ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

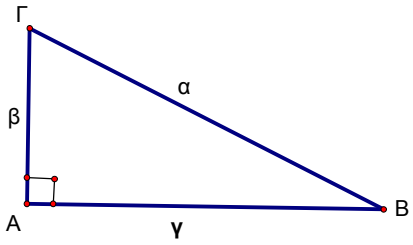
Από το Γυμνάσιο ξέρουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο *ΑΒΓ* ισχύει:

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

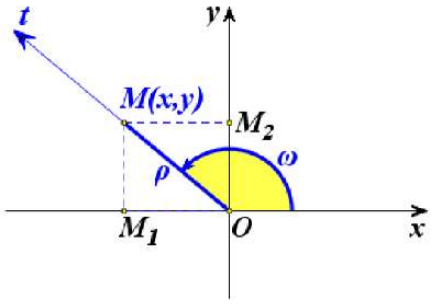
$$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

$$\sigma\varphi B = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}$$



Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας

Ας υποθέσουμε ότι ο ημιάξονας *Ox* ενός συστήματος συντεταγμένων *Ox* περιστρέφεται γύρω από το *O* κατά τη **θετική φορά** (αντίθετη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού).
Με τον τρόπο αυτό μπορεί να γραφεί μια οποιαδήποτε γωνία από 0^0 ως 360^0 αλλά και μεγαλύτερη κάνοντας μια ή περισσότερες περιστροφές που η καθεμιά αντιστοιχεί σε 360^0.
Με αντίστοιχο τρόπο κινούμενος κατά την αρνητική φορά μπορούμε να διαγράψουμε μια οποιαδήποτε αρνητική γωνία.



Πάνω στην τελική πλευρά της γωνίας ***ω*** παίρνουμε τυχαίο σημείο **M(*x, y*)** και υπολογίζουμε την απόσταση (ΟΜ) που είναι (ΟΜ)=ρ= $\sqrt{x^2+y^2}$. Τότε ορίζουμε:

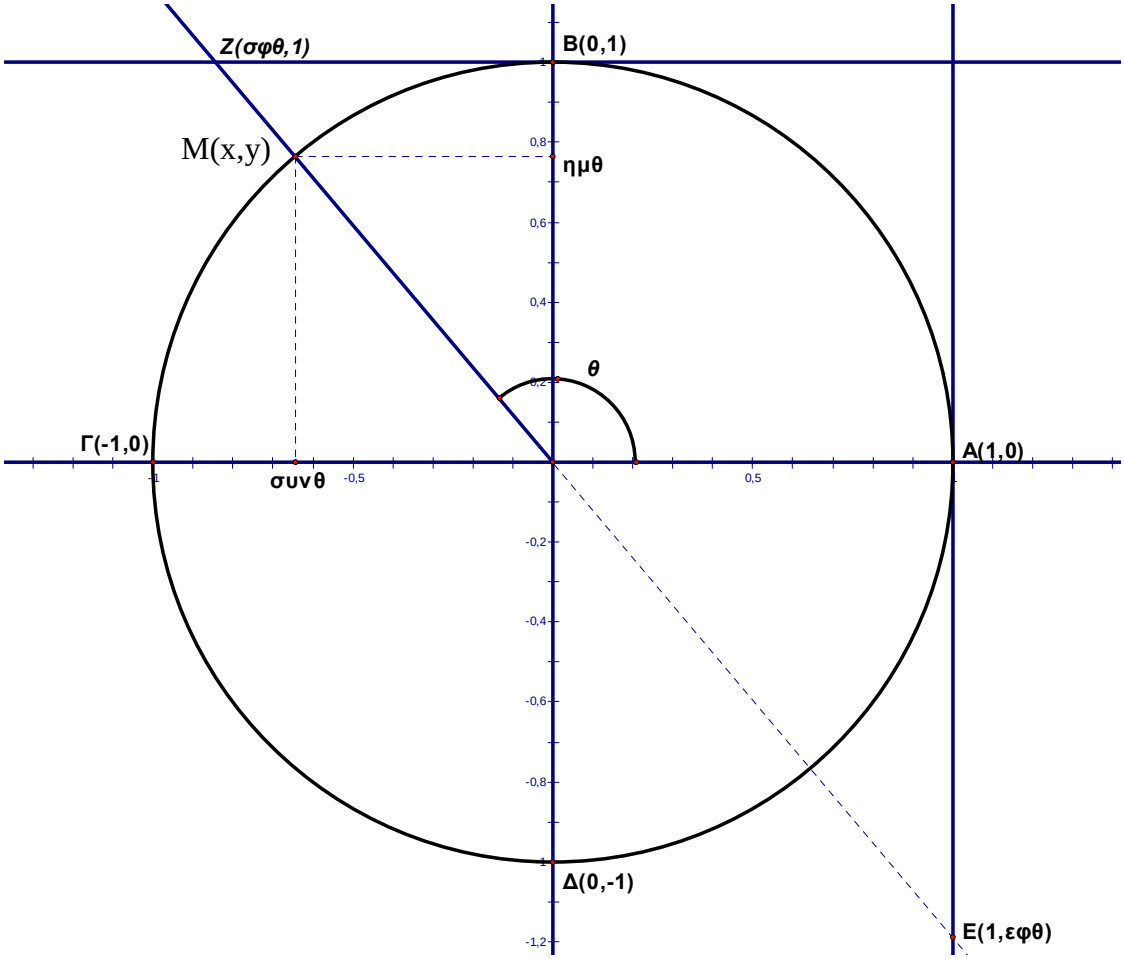
$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{απόσταση OM}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{απόσταση OM}}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\text{τεταγμένη του M}}{\text{τετμημένη του M}}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\text{τετμημένη του M}}{\text{τεταγμένη του M}}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ



Τριγωνομετρικός κύκλος λέγεται ο κύκλος με κέντρο την αρχή ενός συστήματος αξόνων Οxy και ακτίνα ρ=1.

