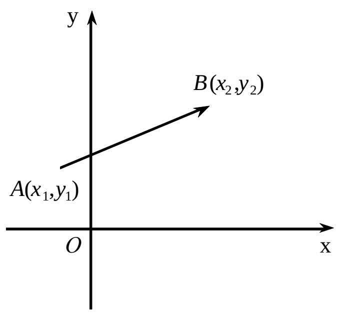

$$\boxed{\mathbf{x}=\frac{\mathbf{x_1+x_2}}{\mathbf{2}} \quad \text{και} \quad \mathbf{y}=\frac{\mathbf{y_1+y_2}}{\mathbf{2}}.}$$

## Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$.Τότε:

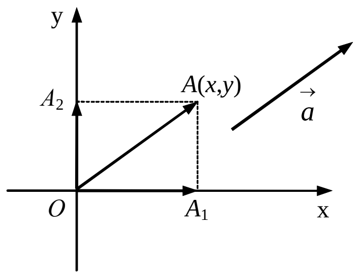
**τετμημένη του $\overrightarrow{AB}$= τετμημένη του *B* — τετμημένη του *A***

**τεταγμένη του $\overrightarrow{AB}$= τεταγμένη του *B* — τεταγμένη του *A*.**



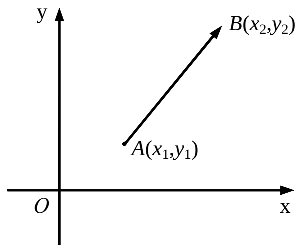

Δηλαδή: $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=(\mathbf{x_2-x_1},\mathbf{y_2-y_1})$.

## *Μέτρο Διανύσματος*




Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και $A$ το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ . Τότε:

$$|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}\ .$$




Ας θεωρήσουμε τώρα δύο σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

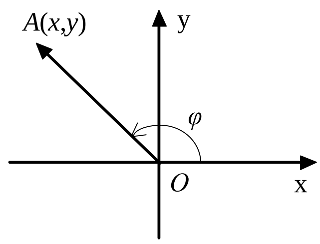
## *Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων*

Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου.

$$\boxed{\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}\Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0}$$

Συμβολίζουμε με $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})$ την ορίζουσα $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=x_1y_2-x_2y_1$ που έχει ως 1η τη γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και ως 2η γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\beta}$ και τη λέμε **ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$** (με τη σειρά που δίνονται).

## *Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος*




Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και $A$ το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ .

Τη γωνία $\varphi$, που διαγράφει ο ημιάξονας $Ox$ αν στραφεί γύρω από το $O$ κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία $OA$, την ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$** .

Είναι φανερό ότι: $0\le \phi<2\pi$ .

Το πηλίκο $\dfrac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος $\vec{\alpha}=(x,y)$, με $x\neq 0$, το λέμε **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{\alpha}$ και τον συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{\alpha}}$ ή απλώς με $\lambda$**.**

Επομένως: $\boxed{\lambda=\dfrac{y}{x}=\varepsilon\varphi\phi}$.

— Αν $y=0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha}\,//\,x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$ είναι ο $\lambda=0$ .

— Αν $x=0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha}\,//\,y'y$, τότε **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$ .

— Η ***συνθήκη παραλληλίας*** για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1$ και $\lambda_2$ διατυπώνεται ως εξής: $\boxed{\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}\Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2}$.

# *Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων*

***ΟΡΙΣΜΟΣ***

- Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ τον ***πραγματικό αριθμό***

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συνφ},$$

όπου $\varphi$ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

- Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=0$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

Άμεσες συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι εξής:

- $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ *(Αντιμεταθετική ιδιότητα)*
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
- $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

- Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}^2$ και λέγεται **τετράγωνο του** $\vec{\alpha}$ και είναι: $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$.

