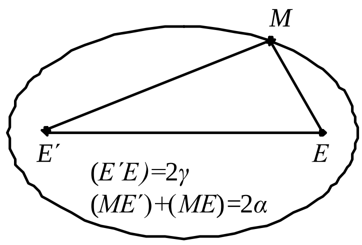
ΕΛΛΕΙΨΗ

Ορισμός:

Έλλειψη με εστίες Ε΄και Ε λέγεται ο γεωμ. τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα Ε΄και Ε είναι σταθερό και μεγαλύτερο του ΕΈ.
Το **σταθερό** αυτό **άθροισμα** το συμβολίζουμε **2 α** και την **εστιακή απόσταση** ΕΈ με **2γ.**

Άρα ένα σημείο *Μ* του επιπέδου είναι σημείο της έλλειψης, ***αν και μόνο αν***

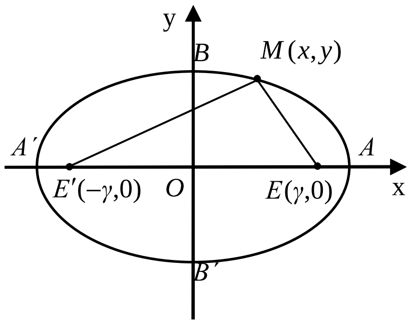
$$(ME') + (ME) = 2\alpha$$



Εξίσωση έλλειψης με Εστίες στον άξονα χ΄χ και κέντρο την αρχή Ο

Η Εξίσωση έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε΄(-γ,0), Ε(γ,0) του άξονα x΄x είναι: $\frac{\mathbf{x}^2}{\alpha^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{\beta^2} = \mathbf{1}$**, όπου** $\boldsymbol{\beta} = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$.

Έχει ***μεγάλο άξονα*** τον ΑΆ και ***μικρό άξονα*** τον Β΄Β.
Προφανώς είναι (ΑΆ)=2α και (Β΄Β)=2β.

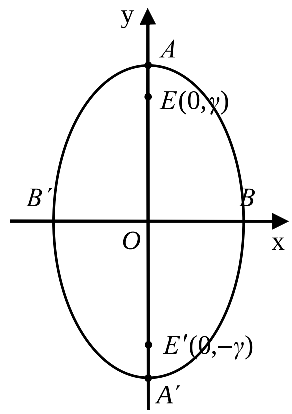


Εξίσωση έλλειψης με Εστίες στον άξονα y΄y και κέντρο την αρχή Ο

Η Εξίσωση έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε΄(0,-γ), Ε(0,γ) του άξονα y΄y είναι:

$$\frac{\mathbf{x}^2}{\beta^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{\alpha^2} = \mathbf{1}, \textbf{όπου } \boldsymbol{\beta} = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$

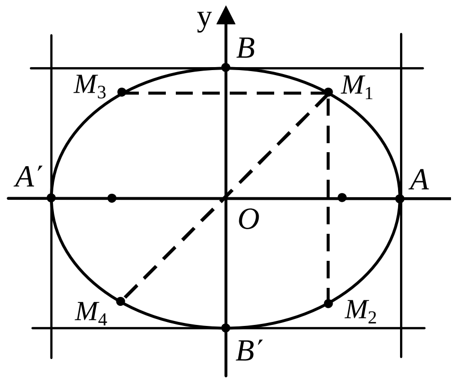
Έχει ***μεγάλο άξονα*** τον ΑΆ και ***μικρό άξονα*** τον Β΄Β.
Προφανώς είναι (ΑΆ)=2α και (Β΄Β)=2β.



Ιδιότητες Έλλειψης

Έστω μια έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$,

όπου $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$.



- Η παραπάνω έλλειψη έχει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ ***άξονες συμμετρίας*** και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας.

Το σημείο O λέγεται **κέντρο** της έλλειψης.

- Τα σημεία A',A,B',B λέγονται **κορυφές** της έλλειψης, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα $A'A$ και $B'B$, τα οποία έχουν μήκη $(A'A)=2\alpha$ και $(B'B)=2\beta$, λέγονται **μεγάλος άξονας** και **μικρός άξονας** αντιστοίχως.
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς O σημεία M_1 και M_4 της έλλειψης λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης.

Αποδεικνύεται ότι: $\boldsymbol{2\beta \le (M_1M_4) \le 2\alpha}$

- Τέλος, από την εξίσωση της έλλειψης, έχουμε: $-\boldsymbol{\alpha \le x \le \alpha}$ και $-\boldsymbol{\beta \le y \le \beta}$.

