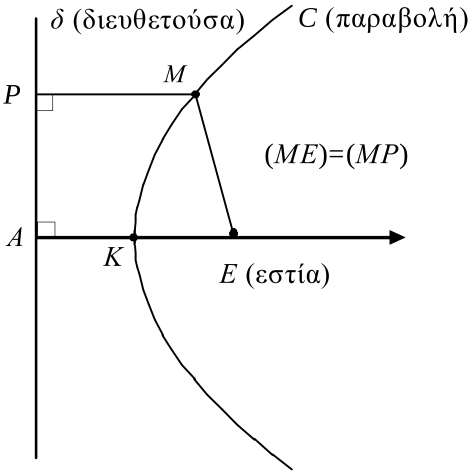
ΠΑΡΑΒΟΛΗ



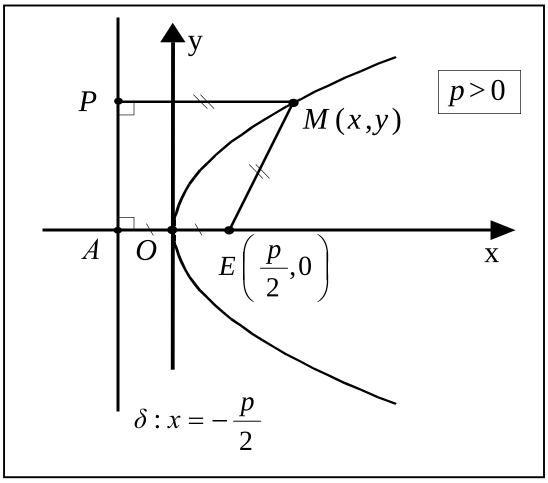
Ορισμός: Παραβολή λέγεται ο γεωμ. τόπος των σημείων Μ του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα σημείο Ε (**Εστία**) και μία ευθεία δ(**διευθετούσα**)

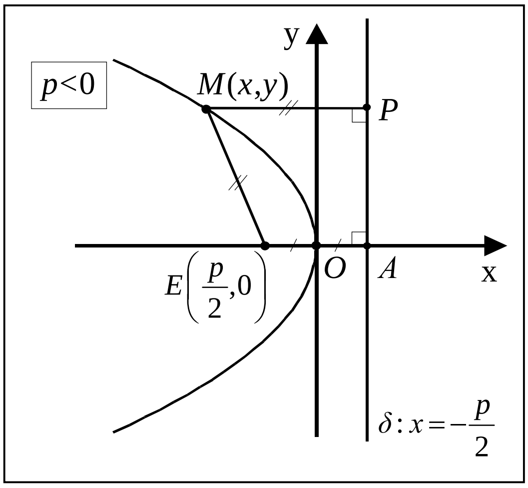
Αν Α είναι η προβολή του Ε στη δ, τότε το μέσο Κ του ΕΑ είναι σημείο της παραβολής και λέγεται **κορυφή** της.

Εξίσωση παραβολής με άξονα συμμετρίας τον χ΄χ και κορυφή το Ο(0,0)

$y^2=2px$ *με* ***εστία*** $E(p/2, 0)$ *και* ***διευθετούσα*** δ: $x=-p/2$.

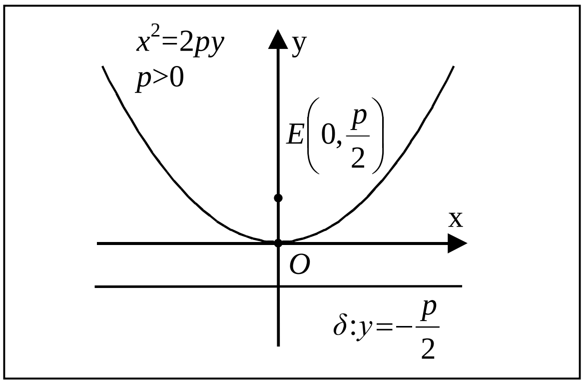
Το **p** λέγεται **παράμετρος** της παραβολής. Η $|p|$ εκφράζει την απόσταση της εστίας από την διευθετούσα.