Αν M(x,y)είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας θ τέμνει τον τριγ. κύκλο τότε ισχύει:

συνθ = x = τετμημένη του M	**ημθ** = y = τεταγμένη του M
εφθ = $\frac{y}{x}$ =τεταγμένη του E	**σφθ** = $\frac{x}{y}$ =τετμημένη του Z

Προφανώς ισχύουν οι σχέσεις : **-1≤συνθ≤1** και **-1≤ημθ≤1**

Ακτίνιο (rad) είναι η γωνία που, όταν γίνει επίκεντρη κύκλου (O,ρ), βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου αυτού, δηλαδή σε τόξο 1 rad.

Αν ***α*** είναι το μέτρο μιας γωνίας σε rad και ***μ*** σε μοίρες τότε ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180}},$$ όπου π≅3,14…. (άρρητος).

ΤΡΙΓ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

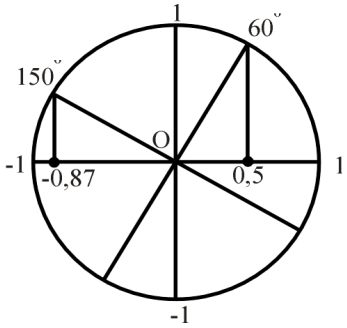
Γωνία ω σε μοίρες rad	**0°** **0**	**30°** $\frac{\pi}{6}$	**45°** $\frac{\pi}{4}$	**60°** $\frac{\pi}{3}$	**90°** $\frac{\pi}{2}$
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Δεν ορίζεται
σφω	Δεν ορίζεται	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓ. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$	$\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$	$\varepsilon\varphi\omega \,.\, \sigma\varphi\omega = 1$
$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$	$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$	$\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΤΡΙΓΩΝ/ΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ- ΤΡΙΓΩΝ/ΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

1. Με βάση τα στοιχεία που σημειώνονται στο διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο και τις απαραίτητες ευθείες που πρέπει να χαράξετε, να βρείτε:



συν0° συν30°

συν90° συν120°

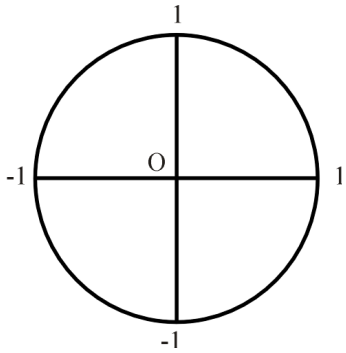
συν180° συν240°

συν270° συν330°

---

2. Στον τριγωνομετρικό κύκλο:

α) Να σχεδιάσετε τις γωνίες:
π/3, 2π/3, π, 4π/3, 5π/3, 2π.



β) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο;

γ) Ποιες από τις παραπάνω γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο;

3. Να συμπληρωθεί ο πίνακας :

Γωνία σε μοίρες	**0**	**30**	**45**			**120**	**135**	**150**	**180**		
Γωνία σε ακτίνια				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$					$\frac{3\pi}{2}$	2π

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

γωνία θ	**πρόσημο ημθ**	**πρόσημο συνθ**	**πρόσημο εφθ**	**πρόσημο σφθ**
117°				
- 100°				
925°				
- 40°				

5. Από τις παρακάτω τιμές **δεν μπορεί** να είναι ημίτονο γωνίας:

Α. $\frac{1}{2}$ **Β.** $-\frac{3}{2}$ **Γ.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Δ.** $-\frac{1}{2}$ **Ε.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

---

6. Για οποιαδήποτε γωνία x:

Α. συνx < -1 **Β.** συνx > 1 **Γ.** - 1 ≤συνx ≤ 1

Δ. το συνx δεν ορίζεται **Ε.** δεν ισχύει κανένα από τα προηγούμενα.

---

7. Το ημω:

Α. μετριέται με μοίρες **Β.** μετριέται με rad **Γ.** μετριέται με m

Δ. μετριέται με cm **Ε.** δεν μετριέται με καμιά μονάδα.

---

8. Υπολογίστε την τιμή της παράστασης: $συν^2 0 + συν^2 \frac{\pi}{6} + συν^2 \frac{\pi}{4} + συν^2 \frac{\pi}{3} + συν^2 \frac{\pi}{2}$

---

9. Αν $|ημx| + |συνx| = 0$, τότε η τελική πλευρά της γωνίας x βρίσκεται:

Α. στο 1° τεταρτημόριο **Β.** στο 2° τεταρτημόριο

Γ. στο 3° τεταρτημόριο **Δ.** στο 4° τεταρτημόριο

Ε. δεν υπάρχει γωνία x που να ικανοποιεί αυτή τη σχέση.

---

10. Η τιμή του γινομένου: συν0° . συν90° . συν180° . συν270° . συν360° είναι:

Α. -1 **Β.** 1 **Γ.** 0 **Δ.** 2 **Ε.** $\frac{1}{2}$

---

11. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας χ :

α) ημχ = 0,1 και $90^0<\chi<180^0$ β) συνχ = - 0,2 και $\pi<\chi<\frac{3\pi}{2}$

γ) εφχ = 10 και $0^0<\chi<90^0$ δ) σφχ = 0,5 και $180^0<\chi<270^0$

---

12. Αν $6\eta\mu^2x + \eta\mu x - 1 = 0$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρεθεί το συνx.

---

13. Αν $2\sigma\upsilon\nu^2x - 5\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$ και 270° < x < 360°, να βρεθεί η εφx.

