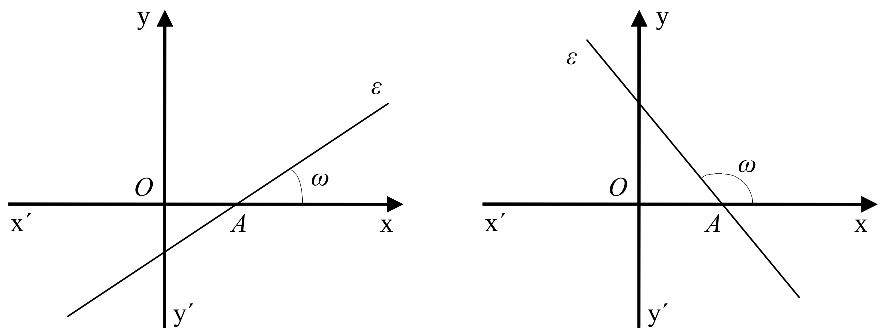
ΕΥΘΕΙΑ

Γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A.



Τη γωνία ω που διαγράφει ο άξονας $x'x$ όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη *θετική φορά* μέχρι να συμπέσει με την ευθεία ε τη λέμε ***γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$***.
Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, τότε λέμε ότι σχηματίζει με αυτόν γωνία $\boldsymbol{\omega = 0}$.
Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ω ισχύει $\mathbf{0^0} \le \omega < \mathbf{180^0}$ ή σε ακτίνια $\mathbf{0} \le \omega < \pi$.

Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας ε

Ως **συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.

- Προφανώς ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας είναι **θετικός,** αν η γωνία ω που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ είναι **οξεία** και **αρνητικός,** αν είναι **αμβλεία.**

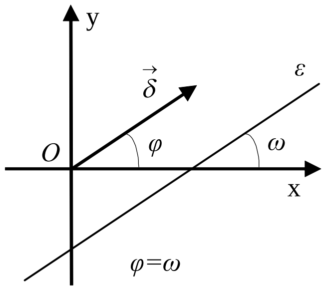
- Αν η ευθεία σχηματίζει με τον $x'x$ μηδενική γωνία, δηλαδή είναι ***παράλληλη στον άξονα*** $x'x$**,** ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ίσος με μηδέν.

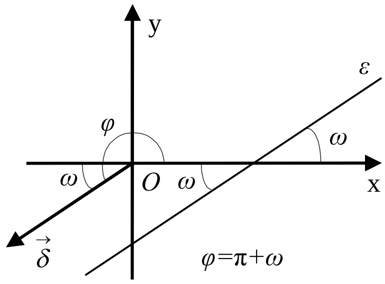
- Στην περίπτωση που η γωνία της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$ είναι 90^0, δηλαδή η ευθεία ε είναι ***κάθετη στον άξονα*** $x'x$**,** δεν ορίζουμε συντελεστή διεύθυνσης για την ευθεία αυτή.

- Ο **συντελεστής διεύθυνσης** λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, με $x_1 \neq x_2$ είναι: $\boldsymbol{\lambda = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$.

- Έστω τώρα ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ παράλληλο σε μια ευθεία ε. Αν φ και ω είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το $\vec{\delta}$ και η ε με τον $x'x$ αντιστοίχως, τότε θα ισχύει $\varphi = \omega$ ή $\varphi = \pi + \omega$ και επομένως $\text{εφ}\varphi = \text{εφ}\omega$. Άρα:

"Όταν μια ευθεία και ένα διάνυσμα είναι παράλληλα, έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης".





Συνθήκες Καθετότητας και Παραλληλίας Ευθειών

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, τότε:

$$\boxed{\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2} \quad \text{και} \quad \boxed{\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1\lambda_2 = -1}$$

Εξίσωση Ευθείας

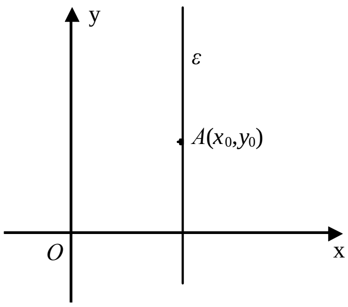
- Έστω *Oxy* ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_0, y_0)$ ένα σημείο του επιπέδου.