Ειδικότερα, για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ του καρτεσιανού επίπεδου ισχύουν:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0 \quad \text{και} \quad \vec{i}^2=\vec{j}^2=1$$

## *Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου*

Μπορούμε να εκφράσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους. Συγκεκριμένα:

$$\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2}$$

Δηλαδή:

**"Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους".**

Γενικά ισχύουν οι ιδιότητες:

- $\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}),\ \lambda\in\mathbf{R}$
- $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ *(Επιμεριστική Ιδιότητα)*
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$ όπου $\lambda_1=\lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2=\lambda_{\vec{\beta}}$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta}\not\parallel y'y)$
- (**Προσοχή** δεν έχει νόημα η προσεταιριστική ιδιότητα)!!

## *Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων*

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία $\theta$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}\theta$ και επομένως,

$$\boldsymbol{\text{συν}\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}}\,.$$

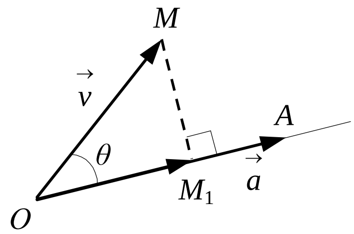
***Εφαρμογή:*** **Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε :**

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \quad \textbf{και} \quad (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\le\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$$

Η ισότητα και στις δύο ισχύει, μόνο όταν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

## *Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα*

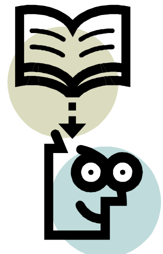
Έστω $\vec{\alpha},\vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Με αρχή ένα σημείο $O$ παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$. Από το $M$ φέρνουμε κάθετο στη διεύθυνση του $\overrightarrow{OA}$ και έστω $M_1$ το ίχνος της καθέτου.




Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ λέγεται **προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$** και συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

Δηλαδή $\overrightarrow{OM_1}=\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

Ισχύει ότι: $\boxed{\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}}$.



# *ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

## *ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ*

**1.** Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. **Σ** **Λ**

**2.** Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

**3.** Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{0}$. **Σ** **Λ**

**4.** Αν $|\vec{\alpha}| = \lambda|\vec{\beta}|$, τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

**5.** Αν $\vec{u} = (x_1, -y_1)$ και $\vec{v} = (-x_1, y_1)$, τότε $\vec{u} = -\vec{v}$. **Σ** **Λ**

**6.** Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-2, 2)$ είναι παράλληλο με το $\vec{\beta} = (3, -3)$. **Σ** **Λ**

**7.** Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα. **Σ** **Λ**

**8.** Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διευθύνσεως. **Σ** **Λ**

**9.** Αν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι πάντα συγγραμμικά. **Σ** **Λ**

**10.** Αν $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma}$ και κ, λ > 0, τότε τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά. **Σ** **Λ**

**11.** Το $(\vec{\alpha} . \vec{\beta}) . \vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα. **Σ** **Λ**

**12.** Το $(\lambda\vec{\alpha}) . \vec{\beta}$, $\lambda \in R$ παριστάνει διάνυσμα. **Σ** **Λ**

**13.** Το διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha}$, $\lambda \in R$ και $\lambda < 0$ είναι συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

**14.** Αν $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0}$, $\lambda \in R$ τότε οπωσδήποτε $\vec{\alpha} = \vec{0}$. **Σ** **Λ**

**15.** Η ισότητα $|\lambda\vec{\alpha}| = |\lambda|\,|\vec{\alpha}|$ ισχύει για κάθε $\lambda \in R$. **Σ** **Λ**

**16.** Αν $\kappa\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\kappa, \lambda \in R$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\kappa = \lambda = 0$. **Σ** **Λ**

**17.** Αν $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$ και $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά, τότε $\lambda = \mu = 0$. **Σ** **Λ**

**18.** Μπορούμε να γράφουμε: $\vec{\alpha}\ (\vec{\beta}\,.\,\vec{\gamma}) = (\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta})\ \vec{\gamma}$. **Σ** **Λ**

---

**19.** Μπορούμε να γράφουμε: $\lambda\cdot(\vec{\beta}\,.\,\vec{\gamma}) = (\lambda\cdot\vec{\beta})\ \vec{\gamma}$. **Σ** **Λ**

**20.** Αν $\vec{\alpha} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{5})$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. **Σ** **Λ**