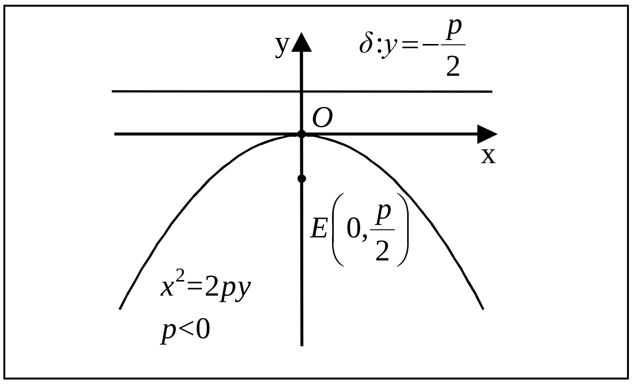




Εξίσωση της παραβολής με άξονα συμμετρίας τον y'y και κορυφή Ο(0,0)

$x^2=2py$ με **Ε(0,p/2)** και **δ: y=-p/2**





Ιδιότητες Παραβολής

Έστω μια παραβολή

$$\mathbf{y^2 = 2px}. \qquad (1)$$

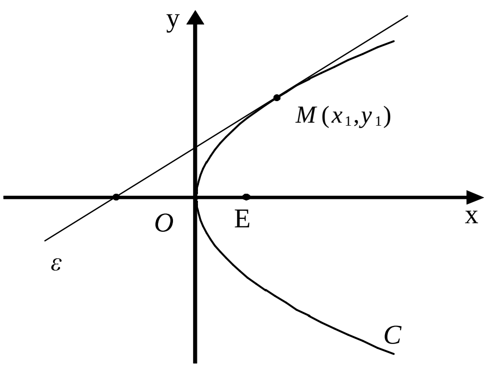
- Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι τα p και x (με $x \neq 0$) είναι ομόσημα. Άρα, κάθε φορά η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία E

- Αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής, δηλαδή, αν $y_1^2 = 2px_1$, τότε και το σημείο $M_2(x_1, -y_1)$ θα είναι σημείο της ίδιας παραβολής, αφού $(-y_1)^2 = 2px_1$. Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας $x'x$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής.

Εφαπτομένη Παραβολής

- Η εφαπτομένη της παραβολής $\boldsymbol{y^2 = 2px}$ στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\boxed{\mathbf{yy_1 = p(x + x_1)}}$$

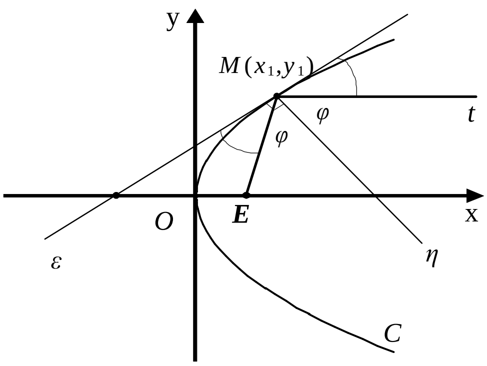


- Αν μια παραβολή έχει εξίσωση $\boldsymbol{x^2 = 2py}$, τότε η εφαπτομένη της στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\boxed{\boldsymbol{xx_1 = p(y + y_1)}}.$$

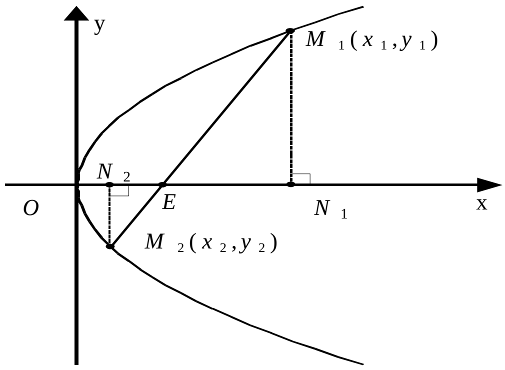
Ανακλαστική Ιδιότητα Παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής $\boldsymbol{M}$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία $\boldsymbol{ME}$ και η ημιευθεία $\boldsymbol{Mt}$, που είναι ομόρροπη της OE, όπου E είναι η εστία της παραβολής.