---

14. Αποδείξτε ότι

α) $(1 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2\,(1 + \sigma\upsilon\nu x)\,(1 + \eta\mu x)$

β) $\eta\mu^2\alpha\,(1 + \sigma\varphi^2\alpha) + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\,(1 + \varepsilon\varphi^2\alpha) = 2$.

---

15. Να δείξετε ότι:

α) $|3\sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x| \le 5$ β) $|2\eta\mu x - 10\sigma\upsilon\nu x| \le 12$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^{ο} ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ: $-\chi, \chi$	**ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ π** $\pi-\chi, \chi$	**ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΑ π** $\pi+\chi, \chi$	**ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ** $\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}-\chi, \chi$
ημ(-χ)= -ημχ	ημ(π-χ)=ημχ	ημ(π+χ)=-ημχ	$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\sigma\upsilon\nu\chi$
συν(-χ)=συνχ	συν(π-χ)=-συνχ	συν(π+χ)=-συνχ	$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\eta\mu\chi$
εφ(-χ)=-εφχ	εφ(π-χ)=-εφχ	εφ(π+χ)=εφχ	$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\sigma\varphi\chi$
σφ(-χ)=-σφχ	σφ(π-χ)=-σφχ	σφ(π+χ)=σφχ	$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\chi\right)=\varepsilon\varphi\chi$

Γενικά για την αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο *αν έχουμε:*

i) γωνία της μορφής κπ±ω, αυτό γίνεται παίρνοντας τον ομώνυμο τριγ. αριθμό και βάζοντας του το πρόσημο + ή – ανάλογα το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η γωνία αν λάβουμε την ω σαν θετική οξεία γωνία.

Π.χ. ημ(15π+ω)= -ημω εφ(5π+ω)=εφω

συν(12π-ω)=συνω σφ(7π-ω)=-σφω

ii) γωνία της μορφής κ$\frac{\pi}{2}$±ω, όπου **κ είναι περιττός** ακέραιος, κάνουμε εναλλαγή του ***ημ με συν*** και της ***εφ με σφ*** και αντίστροφα, βάζοντας το πρόσημο + ή – όπως προηγουμένως.

Π.χ. ημ($^{5\pi}/_{2}$+ω)=συνω συν($^{3\pi}/_{2}$-ω)= -ημω

εφ($^{7\pi}/_{2}$+ω)= -σφω σφ($^{11\pi}/_{2}$-ω)= εφω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

780°, 1110°, $\frac{17\pi}{3}$

---

2. Το ημ660° ισούται με το:

Α. ημ120° **Β.** συν60° **Γ.** συν120° **Δ.** ημ (-60°) **Ε.** ημ260°

---

3. Να εκφράσετε συναρτήσει του συνx και του ημx την παράσταση:

Α = συν (- x) + ημ (- x) + ημ (π + x) + συν (π - x)

---

4. Εάν Α, Β, Γ είναι γωνίες τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

α) ημ (Β + Γ) = ημΑ β) συν (Β + Γ) = - συνΑ γ) εφ (Β + Γ) = - εφΑ

---

5. Συμπληρώστε τον πίνακα:

Γωνία	**150°**	**135°**	**120°**	**210°**	**225°**	**240°**
ημ						
συν						
εφ						

---

6. Να απλοποιηθεί η παράταση: $A=\dfrac{\sigma\upsilon\nu(2003\pi+\chi)\cdot\eta\mu\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sigma\phi(2007\pi-\chi)}{\eta\mu(99\pi-\chi)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\chi-\frac{7\pi}{2}\right)\cdot\varepsilon\phi\left(-\frac{9\pi}{2}+\chi\right)}$.

---

7. Αν $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$ να δειχθεί ότι: i) ημα=συνβ και ii) $\eta\mu^2(\pi-\alpha)+\eta\mu^2(\pi+\beta)=1$.

---

8. Να δείξετε ότι: $\eta\mu(\pi-\chi)+\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\chi\right)+\eta\mu(\chi-\pi)-\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{2}\right)=0$.

---

9. Να αποδείξετε ότι : $\eta\mu 450^0+\varepsilon\varphi 220^0+\sigma\varphi 410^0=1+2\varepsilon\varphi 40^0$.

---

10. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\eta\mu(\frac{3\pi}{2}+\theta)}{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\theta)+1}+\dfrac{\eta\mu(\pi+\theta)-1}{\sigma\upsilon\nu(\pi-\theta)}=0$.

---

11. Να αποδείξετε ότι : $\sigma\varphi 1^0\cdot\sigma\varphi 2^0\cdot\sigma\varphi 3^0\cdot\ldots\cdot\sigma\varphi 88^0\cdot\sigma\varphi 89^0=1$.

---

12. Να αποδείξετε ότι : $\sigma\upsilon\nu 1^0+\sigma\upsilon\nu 2^0+\sigma\upsilon\nu 3^0+\ldots+\sigma\upsilon\nu 178^0+\sigma\upsilon\nu 179^0=0$.

---

13. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης : $A=\dfrac{\eta\mu\frac{3\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu\pi+\varepsilon\phi\frac{2\pi}{3}}{\varepsilon\phi\frac{5\pi}{4}-\sigma\phi\frac{9\pi}{4}+\eta\mu\frac{17\pi}{4}}$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

f(x)=ημχ

Πεδίο ορισμού : A= R

Περιοδική με περίοδο: T=2π

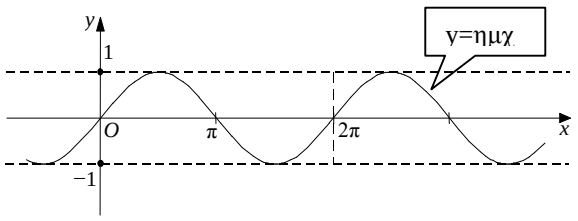
Μονοτονία-ακρότατα

χ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y=ημχ	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