---

**21.** Υπάρχουν $\theta \in R$ τέτοια ώστε τα διανύσματα

$\vec{\alpha} = (\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \frac{1}{\eta\mu\theta})$ και $\vec{\beta} = (\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta)$ να είναι κάθετα. **Σ** **Λ**

---

**22.** Ισχύει $\vec{\alpha}\,.\,\vec{\delta} = \vec{\alpha}\,.\,\pi\rho o\beta_{\vec{\delta}}\,\vec{\alpha}$. **Σ** **Λ**

---

**23.** Αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$ **Σ** **Λ**

---

**24.** Αν $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ **Σ** **Λ**

---

**25.** Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ **Σ** **Λ**

---

**26.** Αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$ **Σ** **Λ**

---

**27.** Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, τότε $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ **Σ** **Λ**

---

**28.** Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ **Σ** **Λ**

---

**29.** Αν $\kappa\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\kappa = \lambda$ **Σ** **Λ**

---

**30.** Ισχύει: $\vec{\alpha}^2 = (-\vec{\alpha})^2$ **Σ** **Λ**

---

**31.** Ισχύει: $\vec{\alpha}^2 = -\vec{\alpha}^2$ **Σ** **Λ**

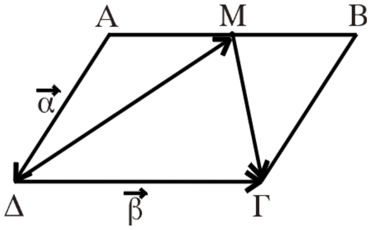
---

**32.** Ισχύει: $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$ **Σ** **Λ**

---

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛ/ΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

**1.** Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ το Μ είναι μέσο της ΑΒ. Αν $\overrightarrow{Α\Delta} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \vec{\beta}$, τότε:




α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta Μ}$ ισούται με:

**Α.** $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$ **Β.** $\dfrac{\vec{\beta}-\vec{\alpha}}{2}$ **Γ.** $-\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$

**Δ.** $\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

β) Το διάνυσμα $\overrightarrow{Μ\Gamma}$ ισούται με:

**Α.** $\vec{\alpha}-\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Β.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ **Γ.** $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

**Δ.** $\vec{\alpha}+\dfrac{1}{2}\vec{\beta}$ **Ε.** $\dfrac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{2}$.

γ) Με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

**Α.** $\overrightarrow{ΑΒ}$ **Β.** $\overrightarrow{Β\Delta}$ **Γ.** $\overrightarrow{\Delta Β}$ **Δ.** $\overrightarrow{\Gamma Α}$ **Ε.** $\overrightarrow{Α\Gamma}$.

δ) Με $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ισούται το διάνυσμα:

**Α.** $\overrightarrow{Α\Gamma}$ **Β.** $\overrightarrow{\Gamma Α}$ **Γ.** $\overrightarrow{ΒΑ}$ **Δ.** $\overrightarrow{\Delta Β}$ **Ε.** $\overrightarrow{Β\Delta}$.

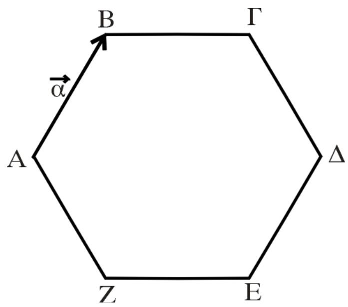
---

**2.** Στο κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι:

**Α.** $\overrightarrow{Α\Gamma} = \overrightarrow{ΑΕ}$ **Β.** $\overrightarrow{Α\Gamma} = -\overrightarrow{ΕΑ}$

**Γ.** $\overrightarrow{Α\Gamma} = -2\vec{\alpha}$ **Δ.** $\overrightarrow{Α\Gamma} = -4\vec{\alpha}$

**Ε.** $\overrightarrow{Α\Gamma} = \overrightarrow{Ζ\Delta}$




---

**3.** Αν ισχύει: $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}=\vec{0}$, κ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός, τότε ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι σε κάθε περίπτωση σωστή;

**Α.** Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια φορά.

**Β.** Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

**Γ.** Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

**Δ.** Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν το ίδιο μέτρο.

**Ε.** Τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ έχουν την ίδια διεύθυνση.

---

**4.** Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ $(\lambda^2 - 3\lambda - 4,\ \lambda - 2)$ είναι μηδενικό με:

**Α.** $\lambda = 2$ **Β.** $\lambda = 1$ **Γ.** $\lambda = -4$ **Δ.** $\lambda = 0$ **Ε.** για κανένα πραγμ. αριθμό $\lambda$ .