Εφαρμογές

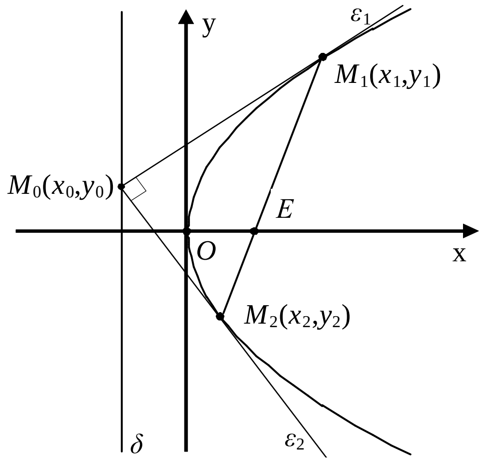
1. Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$ και μια ευθεία που διέρχεται από την εστία της και τέμνει την παραβολή στα σημεία $\boldsymbol{M_1}$ και $\boldsymbol{M_2}$. Αποδεικνύεται ότι το γινόμενο των αποστάσεων των $\boldsymbol{M_1}$ και $\boldsymbol{M_2}$ από τον άξονα $\boldsymbol{x'x}$ είναι σταθερό.



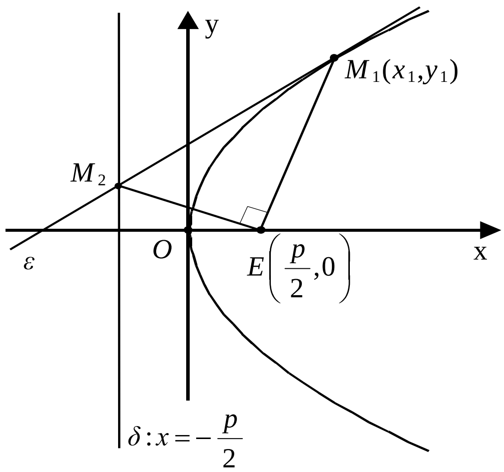
2. Έστω η παραβολή $C: y^2 = 2px$ και $\boldsymbol{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ οι εφαπτόμενες της παραβολής από ένα σημείο $\boldsymbol{M_0(x_0, y_0)}$ με $\boldsymbol{x_0 \neq 0}$. Αν $\boldsymbol{M_1, M_2}$ είναι τα σημεία επαφής των $\boldsymbol{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ με την παραβολή *C*, τότε:

(i) Η ευθεία $\boldsymbol{M_1M_2}$ έχει εξίσωση $\mathbf{yy_0 = p(x + x_0)}$

(ii) Η ευθεία $\boldsymbol{M_1M_2}$ διέρχεται από την εστία, αν και μόνο αν το $\boldsymbol{M_0}$ ανήκει στη διευθετούσα της παραβολής.



3. Έστω η παραβολή $\boldsymbol{y^2 = 2px}$ και η εφαπτομένη της *ε* σε ένα σημείο της $\boldsymbol{M_1(x_1, y_1)}$, η οποία τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο $\boldsymbol{M_2}$. Τότε: $\boldsymbol{M_1 \hat{E} M_2 = 90^0}$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Η παραβολή με εστία το σημείο (1, 0) έχει παράμετρο p = 2.	**Σ** **Λ**
2. Η ευθεία που έχει εξίσωση y = 3 είναι παράλληλη στη διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 16x$.	**Σ** **Λ**
3. Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οxy η παραβολή $y^2 = 2px$ βρίσκεται πάντα στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας y΄y και η εστία Ε.	**Σ** **Λ**
4. Ο άξονας x΄x είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $x^2 = 8y$.	**Σ** **Λ**
5. Μια παραβολή με άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y έχει πάντα εξίσωση της μορφής $x^2 = 2py$.	**Σ** **Λ**
6. Μια παραβολή με κορυφή το Ο (0, 0) και διευθετούσα την $y = -\frac{p}{2}$, έχει άξονα συμμετρίας τον x΄x.	**Σ** **Λ**
7. Κάθε σημείο της παραβολής $y^2 = 8x$ ισαπέχει από την ευθεία x = - 2 και το σημείο (4, 0).	**Σ** **Λ**
8. Όλα τα σημεία της $y^2 = 2px$ με p > 0 εκτός του (0, 0), έχουν θετική τετμημένη.	**Σ** **Λ**
9. Η διευθετούσα της $y^2 = 3x$ είναι η ευθεία $x = -\frac{3}{4}$.	**Σ** **Λ**
10. Η διευθετούσα της $x^2 = 4y$ είναι η ευθεία y = - 1.	**Σ** **Λ**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛ/ΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Η παραβολή που έχει εστία Ε (0, 4) και κορυφή το Ο (0, 0), έχει εξίσωση