Η εξίσωση της ευθείας *ε* που διέρχεται από το *A* και έχει συντελεστή διεύθυνσης *λ* είναι:

$$\boxed{y - y_0 = \lambda(x - x_0)} \qquad (1)$$

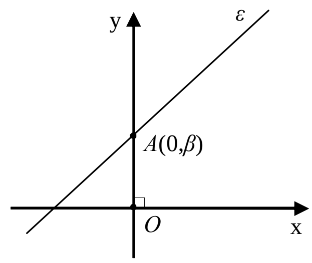
Για ***παράδειγμα***, η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$ έχει εξίσωση $y - 2 = -3(x+1)$, δηλαδή $y = -3x - 1$.

Η εξίσωση (1) δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, όταν ***η ευθεία ε είναι κατακόρυφη***, αφού στην περίπτωση αυτή δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας. Όμως **η εξίσωση μιας κατακόρυφης ευθείας** που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ μπορεί να βρεθεί αμέσως, αφού κάθε σημείο της *M* έχει τετμημένη x_0 και άρα η εξίσωσή της είναι:



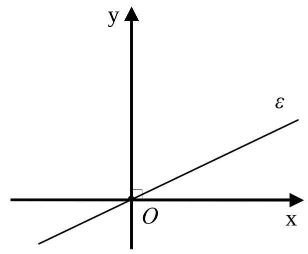
$$\boxed{x = x_0}$$

Ειδικές περιπτώσεις



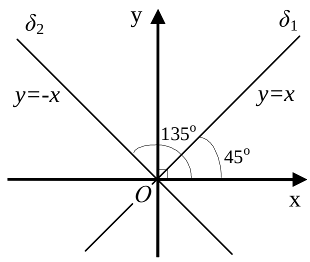
- Η εξίσωση ευθείας που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,\beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι $\mathbf{y-\beta=\lambda(x-0)}$, η οποία τελικά γράφεται

$$\boldsymbol{y=\lambda x+\beta}.$$

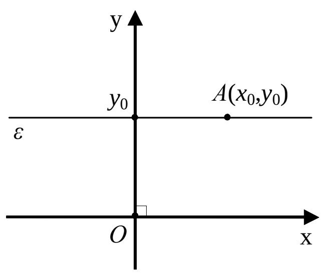


- Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ, τότε η εξίσωσή της είναι $y-0=\lambda(x-0)$ ή

$$\boldsymbol{y=\lambda x}.$$



Οι διχοτόμοι των γωνιών $x\hat{O}y$ και $y\hat{O}x'$ έχουν εξισώσεις $y=x$ και $y=-x$ αντιστοίχως.



- Τέλος, αν μια ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, δηλαδή είναι όπως λέμε μια οριζόντια ευθεία, έχει εξίσωση της , δηλαδή

$$\boldsymbol{y=y_0}.$$

<u>Γενική μορφή της εξίσωσης της ευθείας</u>

ΘΕΩΡΗΜΑ

> Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής
>
> $$\mathbf{Ax+By+\Gamma=0} \quad \text{με} \quad \mathbf{A\neq 0} \quad \textbf{ή} \quad \mathbf{B\neq 0} \qquad (1)$$
>
> και ***αντιστρόφως,*** κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει ευθεία γραμμή.

— **Αν** $\mathbf{B\neq 0}$, τότε η ευθεία έχει **συντελεστή διεύθυνσης** $\lambda=-\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ και τέμνει τον άξονα yy' στο σημείο $\left(0,-\dfrac{\Gamma}{B}\right)$.

— **Αν** $\mathbf{B=0}$, τότε, λόγω της υπόθεσης, είναι $\mathbf{A\neq 0}$ και η εξίσωση γράφεται $\mathbf{x=-\dfrac{\Gamma}{A}}$, που είναι εξίσωση ευθείας κάθετης στον άξονα $x'x$ στο σημείο του $P\left(-\dfrac{\Gamma}{A},0\right)$.