---

**5.** Είναι $\vec{\alpha}$ =(ημθ, συνθ), $\theta \in R$ και $\kappa \in Z$. Το $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο στον άξονα x΄x με:

**Α.** $\theta = \kappa\pi$ **Β.** $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

**Δ.** $\theta = \kappa\pi + \pi$ **Ε.** $\theta = \kappa\pi - \pi$.

---

**6.** Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ = (ημθ, συνθ), είναι παράλληλο στο $\vec{\beta}$ = (συνθ, ημθ) με:

**Α.** $\theta = 0$ **Β.** $\theta = \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\theta = \frac{\pi}{2}$ **Δ.** $\theta = \pi$ **Ε.** $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

---

**7.** Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, \frac{1}{\lambda})$ και $\vec{\beta} = (-1, \frac{8}{\lambda})$ είναι κάθετα με:

**Α.** $\lambda = -1$ **Β.** $\lambda = 0$ **Γ.** $\lambda = 1$ **Δ.** $\lambda = 2$ **Ε.** $\lambda = 8$.

---

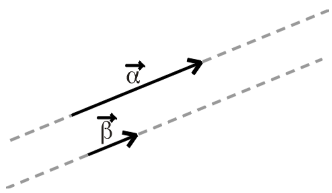
**8.** Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$. Από τις παρακάτω σχέσεις δεν μπορεί να ισχύει:

**Α.** $\vec{\alpha} = 0$ **Β.** $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$ **Γ.** $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{2}$

**Δ.** $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}$ **Ε.** $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{6}$.

---

**9.** Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με:

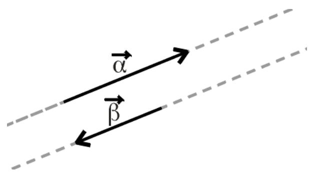



**Α.** $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Β.** $-|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Γ.** 0

**Δ.** $\frac{1}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\frac{1}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

---

**10.** Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με:




**Α.** 0 **Β.** $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Γ.** $-|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

**Δ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

---

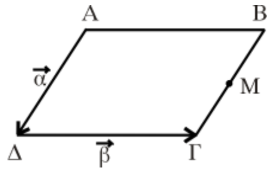
**11.** Αν $\vec{\alpha}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα και $\vec{\beta}$ ένα οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα, τότε το γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με:

**Α.** $\vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}\, \vec{\alpha}$ **Β.** $\vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\, \vec{\beta}$ **Γ.** $\vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\, \vec{\beta}$

**Δ.** $|\vec{\alpha}| \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}\, \vec{\beta}$ **Ε.** $|\vec{\beta}| \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}}\, \vec{\alpha}$ .

---

## *ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ*




**1.** Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{ΑΔ} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{ΔΓ} = \vec{\beta}$ και Μ μέσο της ΒΓ. Να αντιστοιχήσετε κάθε διάνυσμα της στήλης (Α) με το ίσο του της στήλης (Β).

| **στήλη Α** | **στήλη Β** |
|---|---|
| $\overrightarrow{ΑΓ}$ | $\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ |
| $\overrightarrow{ΒΔ}$ | $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ |
| $\overrightarrow{ΔΜ}$ | $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ |
| $\overrightarrow{ΑΜ}$ | $\vec{\beta} - \frac{1}{2}\vec{\alpha}$ |
| | $\vec{\beta} + \frac{1}{2}\vec{\alpha}$ |
| | $\frac{1}{2}\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ |

**2.** Κάθε διάνυσμα της στήλης (Α) έχει μέτρο έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε διάνυσμα με το αντίστοιχο μέτρο του.

