ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΚΑΤ/ΝΣΗΣ
ΘΕΩΡΙΑ - ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Να δείξετε ότι: $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$.

Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ έχουμε:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha(\gamma+\delta i)+\beta i(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+(\beta i)(\delta i)=$$

$$=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i-\beta\delta=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i\ .$$

- Να δείξετε ότι: $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$.

Για να εκφράσουμε το **πηλίκο** $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, όπου $\gamma+\delta i\neq 0$, στη μορφή $\kappa+\lambda i$, πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i\ .$$

- Να δείξετε ότι: $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)}=\overline{(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i}=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)i=(\alpha-\beta i)+(\gamma-\delta i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2\ .$$

- ***Επίλυση της Εξίσωσης*** $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ **με** $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ***και*** $\alpha\neq 0$

Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο $\mathbb{R}$ και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}\ ,\ (1)$$

όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\Delta>0$. Τότε η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές λύσεις: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
- $\Delta=0$. Τότε η εξίσωση (1) έχει μια διπλή πραγματική λύση: $z=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$
- $\Delta<0$. Τότε, επειδή $\dfrac{\Delta}{4\alpha^2}=\dfrac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2}=\dfrac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2}=\left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$, η εξίσωση (1) γράφεται:

  $\left(z+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$. Άρα οι λύσεις της είναι: $z_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

- Να δείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ όπου z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Έχουμε:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow |z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1 \cdot z_2)(\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$
$$\Leftrightarrow z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

και, επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει, θα ισχύει και η ισοδύναμη αρχική.

- Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.
  Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Σύμφωνα με τις ιδιότητες έχουμε:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = \lim_{x \to x_0}(\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0) = \lim_{x \to x_0}(\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \to x_0}(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}) + \cdots + \lim_{x \to x_0}\alpha_0$$

$$= \alpha_\nu \lim_{x \to x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1}\lim_{x \to x_0} x^{\nu-1} + \cdots + \lim_{x \to x_0}\alpha_0 = \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0 = P(x_0).$$

Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$.

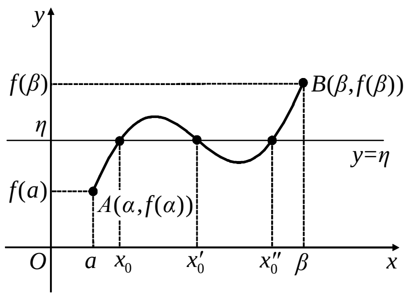
- ***Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών***

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.
Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:
- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού

$g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.
Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



- **ΘΕΩΡΗΜΑ**

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)\right] = \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

● Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{c-c}{x-x_0}=0$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^\nu$, $\nu\in N-\{0,1\}$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$,δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},$$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1})=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$,

δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$. ■

● Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Προσοχή !!! Η $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}}$ **δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.** ■

- **ΘΕΩΡΗΜΑ**

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. ■

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε: $(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = \frac{(1)'x^\nu - 1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$. ■

- Έστω η συνάρτηση $f(x) = \text{εφ}x$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathrm{A} = \mathrm{R} - \{x \mid \text{συν}x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$, δηλαδή $(\text{εφ}x)' = \frac{1}{\text{συν}^2 x}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathrm{A}$ έχουμε:

$$(\text{εφ}x)' = \left(\frac{\text{ημ}x}{\text{συν}x}\right)' = \frac{(\text{ημ}x)'\text{συν}x - \text{ημ}x(\text{συν}x)'}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}x\text{συν}x + \text{ημ}x\text{ημ}x}{\text{συν}^2 x} = \frac{\text{συν}^2 x + \text{ημ}^2 x}{\text{συν}^2 x} = \frac{1}{\text{συν}^2 x}. \quad ■$$

- Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathrm{R} - \mathrm{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως, $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

- Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha$, δηλαδή $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln\alpha$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $y = \alpha^x = e^{x \ln\alpha}$ και θέσουμε $u = x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως, $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x\ln\alpha} \cdot \ln\alpha = \alpha^x \ln\alpha$.

● Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι·

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$.

Επομένως, $y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

● **ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε ***ε σ ω τ ε ρ ι κ ό*** σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

— Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.

— Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$.
Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ.
Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε ***ε σ ω τ ε ρ ι κ ό*** σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $h=f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει:

$$h'(x)=(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $h=f-g$ είναι σταθερή στο Δ.

Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.

• ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ***σ υ ν ε χ ή ς* σε ένα διάστημα *Δ*.**
Αν $f'(x)>0$ σε κάθε ***ε σ ω τ ε ρ ι κ ό* σημείο *x* του *Δ***, τότε η f είναι **γνησίως αύξουσα σε όλο το *Δ*.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1).$$

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ.
Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

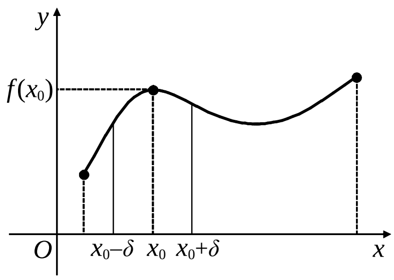
$$f'(x_0)=0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε

$(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. (1)



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Επομένως,

— αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$.
Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), ***τότε*** το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της *f*.

ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), ***τότε*** το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της *f*.

iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, **τότε** το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι ***γνησίως αύξουσα*** στο $(\alpha,x_0]$.

Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι ***γνησίως φθίνουσα*** στο $[x_0,\beta)$.

Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$,

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

iii) Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$.

Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της *f*.

Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).
Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. ■

- **ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα *Δ*. Αν *F* είναι μια παράγουσα της f στο *Δ*, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο *Δ* και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο *Δ* παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

— Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο *Δ*, αφού

$$G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x),\ \text{για κάθε}\ \ x\in\varDelta.$$

— Έστω *G* είναι μια άλλη παράγουσα της f στο *Δ*. Τότε για κάθε $x\in\varDelta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\varDelta$.

Άρα, σύμφωνα με γνωστό πόρισμα , υπάρχει σταθερά *c* τέτοια, ώστε

$$G(x)=F(x)+c,\ \text{για κάθε}\ \ x\in\varDelta.\ \ \blacksquare$$

- **ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού)**

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν *G* είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$.

Επειδή και η *G* είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x)=F(x)+c. \qquad (1)$$

Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_\alpha^\alpha f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$,

οπότε, για $x=\beta$, έχουμε $G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_\alpha^\beta f(t)dt+G(\alpha)$
και άρα

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha).\ \ \blacksquare$$