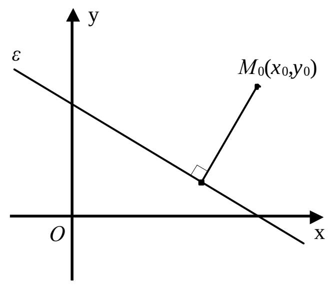
Διάνυσμα Παράλληλο ή Κάθετο σε Ευθεία

Η ευθεία με εξίσωση $\boldsymbol{Ax + By + \Gamma = 0}$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{(B,-A)}$.

Η ευθεία με εξίσωση $\boldsymbol{Ax + By + \Gamma = 0}$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{(A,B)}$.

Απόσταση Σημείου από Ευθεία

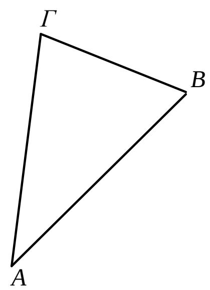
Έστω ε μια ευθεία του καρτεσιανού επιπέδου, με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ και $M_0(x_0, y_0)$ ένα σημείο εκτός αυτής. Η απόσταση $d(M_0, \varepsilon)$ του σημείου M_0 από την ευθεία ε είναι:



$$\boxed{\mathbf{d(M_0,\varepsilon) = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + \Gamma\,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}}$$

Υπολογισμός Εμβαδού

Έστω, Α,Β,Γ τρία σημεία του καρτεσιανού επιπέδου. Το εμβαδόν του τριγώνου *ΑΒΓ* είναι:



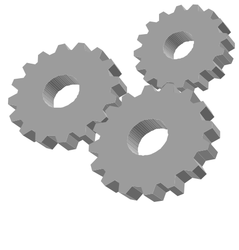
$$\boxed{\mathbf{(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\,|\,det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})\,|}}.$$

Απόσταση δύο παράλληλων ευθειών

Αν **ε_1: y=λx+β_1** και **ε_2: y=λx+β_2** είναι δύο παράλληλες ευθείες τότε η απόσταση τους είναι:

$$d(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}$$

…………………………………………………………………………………………….......



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα x΄x.	**Σ**	**Λ**
2. Οι ευθείες y = 3x + 1 και 3x - y = 4 τέμνονται.	**Σ**	**Λ**
3. Οι ευθείες $y = -\frac{\kappa}{3}x + 1$ και y = - λx + 2 είναι παράλληλες. Ισχύει κ = 3λ.	**Σ**	**Λ**
4. Οι ευθείες y = 2x + 1 και 4x - 2y + 5 = 0 είναι παράλληλες.	**Σ**	**Λ**
5. Οι ευθείες y = 2 και y = 2x είναι παράλληλες.	**Σ**	**Λ**
6. Οι ευθείες 5x + y = 1 και x - 5y - 1 = 0 είναι κάθετες.	**Σ**	**Λ**
7. Τα σημεία Α (- 2, - 1), Β (1, 4) και Γ (- 4, 2) είναι συνευθειακά.	**Σ**	**Λ**
8. Από το σημείο Α(x_0, y_0) περνά μία μόνο ευθεία με δεδομένο συντελεστή διεύθυνσης λ.	**Σ**	**Λ**
9. Η ευθεία που περνά από το σημείο (1, 2) και είναι παράλληλη προς την ευθεία y = - 3x + 4, έχει εξίσωση y - 2 = - 3 (x - 1)	**Σ**	**Λ**
10. Η ευθεία $\frac{x}{\beta} + \frac{y}{\alpha} = 1$,α, β ≠ 0 τέμνει τους άξονες στα σημεία Α(α, 0) και Β(0, β)	**Σ**	**Λ**
11. Η ευθεία 2y - 3x + 4 = 0 τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο ($\frac{4}{3}$, 0).	**Σ**	**Λ**
12. Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία x + y = 0 με τον άξονα x΄x είναι 45°.	**Σ**	**Λ**
13. Η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $3x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ με τον άξονα x΄x είναι 120°.	**Σ**	**Λ**
14. Κάθε εξίσωση ευθείας μπορεί να γραφεί στη μορφή Αx + Βy = 0.	**Σ**	**Λ**
15. Το διάνυσμα $\vec{n}$ =(- 2, 1) είναι κάθετο στην ευθεία x + y + 2 = 0.	**Σ**	**Λ**
16. Όλα τα διανύσματα με κοινό φορέα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.	**Σ**	**Λ**

