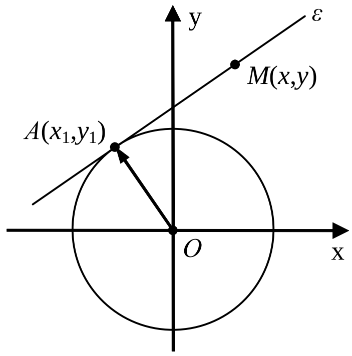
ΚΥΚΛΟΣ

Εξίσωση Κύκλου

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση

$$\boxed{\mathbf{x^2 + y^2 = \rho^2}}$$

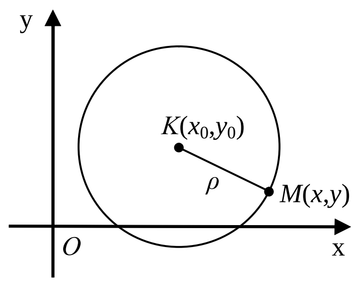


Εφαπτομένη Κύκλου

Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=\rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

$$\boxed{\mathbf{xx_1 + yy_1 = \rho^2}}$$

Η Εξίσωση $\boldsymbol{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0}$



Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και C,
ο κύκλος με κέντρο $K(x_0,y_0)$ **και ακτίνα** ρ **έχει εξίσωση:**

$$\boxed{\mathbf{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2}}$$

Η εξίσωση αυτή παίρνει τη μορφή

$$\boxed{\boldsymbol{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0}} \quad , \quad (1)$$

όπου: $A=-2x_0$, $B=-2y_0$ και $\Gamma = x_0^2+y_0^2-\rho^2$.

Όταν δίνεται μια εξίσωση της μορφής (1) τότε:

— Αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma>0$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα

$$\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}.$$

— Αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma=0$, η εξίσωση παριστάνει ένα μόνο σημείο, το $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$.

— Αν $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2-4\Gamma<0$, η εξίσωση είναι αδύνατη, δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x,y)$ των οποίων οι συντεταγμένες να την επαληθεύουν.

Άρα:

Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής $\mathbf{x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0}$, με $\mathbf{A^2+B^2-4\Gamma>0}$ (Ι) και ***αντιστρόφως*** κάθε εξίσωση της μορφής (Ι) παριστάνει κύκλο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + κx + λy = 0$ με $κ, λ \neq 0$ παριστάνει πάντα κύκλο.	**Σ**	**Λ**
2. Ο κύκλος με κέντρο Κ $(1, -1)$ που περνά από το σημείο $(-1, 1)$, έχει πάντα εξίσωση: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$.	**Σ**	**Λ**
3. Το σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ με τετμημένη 2 βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x$.	**Σ**	**Λ**
4. Οι κύκλοι $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$ και $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 10$ εφάπτονται εξωτερικά	**Σ**	**Λ**
5. Ο κύκλος $(x + 1)^2 + y^2 = 18$ τέμνει την ευθεία $y = x + 1$.	**Σ**	**Λ**
6. Η καμπύλη που παριστάνει η εξίσωση $x^2 + y^2 = α^2$, είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.	**Σ**	**Λ**
7. Η σχέση $y = \sqrt{α^2 - x^2}$, $(-α \leq x \leq α)$ είναι τύπος συνάρτησης που παριστάνει ημικύκλιο.	**Σ**	**Λ**
8. Τα σημεία $(-2, 2)$ και $(4, 2)$ του κύκλου $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ είναι αντιδιαμετρικά.	**Σ**	**Λ**
9. Οι κύκλοι $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 1 = 0$ και $x^2 + y^2 + 2x + 3y + \sqrt{2} = 0$ είναι ομόκεντροι.	**Σ**	**Λ**
10. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + α(x + y + 1) = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε θετικό α.	**Σ**	**Λ**
11. Οι συντεταγμένες του κέντρου ενός κύκλου επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου.	**Σ**	**Λ**
12. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2=ρ^2$ στο σημείο του (x_1,y_1) έχει συντελεστή διευθύνσεως $-\frac{y_1}{x_1}$	**Σ**	**Λ**
13. Τα κέντρα των κύκλων $C_1: x^2+y^2+αx+βy+γ=0$ και $C_2: x^2+y^2+αx-βy+γ_1=0$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.	**Σ**	**Λ**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛ/ΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Το κέντρο του κύκλου που έχει διάμετρο ΑΒ με Α (1, -3) και Β (7, 5), έχει συντεταγμένες

Α. (4, 4) **Β.** (3, 4) **Γ.** (4, - 4) **Δ.** (4, 1) **Ε.** (4, - 1).