Εκκεντρότητα της έλλειψης λέγεται ο λόγος **ε=γ/α**<1 και ισχύει: $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$

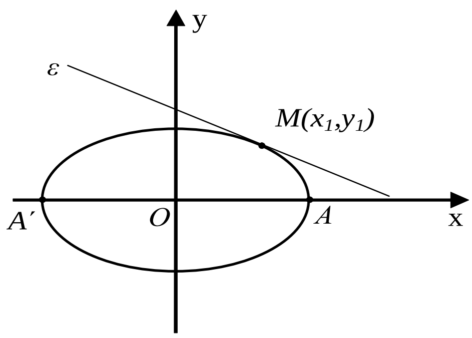
- Όταν το ε τείνει στο μηδέν, τότε η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.

- Όσο το ε μεγαλώνει (τείνει στη μονάδα) τόσο ποιο επιμήκης γίνεται η έλλειψη και τείνει να γίνει ευθύγραμμο τμήμα.

Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, άρα ίδιο λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$, λέγονται **όμοιες.**

Εφαπτομένη Έλλειψης

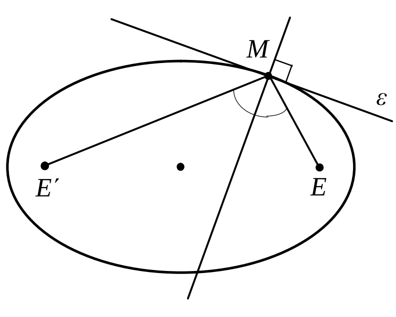
Έστω μια έλλειψη C με εξίσωση $\boldsymbol{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1}$.



Η **εφαπτομένη** της έλλειψης C στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ αποδεικνύεται ότι έχει εξίσωση:

$$\boxed{\mathbf{\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1}}$$

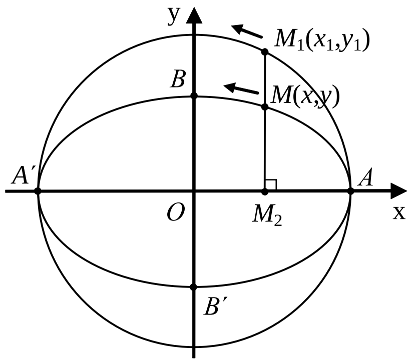
- ***Ανακλαστική ιδιότητα έλλειψης:***



Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E', E οι εστίες της έλλειψης.

Εφαρμογές

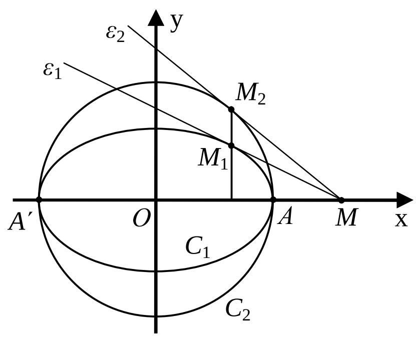
1. Έστω ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$, $\alpha>0$ και ένα σημείο του M_1, του οποίου η ορθή προβολή στον άξονα $x'x$ είναι το σημείο M_2.



Πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα M_1M_2 ορίζουμε ένα σημείο *M*, τέτοιο, ώστε να ισχύει $\frac{(M_2M)}{(M_2M_1)}=\frac{\beta}{\alpha}$, $0<\beta<\alpha$.

Αν το M_1 κινείται στον κύκλο, τότε το *M* κινείται στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

2. Δίνονται η έλλειψη $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και ο κύκλος $C_2: x^2+y^2=\alpha^2$. Αν $M_1(x_1,y_1)$ είναι ένα σημείο της C_1 και $M_2(x_2,y_2)$ το σημείο του C_2 με $x_2=x_1$, τότε η εφαπτομένη ε_1 της έλλειψης C_1 στο σημείο M_1 και η εφαπτομένη ε_2 του κύκλου C_2 στο σημείο M_2 τέμνονται πάνω στον άξονα $x'x$.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

1. Όσο η εκκεντρότητα μιας έλλειψης πλησιάζει προς το 0, τόσο η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος.	**Σ** **Λ**
2. Η εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ παριστάνει έλλειψη μόνο αν α > β.	**Σ** **Λ**
3. Η εστιακή απόσταση μιας έλλειψης είναι το μισό του μεγάλου άξονα. Η εκκεντρότητα αυτής της έλλειψης είναι $\frac{1}{2}$.	**Σ** **Λ**
4. Δύο ελλείψεις που έχουν τις ίδιες εστίες, είναι όμοιες.	**Σ** **Λ**
5. Η εκκεντρότητα της έλλειψης $4x^2 + y^2 = 4$ είναι $\varepsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.	**Σ** **Λ**
6. Οι ελλείψεις $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ και $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ είναι όμοιες.	**Σ** **Λ**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛ/ΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Αν Ε΄, Ε οι εστίες μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα μήκους 2α και Α τυχόν σημείο της έλλειψης, τότε

Α. (ΑΕ΄) - (ΑΕ) = α **Β.** (ΑΕ΄) + (ΑΕ) = α **Γ.** (ΑΕ΄) = (ΑΕ)

Δ. (ΑΕ΄) + (ΑΕ) = 2α **Ε.** (ΑΕ΄) - (ΑΕ) = 2α.