17. Η ευθεία $y = κ^2x + 1$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x για κάθε $κ \neq 0$.	**Σ**	**Λ**
18. Η απόσταση των ευθειών $ε_1$: $y = λx + β_1$ και $ε_2$: $y = λx + β_2$ δίνεται από τον τύπο $d(ε_1, ε_2) = \dfrac{\lvert β_1 - β_2 \rvert}{\sqrt{1 + λ^2}}$	**Σ**	**Λ**
19. Η εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ευθεία ε΄ : $x + 3 = 0$ και περνά από το σημείο (3, 2), είναι $y = 3$.	**Σ**	**Λ**
20. Αν οι ευθείες $(μ + 1)x - y = 0$ και $3x + y - 7 = 0$ είναι παράλληλες, τότε $μ = 2$.	**Σ**	**Λ**
21. Οι ευθείες $ε_1$: $7x + 3y + 2 = 0$ και $ε_2$: $2x + 5y - 3 = 0$ είναι κάθετες.	**Σ**	**Λ**
22. Η απόσταση των παράλληλων ευθειών $y = x$ και $y = x + 1$ είναι 1.	**Σ**	**Λ**
23. Η εξίσωση $y = x + β$ με $β \in R$ παριστάνει οικογένεια ευθειών παράλληλων προς την ευθεία $y = x$.	**Σ**	**Λ**
24. Η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές Α (5, 1), Β (6, 3) και Γ (2, 2) είναι $y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 2)$.	**Σ**	**Λ**
25. Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από την ευθεία $2x + 5y = 10$ και τους άξονες x΄x και y΄y, είναι 5 τ.μ.	**Σ**	**Λ**
26. Η εξίσωση $x = y$ για $x \geq 0$ παριστάνει μια ημιευθεία.	**Σ**	**Λ**
27. Η εξίσωση $y = \lvert x \rvert$ παριστάνει μία μόνο ημιευθεία.	**Σ**	**Λ**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛ/ΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που είναι παράλληλη με τον y΄y ισούται με

Α. 1 **Β.** - 1 **Γ.** 0 **Δ.** εφ $\frac{\pi}{4}$ **Ε.** δεν ορίζεται.

---

2. Ο συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας (ε), που διέρχεται από τα σημεία Α (x_1, y_1) και Β(x_2, y_2) ορίζεται πάντα όταν

Α. $y_1 \neq y_2$ **Β.** $x_1 = x_2$ και $y_1 \neq y_2$ **Γ.** $x_1 \neq - x_2$ και $y_1 \neq y_2$

Δ. $y_1 = y_2$ και $x_1 = x_2$ **Ε.** $x_1 \neq x_2$.

---

3. Οι ευθείες $x + 2y + 1 = 0$ και $2x + \lambda y - 2 = 0$

Α. τέμνονται για κάθε $\lambda \in R$ **Β.** είναι και οι δύο κάθετες στην $y = - x$

Γ. είναι κάθετες μεταξύ τους για $\lambda = - 1$ **Δ.** είναι παράλληλες για $\lambda = 2$

Ε. τέμνονται στο σημείο (- 1, 0) για $\lambda = 2$.

---

4. Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (- 2, 3)$ είναι κάθετο στην ευθεία

Α. $2x - 3y + 1 = 0$ **Β.** $2x + 3y + 1 = 0$ **Γ.** $3x + 2y + 1 = 0$

Δ. $3x - 2y + 1 = 0$ **Ε.** $3x - 2y - 1 = 0$.

---

5. Η εξίσωση της ευθείας ΑΒ με Α (1998, 0), Β (0, 1998) είναι

Α. $1998x - 1998y = 0$ **Β.** $1998y + 1998x = 1$ **Γ.** $\frac{x}{1998} + \frac{y}{1998} = 1$

Δ. $1998x - 1998y = 1$ **Ε.** $y = 1998x + 1998$.