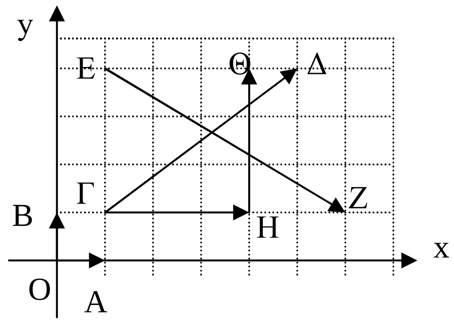
| **στήλη Α**<br>**διάνυσμα** | **στήλη Β**<br>**μέτρο** |
|---|---|
| $-\sqrt{8}\,\vec{i} + \vec{j}$ | $\sqrt{2}$ |
| $x\,\vec{i} + \psi\,\vec{j}$ | ημθ + συνθ |
| $(2ημθ)\,\vec{i} - (2συνθ)\,\vec{j}$ | 3 |
| $(x - \psi)\,\vec{i} + 2\sqrt{x\psi}\,\vec{j}$ | $\sqrt{x^2 + \psi^2}$ |
| | ημθ - συνθ |
| | 2 |
| | $\lvert x + \psi \rvert$ |

**3.** Δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{6}$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}) = \pi$.
Να αντιστοιχίσετε κάθε εσωτερικό γινόμενο που βρίσκεται στη στήλη (Α) με την τιμή του που βρίσκεται στη στήλη (Β).

| **στήλη Α** | **στήλη Β** |
|---|---|
| $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ | $-1$ |
| $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ | $0$ |
| $\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| | $\frac{1}{2}$ |

## *ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ*

**1.** Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων είναι $\vec{OA} = \vec{i}$ , $\vec{OB} = \vec{j}$ . Να εκφράσετε ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{i}$ , $\vec{j}$ τα διανύσματα $\vec{\Gamma\Delta}$ , $\vec{EZ}$ , $\vec{H\Theta}$ , $\vec{\Gamma H}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες τους .




---

**2.** Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 4 , \lambda + 2)$ , όπου $\lambda \in \Re$ .

α) Να βρείτε το λ ώστε το $\vec{\alpha}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα .

β) Αν $\vec{\beta} = (4\lambda - 7 , 3)$ , να βρείτε το λ ώστε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ .

---

**3.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1 , -3)$ , $\vec{\beta} = (-1 , 2)$ , $\vec{\gamma} = (-1 , 1)$ .

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$ .

β) Να εκφραστεί το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$ .

---

**4.** Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Κ . Αν Α(1 , 2) , Β(5 , 3) και Κ(4 , 5) , να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ .

---

**5.** Αν τα σημεία Κ(4 , 0) , Λ(6 , 2) , Μ(3 , 5) είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ , ΒΓ , ΑΓ αντιστοίχως του τριγώνου ΑΒΓ , να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου .

---

**6.** Δίνονται τα σημεία Α(3 , - 4) και Β(2 , 1) . Να βρείτε :

α) το συμμετρικό του Α ως προς κέντρο συμμετρίας το Β .

β) το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το Α .

---

**7.** Δίνονται τα σημεία Α(1 , 2) , Β(3 , 5) , Γ(5 , 7) , Δ(- 10 , - 11) .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\vec{AB}, \vec{B\Gamma}, \vec{\Gamma\Delta}$ .

β) Να εκφραστεί το $\vec{\Gamma\Delta}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ .

---

**8.** Αν για τα σημεία Α , Β , Μ ισχύει $\vec{AM} = 2\vec{MB}$ και Α(- 1 , 2) , Β(3 , - 1) , να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ .

---

**9.** Δίνονται τα σημεία $A(16 , -\lambda^2)$, $B(\lambda^2 , -4\lambda)$ . Αν $\vec{v} = \vec{AB}$, να βρείτε τον $\lambda \in \Re$ ώστε :

i) $\vec{v}$ // x΄x και $\vec{v} \neq \vec{0}$ , ii) $\vec{v}$ // y΄y και $\vec{v} \neq \vec{0}$ .