Α. $y^2 = 8x$ **Β.** $y^2 = -8x$ **Γ.** $y^2 = 16x$

Δ. $x^2 = 16y$ **Ε.** $x^2 = 8y$.

----

2. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 16x$ στο σημείο (1, 4) είναι παράλληλη στην ευθεία

Α. y = x **Β.** y = - x **Γ.** y = 2x + 2 **Δ.** y = x + 2 **Ε.** 4y = x.

----

3. Τα κοινά σημεία της παραβολής $y^2 = 8x$ και της ευθείας $x - y = 0$ είναι

Α. (0, 0) και (1, 1) **Β.** (8, 8) και (2, 1) **Γ.** (0, 0) και (8, 8)

Δ. $(1, \sqrt{8})$ και $(-1, \sqrt{8})$ **Ε.** (2, 4) και (4, 2).

---

4. Το σημείο Α (κ, 4) ανήκει στην παραβολή $y^2 = 8x$. Το συμμετρικό σημείο Α΄ του Α ως προς τον άξονα x΄x είναι

Α. (4, 4) **Β.** (- 4, 4) **Γ.** (2, 4) **Δ.** (2, - 4) **Ε.** (2, - 2).

---

5. Η εξίσωση $y = \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$ παριστάνει παραβολή

Α. της μορφής $y^2 = 2px$ με $p = \frac{\alpha}{2}$

Β. της μορφής $y^2 = 2px$ με $p = 2\alpha$

Γ. η οποία βρίσκεται στο δεύτερο και τρίτο τεταρτημόριο

Δ. της μορφής $x^2 = 2py$ με $p = \frac{\alpha}{2}$

Ε. με άξονα συμμετρίας τον y΄y.

---

6. Η εξίσωση $y^2 = 4\alpha x$

Α. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $\alpha > 0$

Β. παριστάνει παραβολή, μόνο αν $\alpha = \frac{1}{2}p$ $(p > 0)$

Γ. παριστάνει παραβολή για κάθε $\alpha \neq 0$

Δ. παριστάνει παραβολή για κάθε α πραγματικό αριθμό

Ε. παριστάνει παραβολή μόνο όταν α ρητός.

---

7. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

Α. $\lambda = \frac{p}{y_1}$ **Β.** $\lambda = \frac{2p}{y_1}$ **Γ.** $\lambda = \frac{y_1}{p}$ **Δ.** $\lambda = \frac{y_1}{2p}$ **Ε.** $\lambda = 2p$.

---

8. Το σημείο Α (2, 4) της παραβολής $y^2 = 8x$ απέχει από τη διευθετούσα απόσταση

Α. 2 **Β.** 4 **Γ.** 8 **Δ.** 16 **Ε.** $\sqrt{8}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

1. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής αν έχει:

α) κορυφή την αρχή 0(0,0) και εστία Ε(-1/2,0).

β) κορυφή την αρχή 0(0,0) και διευθετούσα την ευθεία χ= -1/4.

γ) κορυφή την αρχή 0(0,0) και διευθετούσα την δ: ψ=2.

δ) κορυφή την αρχή 0(0,0) και εστία Ε(0, 1/5).

---

2. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με **κορυφή το Ο(0,0),** όταν:

α) έχει άξονα συμμετρίας τον χ'χ και ρ= -4.

β) έχει άξονα συμμετρίας τον ψ'ψ και εστία Ε(0,2).

γ) έχει διευθετούσα την ευθεία ψ=3.

δ) έχει άξονα συμμετρίας τον χ'χ και διέρχεται από το σημείο Α(1,-2).

ε) έχει άξονα συμμετρίας τον Οx και εφάπτεται της ευθείας y = 4x + 1.

---

3. Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα των παραβολών με εξισώσεις:

α) $\psi^2= -4\chi$, β) $\chi^2=8\psi$.