---

6. Στο καρτεσιανό επίπεδο η εξίσωση $y^2 = x^2$ παριστάνει

Α. μια ευθεία κάθετη στον x΄x **Β.** τη διχοτόμο της γωνίας xOy

Γ. τη διχοτόμο της γωνίας yOx΄ **Δ.** τις διχοτόμους των γωνιών xOy και yOx΄

Ε. μια ευθεία κάθετη στον y΄y.

---

7. Αν Α (1, 3) και Β (5, 3), το συμμετρικό του μέσου του ΑΒ ως προς τον άξονα x΄x είναι το **Α.** (2, 3) **Β.** (2 ,- 3) **Γ.** (3, - 3) **Δ.** (- 3, 3) **Ε.** (- 3, - 3).

---

8. Δίνονται τα σημεία Α (0, 4) και Β (4, 0). Ο συντελεστής διεύθυνσης της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΟΑΒ είναι (Ο το σημείο τομής των x΄x, y΄y)

Α. 4 **Β.** 2 **Γ.** 0 **Δ.** - 2 **Ε.** – 4.

---

9. Τα σημεία Α (1, 1), Β (3, 3) και Γ (5, κ) είναι συνευθειακά. Η τιμή του κ είναι

Α. - 4 **Β.** 3 **Γ.** 1 **Δ.** 5 **Ε.** – 1.

---

10. Το σημείο Μ $(0, -\frac{9}{2})$ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ με Α (- 1, - 5).

Το σημείο Β είναι το

Α. (0, - 5) **Β.** $(-1, -\frac{19}{2})$ **Γ.** (- 1, 4) **Δ.** (1, - 4) **Ε.** $(-\frac{1}{2}, -\frac{19}{2})$.

---

11. Δίνεται ευθεία (ε): - 3x + 2y + 1 = 0 και το σημείο Μ (1, - 2). Τότε η απόσταση του Μ από την (ε) είναι

Α. $-\frac{6}{\sqrt{13}}$ **Β.** $\frac{6}{13}$ **Γ.** $-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{13}}$ **Δ.** $\frac{6}{\sqrt{13}}$ **Ε.** $\frac{\sqrt{6}}{13}$.

---

12. Τα σημεία Ο (0, 0), Α (κ, 0), Β (0, λ) με κ, λ. > 0 ορίζουν τρίγωνο με εμβαδόν:

Α. 2κλ **Β.** $\frac{1}{2}(\kappa+\lambda)\kappa$ **Γ.** κλ

Δ. $\frac{1}{2}(\kappa-\lambda)(\kappa+\lambda)$ **Ε.** $\frac{1}{2}\kappa\lambda$.

---

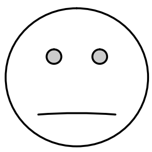
13. Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές Α (0, 0), Β (α, 0) και Γ (α, β) είναι:

Α. $\frac{\alpha\beta}{2}$ **Β.** $\frac{\alpha|\beta|}{2}$ **Γ.** αβ **Δ.** $\frac{|\alpha\beta|}{2}$ **Ε.** $\frac{|\alpha|\beta}{2}$.

---

14. Οι ευθείες y = 2 και $y = \sqrt{3}x - 1$ σχηματίζουν μεταξύ τους οξεία γωνία ίση με:

Α. 30° **Β.** 60° **Γ.** 45° **Δ.** 75° **Ε.** 15°.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α (3, - 2) και:

α) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(2, -5)$

β) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(0, 3)$

γ) είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}=(-2, 0)$

δ) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(2, 1)$

ε) είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=(0, -2)$

στ) σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega = 135°$.

---

2. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: $3x + 4y - 11 = 0$ και $2x - 3y + 21 = 0$ και είναι:

α) παράλληλη προς την ευθεία $x + 2y + 1 = 0$

β) κάθετη προς την ευθεία $3x - y + 5 = 0$

γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ) παράλληλη στον άξονα x΄x

ε) παράλληλη στον άξονα y΄y

στ) παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων

ζ) παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων.