---

**10.** Δίνονται τα σημεία Α(1 , 3) , Β(- 2 , - 5) και Γ( 1 , 7) .

α) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{AB}+\vec{A\Gamma}$ .

β) Να βρείτε σημείο Η του άξονα x΄x ώστε το τρίγωνο ΑΒΗ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Η .

---

**11.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 5 , - 2\lambda )$ , $\vec{\beta} = ( - 2 , 1 )$ όπου $\lambda \in \Re$ .

α) Να βρείτε το λ ώστε $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ .

β) Για ποια τιμή του λ τα $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα ;

γ) Για ποια τιμή του λ τα $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα ;

---

**12.** Να βρεθεί ο $\kappa \in \Re$ ώστε τα σημεία Α(κ , κ – 1) , Β(- 1 , 3) , Γ(2κ , 6) να είναι συνευθειακά .

---

**13.** Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = ( \sqrt{12} , \kappa^2 + 2)$ , όπου $\kappa \in \Re$ .

α) Να βρείτε το κ ώστε το $\vec{\alpha}$ να σχηματίζει γωνία $60^o$ με τον άξονα x΄x .

β) Για τις τιμές του κ που βρήκατε στο (α) ερώτημα , να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\beta} = ( \sqrt{75} , 15)$ είναι παράλληλο προς το $\vec{\alpha}$ .

---

**14.** Για ποιες τιμές του $\lambda \in \Re$ τα σημεία Α(1 , 2), Β(4 , 3), Γ(6 , - 1), Δ(λ , 2λ – 1) είναι κορυφές τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ) ;

---

**15.** Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x, ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα σημεία Α(1 , 2) και Β(3 , 4) να είναι ελάχιστο .

---

**16.** Έστω ΑΒΓ ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2 . Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ,να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα : $\vec{A\Delta}\cdot\vec{A\Gamma}$ , $\vec{A\Delta}\cdot\vec{BA}$ , $\vec{A\Delta}\cdot\vec{B\Gamma}$ , $\vec{\Gamma\Delta}\cdot\vec{A\Gamma}$ , $\vec{A\Gamma}\cdot\vec{AB}$ .

---

**17.** Έστω $\vec{\alpha} = ( \kappa - 1 , - 2 )$ και $\vec{\beta} = ( - 4 , 10 )$ . Να βρείτε τον $\kappa \in \Re$ , στις επόμενες περιπτώσεις : i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 20$ ,   ii) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ .

---

**18.** Αν $\vec{\alpha} = (0 , - \sqrt{2} )$ και $\vec{\beta} = ( 1 , - 1 )$ , να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ,   β) το $( 3\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$ ,   γ) την γωνία των $\vec{\alpha}$ , $\vec{\beta}$ .

---

**19.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$   β) $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$   γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2$   δ) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$   ε) $(2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(4\vec{\alpha} - 5\vec{\beta})$.

---

**20.** Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

---

**21.** Αν $|\vec{\alpha}| = 5$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = 53^o$, να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = -3\vec{\alpha}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$. Δίνονται: συν$53^o = \frac{3}{5}$ και συν$37^o = \frac{4}{5}$ .

---

**22.** Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \neq 0$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$ τότε :

α) να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\frac{1}{2} \cdot |\vec{\alpha}|^2$ ,

β) να δείξετε ότι η $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ είναι αμβλεία ,

γ) να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

---

**23.** Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - \sqrt{3}\,\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ , να υπολογίσετε :

α) το $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ , β) τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$ .

---

**24.** Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = 1$ , $|\vec{\beta}| = 2$ , $|\vec{\gamma}| = 3$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}$ .

---

**25.** Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ , $|\vec{\beta}| = 5$ , $|\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -20$ , να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά .

---

**26.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{4}$ να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

---

**27.** Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$, δείξτε ότι: $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}| = 1$.

---

**28.** Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{u} = (-2, 6)$ σαν γραμ. συνδυασμός των $\vec{v} = (2, -1)$ και $\vec{w} = (3, 1)$.