---

4. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφ/νων της παραβολής $y^2 = 3x$ στα σημεία της (0, 0) και (12, 6).

---

5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της παραβολής C: $\psi^2=\chi$ που:

α) είναι παράλληλη στην ευθεία δ_1: χ-2ψ-3=0.

β) είναι κάθετη στην ευθεία δ_2: 2χ-ψ=1.

γ) διέρχεται από το σημείο Α(-4,0).

---

6. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 3x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία δ: 2x - y + 2012 = 0.

---

7. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής C: $\psi^2=4\chi$ που περνούν από το σημείο Μ(-1, 3/2). Κατόπιν να βρεθεί η γωνία που σχηματίζουν.

---

8. Από το σημείο (- 2, 3) προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών ευθειών.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.

---

9. Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας $x + y + 1 = 0$ ως προς την παραβολή $y^2 = 2x$.

---

10. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ε που είναι παράλληλη προς την ευθεία δ: $\psi=2\chi+3$ και εφάπτεται στην παραβολή C: $\psi^2=6\chi$.

---

11. Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής ΑΒ της παραβολής C: $\psi^2=8\chi$ που διέρχεται από το σημείο Μ(4,1) αν είναι γνωστό ότι το Μ είναι μέσον της.

---

12. Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής της παραβολής $\chi^2=2\psi$, η οποία έχει μέσο το σημείο $A\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$

---

13. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία (ε): $y = x - 1$.

α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία Α, Β της (ε) και της παραβολής.

γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α, Β είναι κάθετες.

---

14. Δίνεται η παραβολή C_1: $\psi^2=12\chi$ και ο κύκλος C_2: $(\chi-3)^2+\psi^2=36$. Δείξτε ότι:

α) κύκλος και παραβολή τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β.

β) οι εφαπτόμενες της παραβολής στα Α και Β τέμνονται πάνω στον κύκλο C.

---

15. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2$ και η παραβολή $y^2 = 8x$.

α) Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.

---

16. Έστω η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και μια χορδή της ΑΒ παράλληλη με τον άξονα y΄y, η οποία περνάει από την εστία. Να αποδειχθεί ότι:

α) (ΑΒ) = 2 (ΕΚ), όπου Κ το σημείο που τέμνει ο άξονας x΄x τη διευθετούσα

β) οι εφαπτόμενες στα Α και Β διέρχονται από το Κ.

---

17. Έστω η παραβολή $y^2 = 4\alpha x$, $\alpha > 0$. Μια χορδή της ΑΒ είναι κάθετη στον άξονα της και έχει μήκος 8α. Να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB} = 0$.

---

18. Ισόπλευρο τρίγωνο ΟΑΒ είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή $y^2 = 4\alpha x$, $\alpha>0$ με κορυφή το σημείο Ο. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

---

19. Έστω $C:\psi^2=2\rho\chi$ και η εφαπτόμενη της ε στο τυχαίο σημείο της $M(\chi_0,\psi_0)$. Αν η ευθεία ΟΜ τέμνει τη διευθετούσα στο Α, να δειχθεί ότι ΑΕ//ε.

---

20. Δίνονται τα σημεία Μ του επιπέδου με συντεταγμένες $(x, y) = (2\rho\kappa^2, 2\rho\kappa)$ με $\kappa \in R$.

α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια παραβολή.

β) Αν $A(2\rho\,\kappa_1^2\,,\ 2\rho\kappa_1)$, $B(2\rho\,\kappa_2^2\,,\ 2\rho\kappa_2)$ είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η ΑΒ διέρχεται από την εστία, είναι $4\kappa_1\kappa_2 = -1$.

---

21. Δίνεται σταθερό σημείο Α και ευθεία (ε) που δεν διέρχεται από το Α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το Α και εφάπτονται στην (ε), είναι παραβολή.

---

22. Έστω C: $\chi^2=\psi$ μια παραβολή και τυχαία ευθεία ε που περνάει από το σημείο Κ(0,1) και τέμνει την παραβολή στα σημεία Μ και Ν. Αν Α και Β οι προβολές των Μ και Ν στον άξονα χ'χ να αποδειχθεί ότι: $AKB = 90°$.