---

3. Έστω η ευθεία ε η οποία διέρχεται από τα σημεία Α(2 , μ) , Β(5 , 2μ) , όπου $\mu \in \Re$.
Να βρείτε το μ ώστε η ε :

α) να σχηματίζει γωνία 135^o με τον x΄x .

β) να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = (6 , 10)$.

γ) να είναι παράλληλη στην ευθεία ζ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\zeta = -2$.

δ) να είναι κάθετη στην ευθεία ξ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\xi = \frac{1}{9}$.

---

4. Θεωρούμε την ευθεία ε : $-5x + 2y + 4 = 0$. Να βρείτε :

α) την εξίσωση της συμμετρικής της ε ως προς τον άξονα x΄x ,

β) την εξίσωση της συμμετρικής της ε ως προς τον άξονα y΄y ,

γ) την εξίσωση της συμμετρικής της ε ως προς την αρχή Ο(0 , 0)

δ) την εξίσωση της συμμετρικής της ε ως προς την ευθεία $y = x$.

---

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (- 5 , 4), Β (2 , 3) και Γ (- 3 , - 2). Να βρεθούν :

α) οι εξισώσεις δύο υψών του ,

β) οι εξισώσεις δύο διαμέσων του ,

γ) οι συντεταγμένες του ορθόκεντρου Η του ΑΒΓ ,

δ) οι συντεταγμένες του βαρύκεντρου Θ του ΑΒΓ .

---

6. Δίνονται τα σημεία Α(4 , 3) , Β(0 , 1) , Γ(- 2 , 5) .
α) Αποδείξτε ότι τα Α , Β , Γ είναι κορυφές τριγώνου .
β) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο .

---

7. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $x + y = 1$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Ρ (2, 3) ως προς άξονα συμμετρίας την (ε).

---

8. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών ε_1: $y = \frac{\lambda}{2}x - \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 : y = \frac{3}{2}x - \frac{\mu}{4}$ για τις διάφορες τιμές των $\lambda , \mu \in \Re$.

---

9. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $y = - x + 1$.
α) Να βρείτε τον $\mu \in \Re$ ώστε το σημείο Ζ(μ+1 , μ+4) να ανήκει στην ε .
β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Ρ (2, 3) ως προς άξονα συμμετρίας την ε .
γ) Να βρείτε τη συμμετρική της ευθείας ζ : $y = 3x +5$ ως προς άξονα συμμετρίας την ε .

---

10. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία ε: $2x - 3y - 12 = 0$ και οι οποίες ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 12 τ.μ.

---

11. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: Α(- 8, 2), Β(7, 4) και Η(5, 2) το ορθόκεντρό του. Να βρείτε:
α) την εξίσωση της πλευράς ΒΓ
β) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
γ) τις εξισώσεις των πλευρών του.

---

12. Αποδείξτε ότι οι ευθείες ε_1: $2x + y + 2 = 0$, $\varepsilon_2 : x + y + 1 = 0$, $\varepsilon_3 : 5x - y + 5 = 0$ συντρέχουν σε σημείο Ρ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του Ρ .

---

13. Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda^2 - 4)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + \lambda = 0$ (1) , όπου $\lambda \in \Re$.
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (1) παριστάνει ευθεία // x΄x .
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (1) παριστάνει ευθεία // y΄y .
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (1) παριστάνει ευθεία .

---

14. Θεωρούμε την εξίσωση : $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + 6\lambda - 6 = 0$ (1) , $\lambda \in \Re$.
α) Αποδείξτε ότι για κάθε $\lambda \neq 1$ η (1) παριστάνει ευθεία .
β) Να εξετάσετε αν οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από σταθερό σημείο . (Αν διέρχονται από σταθερό σημείο να βρείτε και τις συντεταγμένες του).

---

15. Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda^2 + \lambda - 3)x - (\lambda^2 + \lambda - 2)y - 5\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0$ (1)
Για ποιες τιμές του $\lambda \in R$ η (1) παριστάνει ευθεία;
Να εξετάσετε αν οι ευθείες τη (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.

---

16. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση : $x\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2} + y\eta\mu^2\frac{\theta}{2} + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0$, $\theta \in [0, \pi]$ παριστάνει ευθεία , η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο.