---

2. Η απόσταση του κέντρου της έλλειψης $\frac{25x^2}{9}+4y^2=1$ από τη μια εστία της είναι

Α. $\frac{7}{6}$ **Β.** $\frac{\sqrt{11}}{10}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{11}}{5}$ **Δ.** $\frac{5}{2}$ **Ε.** $\frac{4}{3}$.

---

3. Η έλλειψη $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$ έχει μια εστία στο σημείο

Α. (2, 3) **Β.** (0, $\sqrt{2}$) **Γ.** ($\sqrt{3}$, 0) **Δ.** (- 1, 0) **Ε.** (0, -1).

---

4. Η εξίσωση $\beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ $\alpha,\beta \neq 0$.

Α. παριστάνει πάντα μία έλλειψη **Β.** παριστάνει πάντα έναν κύκλο

Γ. παριστάνει δύο τεμνόμενες ευθείες **Δ.** παριστάνει μία έλλειψη, αν $\alpha \neq \beta$

Ε. παριστάνει μία έλλειψη, αν α = β.

---

5. Η έλλειψη $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ είναι όμοια με την

Α. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ **Β.** $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{2}=1$ **Γ.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ **Δ.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ **Ε.** $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

1. Να βρεθούν τα στοιχεία (μήκη αξόνων, εστίες, εκκεντρότητα) των ελλείψεων και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις:

i) $4x^2+y^2=100$, ii) $25x^2+9y^2=225$, iii) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, iv) $x^2+4y^2=1$.

---

2. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστιακή απόσταση 6, διέρχεται από το σημείο $M(2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{7}}{2})$ και έχει κέντρο το Ο και εστίες στον άξονα χ'χ.

---

3. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει κέντρο το Ο και εστίες στον άξονα χ'χ, αν διέρχεται από το σημείο Μ(2,1) και ο μικρός της άξονας είναι το 1/3 του μεγάλου.

---

4. Να βρείτε τα σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ που απέχουν από τον μικρό άξονα 1 μονάδα και να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι κορυφές ορθογωνίου.

---

5. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της έλλειψης $x^2+4y^2=1$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$.

---

6. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της έλλειψης $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$, οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία (δ): χ-2ψ+3=0.

---

7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της έλλειψης $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, η οποία σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy τρίγωνο εμβαδού 12 τ.μ.

---

8. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης $9x^2 + 16y^2 = 144$ που είναι:

α) παράλληλες προς την ευθεία (δ): $x + y = 0$

β) κάθετες στην ευθεία (δ).

---

9. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της έλλειψης $3x^2+5y^2=15$, οι οποίες έχουν θετικό συντελεστή διεύθυνσης και απέχουν από το κέντρο της έλλειψης 2 μονάδες.

---

10. Ο κύκλος με κέντρο το Ο (0, 0) και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με α > β. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

---

11. Δίνεται η έλλειψη C: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Να αποδείξετε ότι και η έλλειψη με εξίσωση $\frac{\kappa^2x^2}{\alpha^2}+\frac{\kappa^2y^2}{\beta^2}=1$ έχει την ίδια εκκεντρότητα με τη C.

---

12. Να βρεθεί η μορφή της εξίσωσης της έλλειψης με εκκεντρότητα $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

---

13. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$.

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο Ε΄ΒΕΒ΄ είναι ρόμβος (Ε΄, Ε οι εστίες, Β, Β΄ τα άκρα του μικρού άξονα).

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.

---

14. Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=\alpha^2$. Αν θέσουμε x = x΄ και y = cy΄, να αποδείξετε ότι το σημείο (x΄, y΄) ανήκει σε έλλειψη.

---

15. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=4$ και η έλλειψη $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$.

α) Να δείξετε ότι το σημείο $(1, -\sqrt{3})$ είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία.

β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

γ) Να βρεθούν τα σημεία Μ (x_0, y_0) ώστε $x_0^2+y_0^2=4$ και (Ε΄Μ) + (ΕΜ) = $2\sqrt{6}$ (Ε΄, Ε οι εστίες της έλλειψης).

---

16. Δίνονται τα σημεία Α(-4,0) και Β(4,0). Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ(χ,ψ) του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\lambda_{AM}\cdot\lambda_{BM}=-9$. Να σχεδιαστεί η γραμμή που θα προκύψει.

---

17. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(5ημφ, 4συνφ) καθώς το φ μεταβάλλεται στο σύνολο $\mathbb{R}$. Να σχεδιαστεί η γραμμή που θα προκύψει.