---

**29.** Θεωρούμε τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

α) Αποδείξτε ότι: $|\vec{\alpha}| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ .

β) Αν $|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = 5$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = \sqrt{13}$ , να βρείτε τα $|\vec{\alpha}|$ , $|\vec{\beta}|$ .

---

**30.** Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \dfrac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$ ,

τέτοιο ώστε: $\vec{x} \,//\, (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha} + \vec{x})$ .

---

**31.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}$ με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ , τέτοια ώστε $\vec{\alpha} + \vec{x} = \text{προβ}_{\vec{\beta}}\, \vec{x}$ .

Αποδείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ .

---

**32.** Θεωρούμε τα διανύσματα:

$\vec{\alpha}$ = (συνx, ημx), $\vec{\beta}$ = (συν2x, ημ2x) και $\vec{\gamma}$ = (συν3x, ημ3x), x ∈ R.

Αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

---

**33.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3 , 5)$ , $\vec{\beta} = (2 , -1)$ .

α) Να βρείτε την $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\, \vec{\beta}$ .

β) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο συνιστώσες , μία παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και μία κάθετη προς αυτό .

---

**34.** α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1 , 2)$ , $\vec{\beta} = (3 , 4)$ , $\vec{\gamma} = (1 , -1)$ . Δείξτε ότι : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ .

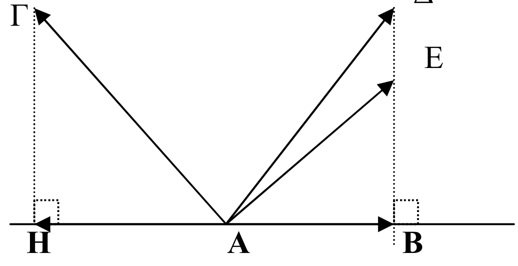
β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά με $\vec{\gamma} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$ , να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ .

---

**35.** Για το διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$S = \vec{A\Delta} \cdot \vec{AB} + \vec{AE} \cdot \vec{AB} + \vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB}$ ,

αν είναι γνωστό ότι ΑΒ = 2 και ΑΗ = 3 .




---

**36.** Αν $\vec{\alpha} = (1\ ,\ 2)$ , $\vec{\beta} = (3\ ,\ 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως : $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$ , $\vec{p} \,//\, \vec{\alpha}$ , $\vec{q} \perp \vec{\beta}$ .

---

**37.** Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\beta}.\vec{x}}{\vec{\beta}^2}.\vec{\beta} - \vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ .

---

**38.** Αν $\vec{x} + (\vec{x}\,.\,\vec{\alpha}).\vec{\beta} = \vec{\gamma}$ με $1 + \vec{\alpha}\,\vec{\beta} \neq 0$ να αποδείξετε ότι $\vec{x}\,.\,\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{\alpha}.\vec{\gamma}}{1 + \vec{\alpha}.\vec{\beta}}$ .

---

**39.** Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 5$, $|\vec{\beta}| = 8$ και $(\vec{\alpha}\ ,\ \vec{\beta}) = \dfrac{\pi}{3}$ να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία της γωνίας.

---

**40.** Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα και είναι κάθετα να αποδείξετε ότι τότε και τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

---

**41.** Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α να αποδείξετε ότι ισχύει:
$\overrightarrow{AB}^{\,2} + \overrightarrow{A\Gamma}^{\,2} = \overrightarrow{B\Gamma}^{\,2}$ και αντιστρόφως:
Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\overrightarrow{AB}^{\,2} + \overrightarrow{A\Gamma}^{\,2} = \overrightarrow{B\Gamma}^{\,2}$ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.

---

**42.** Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι:

α) $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 = 2\,|\overrightarrow{AM}|^2 + \dfrac{|\overrightarrow{B\Gamma}|^2}{2}$ β) $|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{A\Gamma}|^2 = 2\,\overrightarrow{\Delta M}\ \overrightarrow{\Gamma B}$,

όπου Δ η προβολή του Α στη ΒΓ.

---