ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
(ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ)

1. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, να αποδείξετε ότι και τα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ δεν είναι επίσης συγγραμμικά.

---

2. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, να βρεθεί ο $\lambda \in R$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} - (\lambda + 1)\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

---

3. Αν Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\kappa \in R$ ώστε να είναι $\vec{A\Delta} = \kappa \vec{AB} + (1-\kappa)\ \vec{A\Gamma}$.

---

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,-2)$, $\vec{\beta} = (3,4)$ και $\vec{\gamma} = (\frac{5}{2}, 10)$.

   i) Να αποδείξετε ότι ανά δύο δεν είναι συγγραμμικά.

   ii) Να αναλύσετε το $\vec{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες κατά την διεύθυνση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αντίστοιχα.

---

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-\frac{1}{2}, 6)$, $\vec{\beta} = (\frac{5}{2}, -1)$. Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

---

6. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{v} = (3,5)$ σε δύο συνιστώσες, μιας παράλληλης προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}\,(1,2)$ και μιας κάθετης προς αυτό.

---

7. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να βρείτε:

   i) την τιμή της παράστασης $A = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$ και

   ii) την γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

---

8. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}\cdot\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

---

9. Δίνονται τα σημεία Α(-1,0) και Β(1,0). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, για τα οποία ισχύει $\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = 4\vec{MA}\cdot\vec{MB}$.

---

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$.

i) Να κατασκευασθούν τα διανύσματα $\vec{O\Gamma} = 12\vec{\alpha}$, $\vec{OE} = 6\vec{\beta}$ και $\vec{O\Delta} = 4\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$.

ii) Να εκφραστούν τα διανύσματα $\vec{\Gamma\Delta}$ και $\vec{\Delta E}$ σαν γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

iii) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Γ,Δ,Ε είναι συνευθειακά.

---

11. Δίνονται τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$. Κατασκευάζουμε τα διανύσματα $\vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ και $\vec{OE} = \frac{1}{3}\vec{OA}$. Οι ΟΔ και ΒΕ τέμνονται στο Μ.

Αν $\vec{OM} = \kappa\vec{O\Delta}$ και $\vec{BM} = \lambda\vec{BE}$, να βρεθούν οι τιμές των κ , λ και να εκφραστεί το διάνυσμα $\vec{AM}$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

---

12. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = \sqrt{7}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -2$. να υπολογιστούν οι τιμές του $x \in R$, ώστε τα διανύσματα $x\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - x\cdot\vec{\beta}$ να είναι μεταξύ τους κάθετα.

---

13. Αν τα $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά , να αποδείξετε ότι:

i) Τα διανύσματα $\vec{x} = |\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta} + |\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha}$ και $\vec{y} = |\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha} - |\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

ii)Το διάνυσμα $\vec{w} = (\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})\cdot\vec{\beta} - (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

---

14. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ τρία μη μηδενικά διανύσματα, να αποδειχθούν οι παρακάτω συνεπαγωγές.

i) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = 2 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

ii) $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} = -2 \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$

iii) $\vec{\alpha} \perp (\vec{\beta} - \vec{\gamma})$ και $\vec{\beta} \perp (\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) \Rightarrow \vec{\gamma} \perp (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

---

15. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου του ισχύει $\vec{MB} + \vec{M\Delta} - \vec{M\Gamma} = \vec{MA}$

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει :

$\vec{MB} \cdot \vec{M\Gamma} + \vec{M\Delta} \cdot \vec{M\Gamma} - \vec{M\Gamma}^2 = 0$.

---

16. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με (ΑΒ)= 2α . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

---

17. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με (ΑΒ)= 2α . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \lambda$, όπου $\lambda > 0$.

---

18. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ΓΕ $\perp$ ΑΒ, ΓΖ $\perp$ ΒΔ. Να αποδείξετε

$\vec{B\Delta} \cdot \vec{BZ} + \vec{AB} \cdot \vec{BE} = \vec{B\Gamma}^2$.

---

19. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ.

i) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Δ του επιπέδου του τριγώνου για το οποίο ισχύει: $3\vec{\Delta B} - 5\vec{\Delta\Gamma} = \vec{0}$.

ii) Δείξτε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου ισχύει: $3\vec{MB} - 5\vec{M\Gamma} = 2\vec{\Delta M}$.

iii) Βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου του τριγώνου που ικανοποιούν τη σχέση: $\vec{MA}(3\vec{MB} - 5\vec{M\Gamma}) = 0$.

---

20. Δίνονται τα σταθερά σημεία Ο, Α και το σταθερό και μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{u}$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία είναι $\vec{OM} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{u}, \lambda \in \Re^*$.

---

21. Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς δίνονται τα σημεία Α(0,2), Β(2,2) και $\Gamma(3+\sqrt{3},\ 3+\sqrt{3})$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