Σύνολο τιμών

f(A)=[-1,1]

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ



f(χ)=συνχ

Πεδίο ορισμού A=R

Περιοδική με περίοδο T=2π

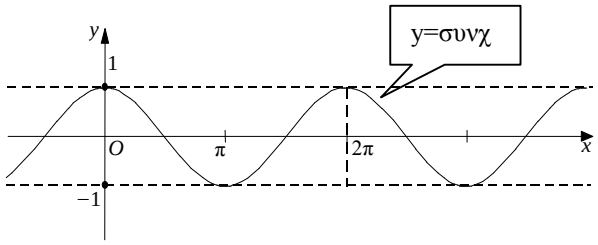
Μονοτονία-ακρότατα

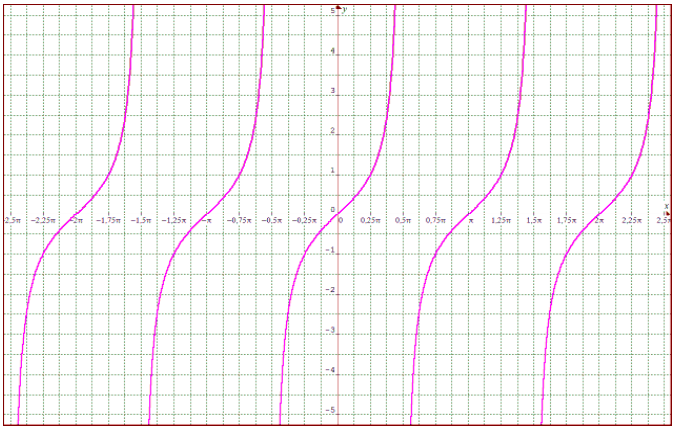
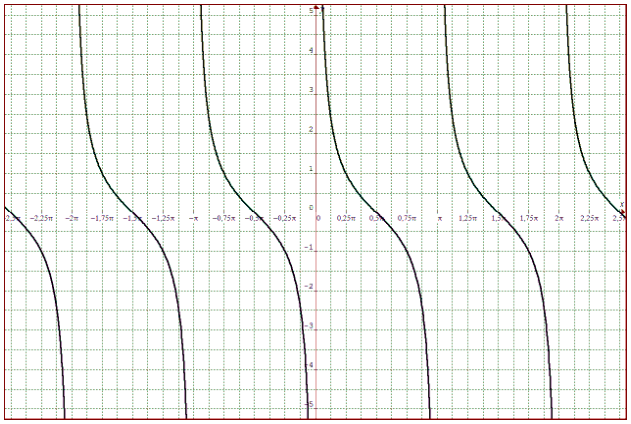
χ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y=συνχ	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1

Σύνολο τιμών

f(A)=[-1,1]

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ



f(χ)=εφχ	***f(χ)=σφχ***
Πεδίο ορισμού $A=\left\{x \in R / x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ **Περιοδική** με Τ=π	**Πεδίο ορισμού** $A=\{x \in R / x \neq k\pi\}$ **Περιοδική** με Τ=π
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ***Γν. αύξουσα*** στα διαστήματα της μορφής : $(\kappa\pi-\frac{\pi}{2}, \kappa\pi+\frac{\pi}{2})$,όπου $\kappa \in Z$ Δεν έχει ακρότατα	***ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ*** ***Γν. φθίνουσα*** στα διαστήματα της μορφής : $(\kappa\pi , (\kappa+1)\pi)$,όπου $\kappa \in Z$ Δεν έχει ακρότατα.
ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ***f(A)=R***	***ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ*** ***f(A)=R***
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 	***ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ*** 

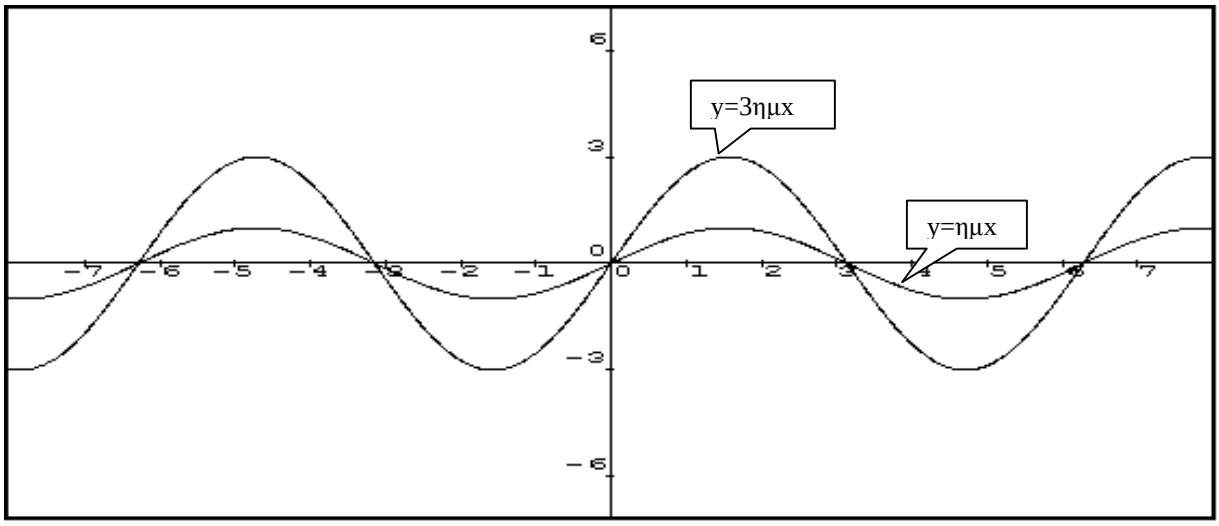
Συναρτήσεις της μορφής f(x)=ρημωx, με ρ,ω>0.