---

2. Το κέντρο του κύκλου $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0$ είναι

Α. (3, - 2) **Β.** (2, - 3) **Γ.** (2, 3) **Δ.** (- 2, 3) **Ε.** (- 3, 2)

---

3. Η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο (- 1, - 1) και διέρχεται από το σημείο (4, - 3), είναι

Α. $x^2 + y^2 = 29$ **Β.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{29}$ **Γ.** $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{29}$

Δ. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 29$ **Ε.** $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 29$.

---

4. Ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο (1, 2) και εφάπτεται στον άξονα των x΄x, έχει εξίσωση

Α. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ **Β.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$ **Γ.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Δ. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$ **Ε.** $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

---

5. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 5$ στο σημείο (2, 1) είναι παράλληλη στην ευθεία

Α. $x - 2y + 1 = 0$ **Β.** $2x + 3y + 7 = 0$ **Γ.** $x + 2y = 4$

Δ. $4x + 2y + 1 = 0$ **Ε.** $y = x$.

---

6. Ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x - 8κy + κ^2 - 2κ + 1 = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η τιμή του κ είναι

Α. 4 **Β.** 3 **Γ.** 2 **Δ.** 1 **Ε.** 0

---

7. Ο κύκλος $(x - α)^2 + (y - β)^2 = ρ^2$ (α, β, ρ θετικοί) εφάπτεται στους δύο θετικούς ημιάξονες Ox, Oy, όταν

Α. $α = β \neq ρ$ **Β.** $α \neq β = ρ$ **Γ.** $α > β$ **Δ.** $α = ρ = β$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα.

---

8. Ο κύκλος που έχει εξίσωση την $(x - α)^2 + (y - α)^2 = α^2$

Α. διέρχεται από το σημείο Α (α, α) **Β.** διέρχεται από το σημείο Α ($\sqrt{α}, \sqrt{α}$)

Γ. έχει το κέντρο του στην $y = x + 1$ **Δ.** έχει το κέντρο του στην ευθεία $y = - x$

Ε. εφάπτεται στους άξονες x΄x και y΄y.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $2\sqrt{2}$.

β) έχει κέντρο το σημείο (3, - 1) και ακτίνα 5.

γ) έχει κέντρο το σημείο (- 2, 1) και διέρχεται από το σημείο (- 2, 3).

δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α (1, 3) και Β (- 3, 5).

ε) διέρχεται από τα σημεία Α(-2, 1), Β(1, 0) και Γ(1,4).

στ) διέρχεται από τα σημεία (3,1), (- 1,3) και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία $y=3x-2$.

ζ) έχει κέντρο το σημείο (8, - 6) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας $3x + y = 10$.

θ) έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο (5, 4).

ι) έχει κέντρο το σημείο (- 3, 2), και εφάπτεται στον y΄y .

ια) έχει κέντρο το σημείο (3, 3) και εφάπτεται των αξόνων x΄x και y΄y.

ιβ) έχει κέντρο το σημείο (- 3, 1) και εφάπτεται στην ευθεία $4x - 3y + 5 = 0$.

ιγ) έχει κέντρο το Κ(3 , - 1) και αποκόπτει από την ευθεία ε : $2x - 5y +18 = 0$ χορδή μήκους 6 .

---

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

α) έχει αντιδιαμετρικά τα σημεία Α(5 , - 2) και Β(- 1 , - 4).

β) διέρχεται από τα σημεία Α(2 , - 6) , Β(1 , 7) και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας ε : $3x + 2y = 0$.

γ) εφάπτεται στις ευθείες ε_1: $2x + 3y - 2 = 0$, ε_2 : $2x + 3y + 4 = 0$ και το ένα από τα δύο σημεία επαφής είναι το Α(1 , - 2) .

---

3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :

α) έχει ακτίνα 5 και διέρχεται από τα σημεία Α(3 , 3) , Β(0 , 2).

β) έχει ακτίνα 10 και εφάπτεται του κύκλου C : $x^2 +y^2 = 25$ στο σημείο Α(- 4 , 3).