---

17. Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ του οποίου οι τρεις κορυφές είναι τα σημεία Α(- 2 , 3) , Β(4 , - 5) , Γ(- 3 , 1) .

---

18. Για ποιες τιμές των λ , $\mu \in \Re$ οι ευθείες

ε_1: $(\mu + 1)x - 2\mu y = \lambda$ και ε_2: $(\mu - 1)x - 3y = 2\lambda - 1$:

α) τέμνονται ,
β) είναι παράλληλες (χωρίς να συμπίπτουν) ,
γ) συμπίπτουν.

---

19. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $x + y + 1 = 0$ και ε_2 : $2x + 2y + 3 = 0$.

α) Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ε_1 , ε_2 .
γ) Να βρείτε την απόσταση των ε_1 , ε_2 .

---

20. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών:

α) ε_1: $3x - y + 1 = 0$ και ε_2: $-6x + 2y - 3 = 0$
β) ε_1: $x = 4$ και ε_2: $x = -6$
γ) ε_1: $y = x$ και ε_2: $y = x - 3$.

---

21. Οι εξισώσεις των πλευρών τριγώνου είναι: $3x + 4y - 7 = 0$, $x + y + 2 = 0$ και $2x + 3y - 5 = 0$. Ζητούνται:

α) οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου
β) το εμβαδόν του.

---

22. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ παριστάνει ζεύγος δύο ευθειών. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών που βρήκατε;

---

23. Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι εξισώσεις :

α) $(x - 3y)(x + 3y) = 0$ β) $|3x| - |y| = 0$ γ) $x^{2003} \cdot y^{2004} = 0$
δ) $6x^2 + yx - 2y^2 = 0$ ε) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$.

---

24. Δίνονται τα σημεία Α (2, 1), Β (6, 4) και Γ $(\frac{9}{2}, 6)$.

α) Να δειχθεί ότι η γωνία ΑΒΓ είναι ορθή.
β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Δ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
γ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

---

25. Δίνονται τα σημεία Α (1, 4) και Β (- 1, - 5).

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

β) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΑΒ.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου ευθείας του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΒ.

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής τους με την ευθεία ΑΒ.

---

26. Έστω τα σημεία Α(1 , 1) , Β(5 , 5) και η ευθεία ε : $x - 2y - 1 = 0$. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας ε , ώστε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ να είναι 4 .

---

27. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $x + \sqrt{3}\,y + 1 = 0$ και ε_2 : $\sqrt{3}\,x + y + 5 = 0$.

α) Αποδείξτε ότι οι ε_1 , ε_2 τέμνονται .

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ε_1 , ε_2 .

---

28. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών ε_1: $3x - y + 1 = 0$ και ε_2 : $4x + 2y + 7 = 0$.

---

29. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων, τα οποία ισαπέχουν από τις ευθείες $3x - 2y + 4 = 0$ και $3x - 2y + 6 = 0$.

---

30. Οι συντεταγμένες δύο πλοίων $Π_1$, $Π_2$ είναι $Π_1$ (t - 1, t + 2) και $Π_2$ (3t, 3t - 1) για κάθε χρονική στιγμή t ($t \geq 0$).

α) Να βρεθούν οι γραμμές πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο πλοία.

β) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του t που τα δύο πλοία θα συναντηθούν.

γ) Να βρεθεί η απόσταση των δύο πλοίων τη χρονική στιγμή t = 3.

---

31. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ (λ - 1, 2λ + 3) , $\lambda \in \Re$.

---

32. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει :

$\dfrac{d(M,\varepsilon_1)}{d(M,\varepsilon_2)} = 2$, όπου ε_1: $x - 2y = 0$ και ε_2 : $x + 2y = 0$.

---

33. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει : (ΜΑΒ) = 2 , όπου Α(- 5 , 0) και Β(3 , 1) .

---

34. Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Δίνεται η κορυφή Α(1 , 1) , η εξίσωση της διαμέσου μ_γ : $y = -x + 1$ και του ύψους υ_β : $y = 2$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β , Γ .