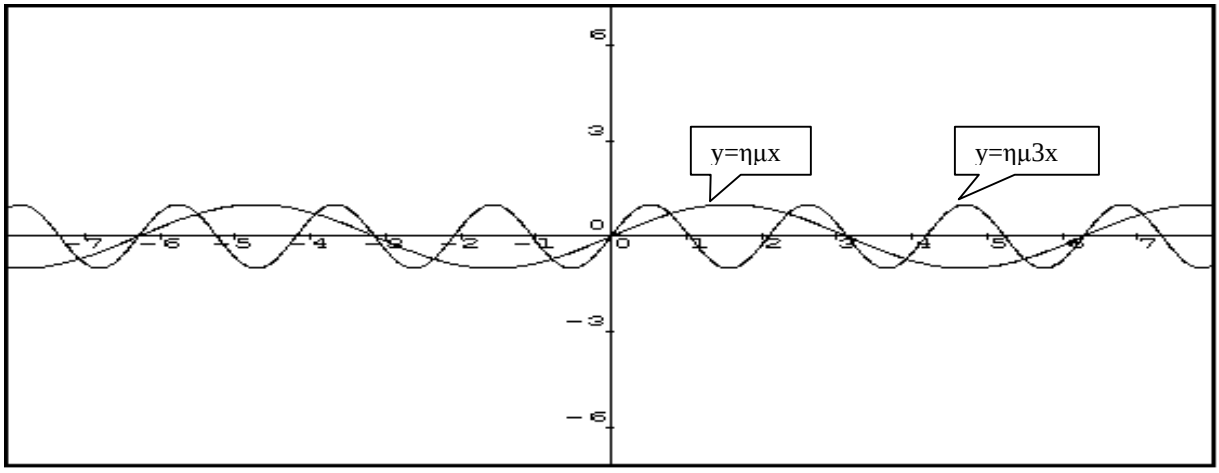
Πεδίο ορισμού το A=R

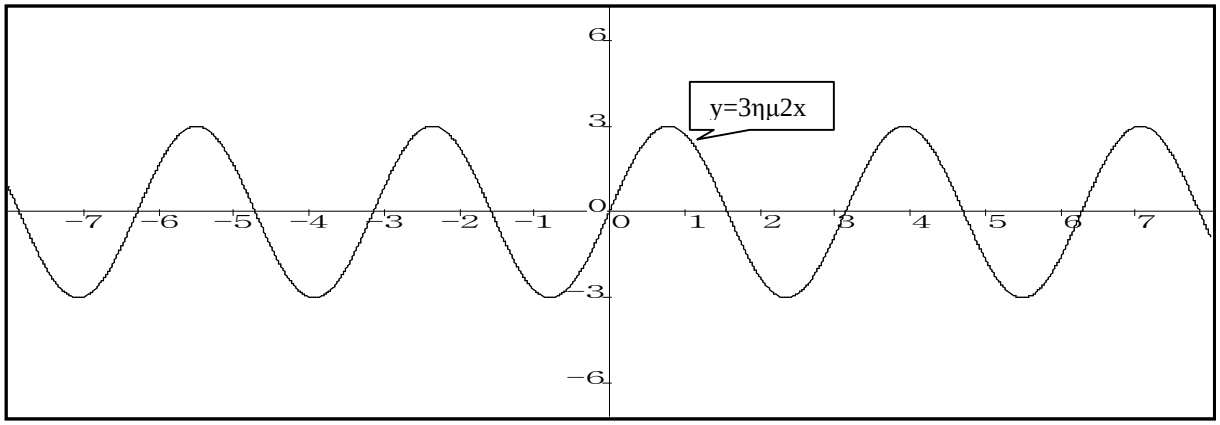
Περιοδικές με **περίοδο** $T=\frac{2\pi}{\omega}$