---

4. Δίνονται τα σημεία Α (1, 2), Β (2, 4) και Γ (3, 1).

α) Να αποδειχθεί ότι: γωνία ΒΑΓ = 90°

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

---

5. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$.

---

6. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτ/νων του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ που γράφονται από το σημείο (0,6).

---

7. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ και η ευθεία $y = x - 3$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.

---

8. Δίνεται η ευθεία $y = \lambda x$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία:

α) να τέμνει τον κύκλο β) να εφάπτεται του κύκλου

γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

---

9. Δίνεται ο κύκλος C : $x^2 + y^2 = 10$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) το σημείο επαφής είναι το Α(1 , μ) , $\mu > 0$

β) η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Α(0 , 4)

γ) η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία ζ : $y = - x + 13$.

---

10. Δίνεται ο κύκλος C : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) το σημείο επαφής είναι το Α(1 , 3).

β) η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία ζ : $y = 2x + 25$.

---

11. Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι C_1: $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ και C_2: $x^2 - 2x + y^2 = 0$ εφάπτονται εσωτερικά .

---

12. Αποδείξτε ότι καθεμιά από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα :

a) $(3x - 9)^2 + (3y + 15)^2 = 36$ b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

c) $x^2 + y^2 - ax = 0$, $a > 0$ d) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$.

---

13. Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ (x, y) του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα Α, Β, Γ με Α(1, - 1), Β(- 1, 2), Γ(0,2) είναι σταθερό και μεγαλύτερο από 8, είναι κύκλος .

---

14. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \Re^*$.
Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.

---

15. Θεωρούμε τον κύκλο C: $x^2 + y^2 + 4y = 0$ και το σημείο Α(- 1, - 1).
Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο Α.

---

16. Δίνεται η εξίσωση C: $x^2+y^2-4\kappa x-2y+4\kappa=0$,$\kappa\in\Re$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa\in\Re$ και $\kappa\neq \frac{1}{2}$ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων C.

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa\in\Re$ όλοι οι κύκλοι C διέρχονται από σταθερό σημείο.

---

17. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=4$ και το σημείο Α(8,-6). Να βρείτε:

i) σημείο Μ του κύκλου C τέτοιο ώστε η απόσταση (ΑΜ) να είναι ελάχιστη,

ii) την απόσταση (ΑΜ).

---

18. Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 = 1$ και C_2: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.

γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (Α, Β), όπου το Α ανήκει στον C_1 και το Β στον C_2, να βρεθεί αυτό για το οποίο τα Α, Β απέχουν τη μικρότερη απόσταση.

δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον C_1, το Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.

---

19. Δίνεται ο κύκλος C : $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ και το σημείο Α(4 , 3) .

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C , η οποία διέρχεται από το Α .

β) Υπολογίστε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος .

---

20. Δίνονται η ευθεία ε : $3x - 2y + 1 = 0$ και ο κύκλος C : $x^2 + y^2 - x - 7 = 0$.

α) Αποδείξτε ότι η ε και ο C τέμνονται σε δύο σημεία .

β) Αποδείξτε ότι για κάθε $\lambda \in \Re$ η εξίσωση : $x^2 + y^2 - x - 7 + \lambda(3x - 2y + 1) = 0$ παριστάνει κύκλο ο οποίος περνάει από τα σημεία τομής των ε και C .

γ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων του ερωτήματος (β) .

---

21. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο:

i) των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $|\vec{MA}|=2$ όπου $A(2,1)$,

ii) των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $MA \perp MB$, όπου $A(1,0)$ και $B(-1,0)$,

iii) των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $(MA)=2(MB)$, όπου $A(1,2)$ και $B(3,1)$,

iv) των μέσων των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ μήκους 8, των οποίων τα άκρα Α και Β κινούνται στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.

---

22. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ και $M_1(1, \sqrt{3})$.

α) Να δείξετε ότι $M_1A \perp M_1B$.

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία Α, Β, M_1.

γ) Να δείξετε ότι το σημείο $M_2(-1, \sqrt{3})$ ανήκει στον κύκλο και $M_2A \perp M_2B$.

δ) Να δείξετε ότι κάθε σημείο $M(x_0, y_0)$ για το οποίο ισχύει $MA \perp MB$, ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (β).