Έχουν **ελάχιστο το –ρ** και **μέγιστο το ρ**

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ



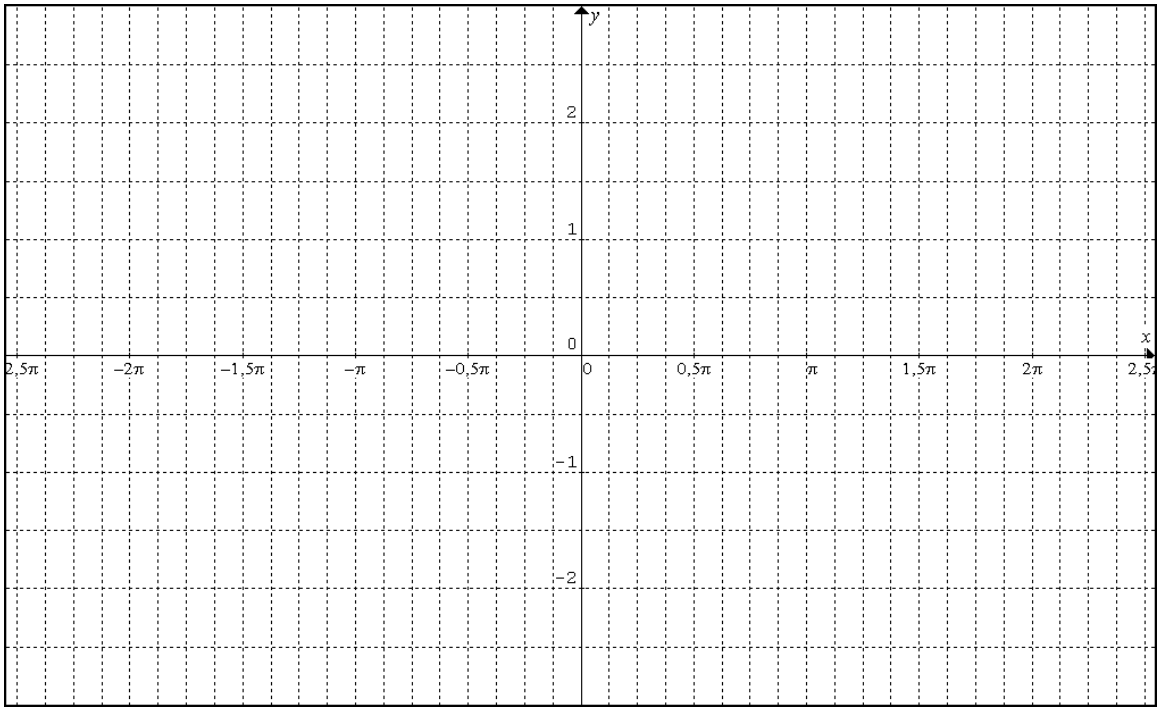




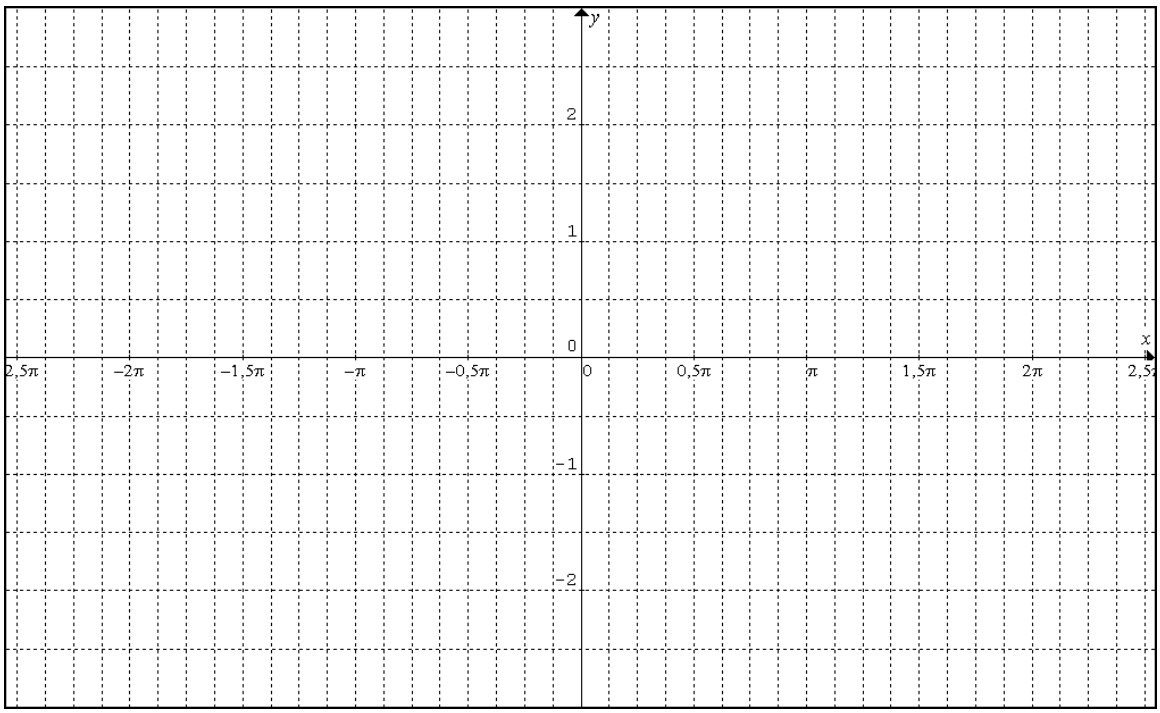
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

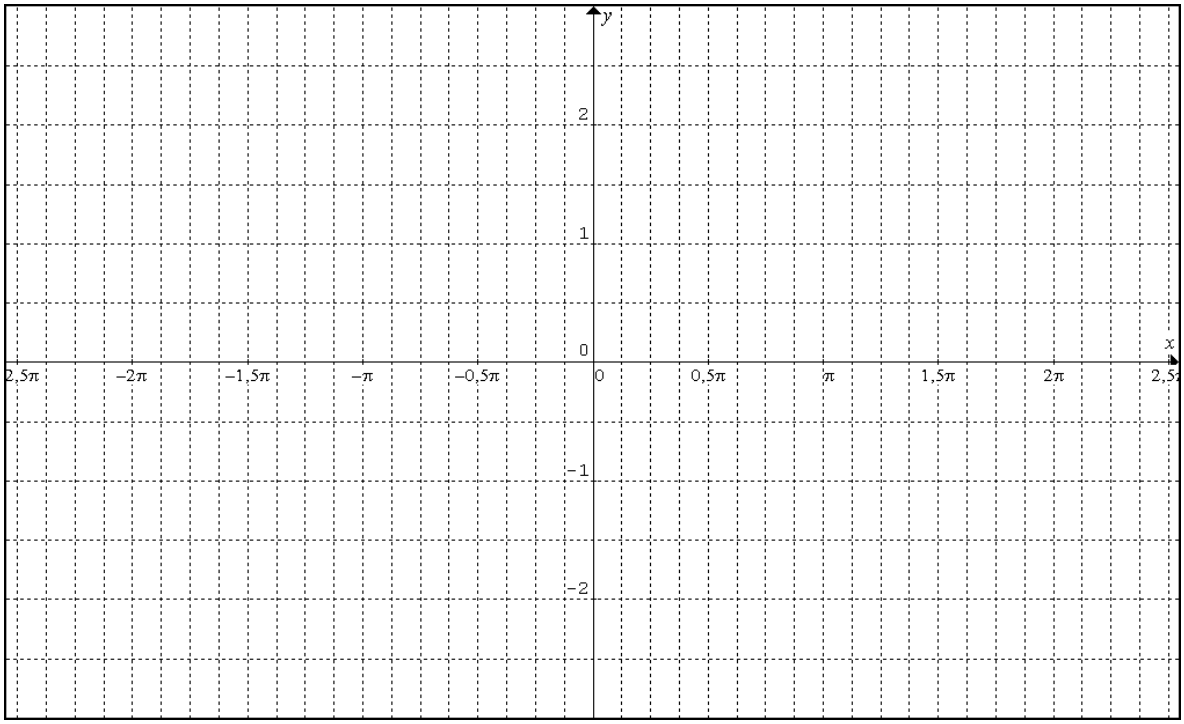
i) $\psi=\eta\mu\chi$ $\psi=1+\eta\mu\chi$ $\psi=\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{4}\right)$



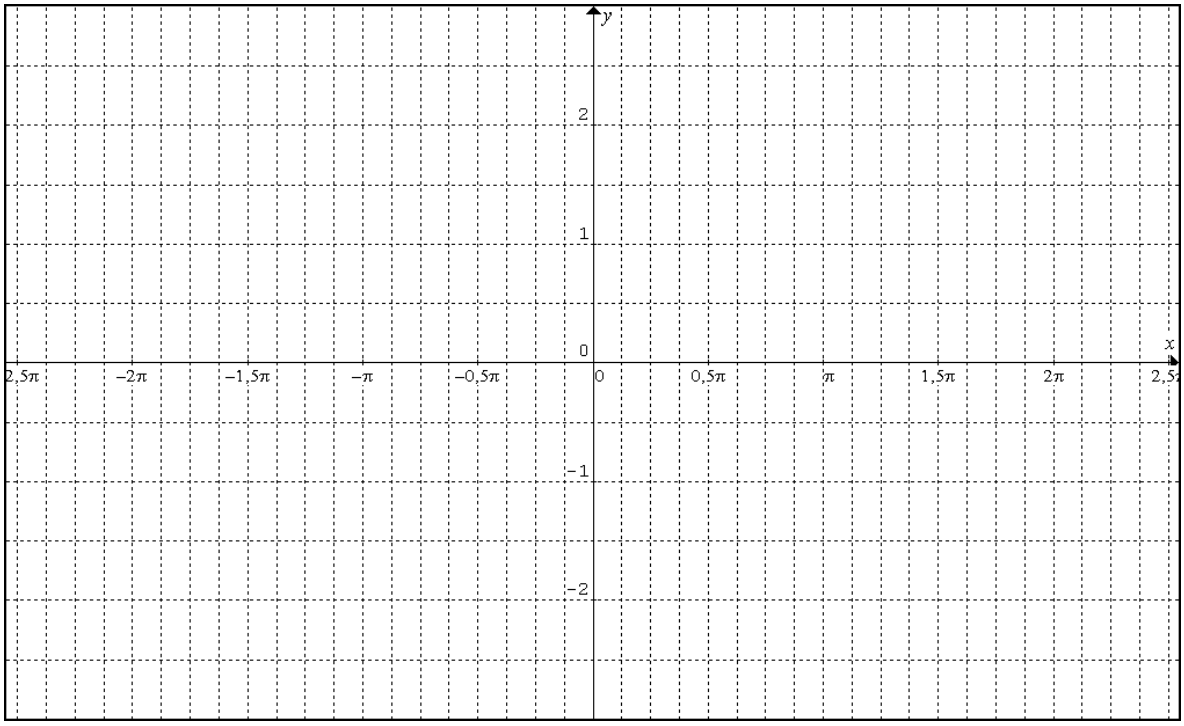
iii) $\psi=\sigma\upsilon\nu\chi$ $\psi=-1+\sigma\upsilon\nu\chi$ $\psi=\sigma\upsilon\nu\left(\chi-\frac{\pi}{2}\right)$.



2. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των $\mathbf{f(x) = 2\eta\mu\, 3x}$ και $\mathbf{g(x) = \eta\mu\, 2x}$ στο διάστημα [-2π , 2π].



3. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $\mathbf{f(x) = \sigma\upsilon\nu\, x}$ και $\mathbf{f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\, 3x}$ στο διάστημα [-2π , 2π].



ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΕΞΙΣΩΣΗ	***ΛΥΣΕΙΣ***
ημχ=ημθ	***χ=2κπ+θ*** *ή* ***χ=2κπ+π-θ***
συνχ=συνθ	***χ=2κπ+θ*** *ή* ***χ=2κπ-θ***
εφχ=εφθ	***χ=κπ+θ***
σφχ=σφθ	***χ=κπ+θ*** *όπου* $\kappa \in Z$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1.Να λυθούν οι εξισώσεις: i) ημχ=$\frac{1}{2}$ ii) συνχ=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ iii) εφχ=1 iv) σφχ=$\sqrt{3}$.

Απαντήσεις

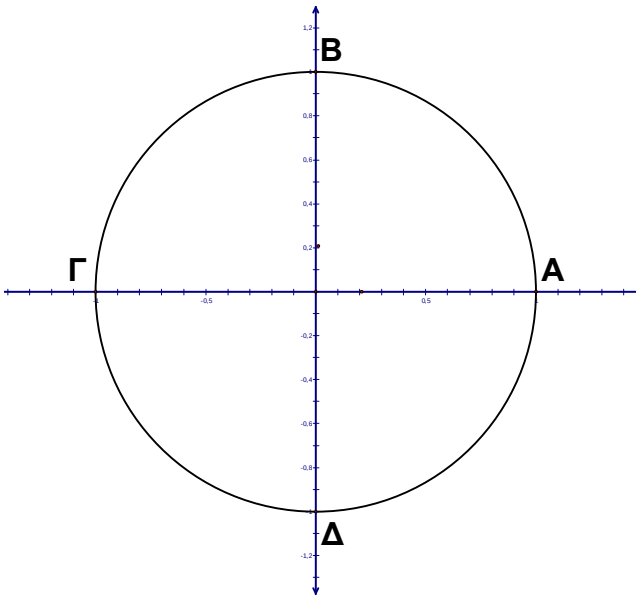
i) Επειδή ημπ/6=1/2 η εξίσωση γίνεται:
ημχ=ημπ/6 ⇔ χ=2κπ+π/6 ή χ=2κπ+π-π/6 ⇔ **χ=2κπ+π/6 ή χ=2κπ+5π/6** με κ∈Z.

ii) Επειδή συνπ/4=$\frac{\sqrt{2}}{2}$ η εξίσωση γίνεται συνχ=συνπ/4 ⇔ **χ=2κπ+π/4 ή χ=2κπ-π/4**.

iii) Επειδή εφπ/4=1 γίνεται: εφχ=εφπ/4 ⇔ **χ=κπ+π/4** ,κ∈Z

iv) Επειδή σφπ/6=$\sqrt{3}$ γίνεται: σφχ=σφπ/6 ⇔ **χ=κπ+π/6**, κ∈Z.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ



Στην περίπτωση κατά την οποία έχουμε να λύσουμε τριγ. εξισώσεις των μορφών **ημχ=±1**,**συνχ=±1** ,**ημχ=0**, **συνχ=0**, **εφχ=0**, **σφχ=0** ,η διαδικασία απλοποιείται αν λάβουμε υπ' όψιν μας τα παρακάτω:

Γωνίες των οποίων η τελική πλευρά τέμνει τον τριγ. κύκλο:

i) στο σημείο **Α** είναι της μορφής **χ=2κπ**
ii) στο σημείο **Β** είναι της μορφής **χ=2κπ +** $^{\pi}/_{2}$
iii) στο σημείο **Γ** είναι της μορφής **χ=(2κ+1)π**
iv) στο σημείο **Δ** είναι της μορφής **χ=2κπ -** $^{\pi}/_{2}$

v) στα σημεία **Α ή Γ** είναι της μορφής **χ=κπ**
vi) στα σημεία **Β ή Δ** είναι της μορφής **χ=κπ +** $^{\pi}/_{2}$
vii) στα σημεία **Α ή Β ή Γ ή Δ** είναι της μορφής **χ=κ** $^{\pi}/_{2}$,όπου κ∈Z.

π.χ. ημχ=1⇔ **χ=2κπ +** $^{\pi}/_{2}$, αφού η τελική πλευρά της γωνίας είναι στο Β
συνχ=0⇔ **χ=κπ +** $^{\pi}/_{2}$, αφού η τελική πλευρά της γωνίας είναι στα Β ή Δ
ημχ=0 ⇔ **χ=κπ**, αφού η τελική πλευρά της γωνίας είναι στα Α ή Γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $1-2\eta\mu\chi=0$ ii) $2-\sigma\upsilon\nu\chi=0$ iii) $\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\chi-1=0$

iv) $\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\chi-1=0$ v) $5\sigma\varphi\chi=0$ vi) $1+\sigma\varphi\chi=0$

vii) $5(1+\eta\mu\chi)(2+\sigma\upsilon\nu\chi)=0$ viii) $(3\varepsilon\varphi\chi+\sqrt{3})(1-\sigma\upsilon\nu^2\chi)=0$

ix) $1-\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\chi+\frac{\pi}{3}\right)=0$ x) $\eta\mu\left(\chi-\frac{\pi}{5}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{5}-2\chi\right)$

xi) $\sigma\upsilon\nu\chi-\sigma\upsilon\nu5\chi=0$ xii) $\varepsilon\phi\left(\chi-\frac{\pi}{6}\right)=\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}-\chi\right)$.

---

2. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\varepsilon\varphi(x-\frac{\pi}{3})+\varepsilon\varphi x=0$ ii. $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x=0$

iii. $\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu(x-\frac{\pi}{3})$ iv. $\varepsilon\varphi 3x+\sigma\varphi\frac{5x}{2}=0$.

---

3. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $2\sigma\varphi x-\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\varphi x-2\sqrt{3}$ ii. $2\sigma\upsilon\nu^2x+1=5\eta\mu x$

iii. $2-\eta\mu^2x=5\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu^2x$ iv. $\varepsilon\varphi 5x\cdot\sigma\varphi 10x=1$

---

4. Να λυθούν οι εξισώσεις

i. $\varepsilon\varphi^2 2x+\varepsilon\varphi 2x=0$ ii. $\varepsilon\varphi^2x-(1-\sqrt{3})\varepsilon\varphi x-\sqrt{3}=0$

iii. $2\eta\mu 3x\cdot\sigma\upsilon\nu 2x=\sigma\upsilon\nu 2x$ iv. $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-2=2\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$

v. $\varepsilon\varphi^2 2x-\sigma\varphi^2 2x=0$ vi. $\eta\mu x=\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu x$.

---

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\eta\mu 2\chi=-\eta\mu\chi$ ii) $\sigma\upsilon\nu 3\chi=-\sigma\upsilon\nu 2\chi$ iii) $\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi=0$

iv) $2\eta\mu^2\chi+5\eta\mu\chi=0$ v) $\varepsilon\phi^2\chi+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}-3=0$ vi) $\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi=\sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu^2\chi$

vii) $(1-2\eta\mu\chi)^2-4(1-\eta\mu\chi)(1-2\eta\mu\chi)=0$ viii) $2\eta\mu^2\chi-\sigma\upsilon\nu\chi-1=0$.

---

6. Να λυθεί στο $[0,\pi)$ η εξίσωση: $2\sigma\upsilon\nu(2x-\frac{\pi}{5})=1$.